version

XII

Kevin GUEGUEN

RESOLUTION DE PROBLEMES ARITHMETIQUES

2013 - 2019

« La structure générale, ainsi que les textes, photos, images composant ce travail sont la propriété de Kevin Gueguen. Toute reproduction, totale ou partielle, et toute représentation du contenu substantiel de ce travail, d'un ou de plusieurs de ses composants, par quelque procédé que ce soit, sans autorisation expresse de Kevin Gueguen, est interdite, et constitue une contrefaçon sanctionnée par les articles L.335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.
Les informations, pictogrammes, photographies, images, textes sont protégés par des droits de propriété industrielle et/ou intellectuelle, soit que Kevin Gueguen en soit le titulaire, soit qu'il soit autorisé à les reproduire et les représenter. A ce titre, toute reproduction, représentation, adaptation, traduction et/ou modification, partielle ou intégrale ou transfert sont interdits.
La copie sur support papier à usage privé de ces différents objets de droits est autorisée conformément à l'article L122-5 du Code de la Propriété Intellectuelle. Leur reproduction partielle ou intégrale, sans l'accord préalable et écrit de l'auteur, est strictement interdite. »

Sommaire

1) Présentation du guide et historique du projet 7

2) Les problèmes arithmétiques à structure additive. 21

2 – 1) Typologie des problèmes additifs et progressivité des apprentissages 23

2 – 2) Compositions d'états. 37

2 – 3) Transformations d'états. 46

2 – 4) Comparaisons d'états. 51

2 – 5) Compositions de transformations. 64

2 – 6) Compositions de relations. 69

2 – 7) Transformations de relations. 71

3) Les problèmes arithmétiques à structure multiplicative. 73

3 – 1) Typologie des problèmes multiplicatifs et progressivité des apprentissages 81

3 – 2) Problèmes Ternaires. 105

3 – 2 – 1) Les comparaisons multiplicatives. 107

3 – 2 – 2) Le produit cartésien. 111

3 – 2 – 3) La configuration rectangulaire. 115

3 – 2 – 4) La configuration triangulaire. 119

3 – 2 – 5) Configuration cubique. 121

3 – 2 – 6) Transformations de grandeurs. 125

3 – 2 – 7) Compositions de transformations de grandeurs. 129

3 – 2 – 8) Compositions de relations multiplicatives. 131

3 – 2 – 9) Transformations de relations multiplicatives. 133

3 – 3) Problèmes Quaternaires. 135

3 – 3 – 1) Proportionnalité simple. 137

3 – 3 – 2) Comparaison de rapports de proportionnalité 151

3 – 4) Problèmes de proportionnalité composé. 157

3 – 4 – 1) Proportionnalité simple composée. 161

3 – 4 – 2) Proportionnalité double. 167

4) Les problèmes complexes et les problèmes ouverts

4.1) Les problèmes complexes 179
4.2) Les problèmes ouverts 185
4.3) Modéliser des problèmes ouverts 191

5) La résolution de problèmes dans les programmes 199

6) Un état de la recherche : des réflexions personnelles 219

6.1) Théorie de la charge cognitive 223
6.2) Les méta-analyses de John Hattie 227
6.3) Manipulation – Modélisation – Abstraction 237
6.4) Mise en mémoire et entraînement 243

7) grammaire, démarches et stratégies

7.1) la grammaire de la résolution de problèmes 247

7.2) Les stratégies pour résoudre un problème arithmétique.

7.2.1) Rôle de l'enseignant 253
7.2.2) Enseigner des stratégies 257
7.2.3) un questionnement simplifié 267

7.3) Illustration des démarches pour modéliser et catégoriser 273

8) Notre approche au cycle 2 et au cycle 3 303

8.1) Une progression pour le CP 305
8.2) Des pistes pour débuter au CP 319
8.3) Une progression pour le CE1 363
8.4) Des productions des élèves de CE1 371
8.5) Une progression pour les CE2, CM1 et CM2 379
8.6) Des productions des élèves de CE2, CM1 et CM2 387
8.7) Évaluer la progression des élèves 403

9) Un premier bilan

9.1) Les modalités d'intervention et analyses de l'auteur 409
9.2) Analyses et commentaires des enseignants et élèves 421

10) Résultats des élèves aux évaluations départementales et nationales

10.1) Résultats aux évaluations départementales CP 427
10.2) Résultats aux évaluations nationales CE1 443
10.3) Résultats aux évaluations nationales CM2 449

11) Questions / Réponses 457

12) Bibliographie 469

1 Présentation du guide et historique du projet.

Cet ouvrage présente et explicite un travail de recherche et de pédagogie axé sur la résolution de problèmes arithmétiques au primaire. Ce témoignage de l'action menée a été réalisé par le maître supplémentaire de l'école Jean-Jacques Rousseau d'Argenteuil, Kevin GUEGUEN, enseignant encore en poste dans cette école de l'Éducation Prioritaire.

Ce guide méthodologique se veut donc être un travail de synthèse, d'analyse et de méthodologie sur la résolution des problèmes au cycle 2 et au cycle 3. L'approche méthodologique, et ses supports, détaillée dans ce document met en avant un travail langagier intensif d'explicitation et de modélisation mathématique basée sur la catégorisation des problèmes additifs et multiplicatifs de Gérard VERGNAUD. Cette approche n'est pas une « méthode Vergnaud » mais une approche originale et explicite d'enseignement des stratégies de résolution de problèmes par traduction langagière, codage intermédiaire entre un texte et une équation ainsi que par modélisation logique basée, d'une part, sur la typologie de G. VERGNAUD, d'autre part sur l'aspect calculatoire. Cette approche permet de porter une attention très forte aux isomorphismes des problèmes et, par-delà la surface de ceux-ci, c'est l'étude structurelle profonde, et progressive, qui est privilégiée pour maximiser la compréhension des élèves ainsi que leur aptitude à résoudre des problèmes arithmétiques.

Les supports destinés aux élèves et enseignants sont le fruit du travail du maître supplémentaire avec la régulation des enseignants. Ce guide a pour but de proposer une schématisation/ modélisation explicite des situations mathématiques rencontrées, de proposer une démarche de découverte, d'approfondissement et de perfectionnement progressive et spiralaire des différentes catégories de problèmes et de proposer un enseignement explicite des stratégies de résolution efficaces en étudiant très progressivement la structure profonde des problèmes durant les cycles du primaire.

Les schémas, ou modèles, de cette méthode sont créés et proposés par l'auteur et sont l'adaptation de la représentation théoriques des situations mathématiques. Une typologie détaillée couplée à une progression sur cinq années est également proposée par l'auteur. Les documents méthodologiques sont également mis à disposition.

Ce projet est mené sur l'ensemble des classes de l'école élémentaire Jean-Jacques Rousseau d'Argenteuil depuis l'année scolaire 2014-2015. Il a débuté en 2012-2013 avec les classes de CE1, puis en 2013-2014 avec les classes de CP, CE1 et CE2.

Deux éléments essentiels sont à l'origine de ce guide et de tout le travail mené à l'école Jean-Jacques ROUSSEAU. Il y a tout d'abord un constat. Le constat, via l'observation en classe, via les évaluations départementales et nationales, que nos élèves

éprouvaient des difficultés fortes et persistantes dans la résolution de problèmes malgré l'engagement des enseignants. Le constat aussi que les enseignants se sentaient bien souvent dépourvus pour enseigner avec efficacité et aider les élèves. Les élèves « faisaient des problèmes » mais cela ne suffisait pas à mieux comprendre et mieux résoudre, car il fallait pour cela mettre en place un énorme travail de méthodologie et d'explicitation. D'autant plus qu'il était difficile de bâtir une progression structurée et cohérente du CP au CM2, car la résolution de problèmes est une pratique langagière et mathématique aux ramifications vastes. Quels problèmes pour quel cycle ? Comment établir une progression ambitieuse et claire ? Comment articuler les apprentissages ? Comment apprendre à résoudre ? Comment l'enseigner ? Quelles stratégies ? Apprendre en résolvant ou apprendre à résoudre ?

Au même moment, le maître supplémentaire participait à une formation sur la résolution de problème avec une présentation de la typologie de G.VERGNAUD. Des documents furent présentés lors de cet échange professionnel par Pascal LEFORT, Conseiller Pédagogique de Circonscription pour la circonscription d'Argenteuil Sud et IEN de la circonscription (2016 – 2017). Ce document peut être trouvé sous des formes diverses sur les sites de plusieurs circonscriptions. Il aborde la catégorisation des problèmes additifs selon G. VERGNAUD et propose une progression d'étude des structures additives de la Grande Section de Maternelle jusqu'au CM2. Ces documents présentent également une représentation symbolique des problèmes en lien avec la typologie établie.

Aucune application concrète (fichier, démarche, outils) en classe n'est proposée mais la structure est vue comme une aide pour l'enseignant pour cerner les difficultés de l'élève. La progression est une proposition de ce qui peut être abordé selon les niveaux. L'aspect « méthodologie » et « stratégie » de résolution n'est pas abordé, tout comme les principes de Problem Solving Teaching ou Problem Based Learning (que nous détaillerons).

Voici ce document :

TYPOLOGIE DES PROBLEMES ADDITIFS VERGNAUD

Progression en fonction de l'âge à partir duquel les élèves sont capables de résoudre.

PROGRESSION		Problèmes de type n°	Typologie	Représentation symbolique
GS		3	Transformation d'une mesure : transformation positive recherche de l'état final Max avait 5 billes, il en gagne 3. Combien en a-t-il maintenant ?	5 $\xrightarrow{+3}$?
		1	Composition de mesures : recherche du composé Paul a 5 billes en verre et 3 billes en acier. Combien a-t-il de billes en tout ?	5, 3 } ?
		5	Transformation d'une mesure : transformation négative recherche de l'état final Hugo avait 8 bonbons, il en mange 3. Combien lui en reste-t-il ?	8 $\xrightarrow{-3}$?
CP	début	3, 1, 5 Procédures personnelles puis expertes	//	//
		(3, 1, 5)	//	//
	milieu	8 Procédures personnelles	Transformation d'une mesure : recherche de la transformation négative Léo a 3 billes. Avant de jouer, il en avait 8. Combien a-t-il perdu de billes ?	8 $\xrightarrow{?}$ 3
	fin	7 Procédures personnelles	Transformation d'une mesure : recherche de la transformation positive Léo avait 3 billes avant de jouer. Il a maintenant 8 billes. Combien en a-t-il gagné ?	3 $\xrightarrow{?}$ 8
CE1	début	2	Composition de mesures : recherche du complément Alice a invité 8 enfants pour son anniversaire. 5 d'entre eux sont des garçons. Combien y a-t-il de filles ?	5, ? } 8
		6	Transformation d'une mesure : transformation positive recherche de l'état initial Lucie vient de recevoir 3 € de sa tante. Elle a maintenant 8 €. Combien avait-elle avant ?	? $\xrightarrow{+3}$ 8
		15 Procédures personnelles	Composition de deux transformations recherche de la transformation composée Axel a joué deux parties de billes. A la première, il en a gagné 5 et à la seconde, il en a gagné 3. Combien en a-t-il gagné en tout ?	□ $\xrightarrow{+5}$ □ $\xrightarrow{+3}$ □ $\xrightarrow{?}$

CE1	milieu	9	Comparaison de mesures : recherche du référé Lise a 8 billes . Léa a 3 billes de plus que Lise. Combien Léa a-t-elle de billes ?	? +3 8
		11 (fin CE1)	Comparaison de mesures : recherche du référé Charlotte a 8 billes. Nina a 3 billes de moins que Charlotte. Combien Nina a-t-elle de billes ?	? -3 8
		13	Comparaison de mesures : recherche de la comparaison positive Muriel a 8 billes. Sarah en a 3. Combien de billes Muriel a-t-elle de plus ?	8 ? 3
		14	Comparaison de mesures : recherche de la comparaison négative Muriel a 3 billes. Sarah en a 8. Combien de billes Muriel a-t-elle de moins ?	3 ? 8
	fin Procédure personnelle	4	Transformation d'une mesure : recherche de l'état initial Tom joue au jeu de l'oie. Il recule de 3 cases et se retrouve sur la case 5. De quelle case est-il parti ?	-3 ? → 5
		10	Comparaison de mesures : recherche du référent Léa a 8 billes. Elle a 3 billes de moins que Lise. Combien Lise a-t-elle de billes ?	8 -3 ?
		12	Comparaison de mesures : recherche du référent Charlotte a 8 billes. Elle a 3 billes de plus que Nina. Combien Nina a-telle de billes ?	8 +3 ?
		17	Composition de deux transformations recherche de la transformation composée Bill a joué deux parties. A la première, il a gagné 8 billes et à la deuxième, il en a perdu 3. Combien a-t-il gagné de billes en tout ?	+8 -3 ?

PROGRESSION		Problèmes de type n°	Typologie	Représentation symbolique
CE2		4	Transformation d'une mesure : recherche de l'état initial Tom joue au jeu de l'oie. Il recule de 3 cases et se retrouve sur la case 5. De quelle case est-il parti ?	-3 ? → 5
		10	Comparaison de mesures : recherche du référent Léa a 8 billes. Elle a 3 billes de moins que Lise. Combien Lise a-t-elle de billes ?	8 -3 ?
		12	Comparaison de mesures : recherche du référent Charlotte a 8 billes. Elle a 3 billes de plus que Nina. Combien Nina a-telle de billes ?	8 +3 ?
	Fin	17	Composition de deux transformations : recherche de la transformation composée Bill a joué deux parties. A la première, il a gagné 8 billes et à la deuxième, il en a perdu 3. Combien a-t-il gagné de billes en tout ?	+8 -3 ?
CM1		18	Composition de deux transformations : recherche de la transformation composée John a joué deux parties. A la première, il a perdu 3 billes et à la seconde, il en a gagné 8. Combien a-t-il gagné de billes en tout ?	-3 +8 ?
CM2		19	Composition de deux transformations : recherche d'une composante Rachel a joué deux parties de billes. A la première, elle a perdu 8 billes. Elle a perdu en tout 3 billes. Combien en a-t-elle gagné à la deuxième ?	-8 ? -3
		20	Composition de deux transformations : recherche d'une composante Axel a joué deux parties de billes. A la deuxième, il en a perdu 8. En tout, il a perdu 3 billes. Combien a-t-il gagné de billes à la première partie ?	? -8 -3
		16 Fin CM2 collège	Composition de deux transformations : recherche d'une composante Bruno joue deux fois aux billes. Au second jeu, il perd 5 billes. Après les deux jeux, il a gagné 3 billes. Combien de billes a-t-il gagné au premier jeu ?	? -5 +3

Après lecture de ce document, plusieurs interrogations sont survenues :

- **Existe-t-il une mise en œuvre concrète de cette typologie ?** C'est-à-dire une progression détaillée, pas juste une présentation, couvrant tous les niveaux de tous les cycles avec un support permettant de travailler sens et procédure en ciblant la compréhension et la création d'automatisme.
- **Quid d'une typologie des problèmes multiplicatifs ?** Elle existe mais semblait très complexe car tous les documents ne concordaient pas, les catégories étaient restreintes et il n'y avait pas de progression proposée. Quand aborder tel type ? Pendant combien de temps ? Quel lien avec les programmes ? Avec le calcul et l'apprentissage des algorithmes ?
- Les schémas proposés, théoriquement exacts au niveau structurel, semblent hautement inappropriés pour les élèves dans l'optique d'une modélisation efficace et d'une catégorisation. De même pour les enseignants, comment peuvent-ils utiliser cette représentation ? Surtout, peut-on en faire un support d'explicitation et de langage ? Un outil concret ?
- Comment utiliser cette typologie et cette possible modélisation pour permettre une pratique efficace de la résolution de problèmes visant la maîtrise des stratégies de résolution ? Quelle approche pédagogique permettrait de le faire de façon progressive en en travaillant l'autonomisation et la coopération ?
- La progressivité de cette typologie est donnée à titre indicatif, or nos classes sont très hétérogènes, comment envisager une étude des structures présentées en tenant compte de cet aspect ? Comment assurer un apprentissage exigeant et durable avec des niveaux très hétérogènes ainsi que des pratiques très variées chez les enseignants ?

L'avantage a été d'entrevoir immédiatement comment il serait possible de mettre en œuvre cette typologie dans un projet global de pratique de la résolution de problèmes. De même que la manière de la concrétiser auprès de nos élèves du CP au CM2 avec une approche pédagogique structurée et progressive. Bien sur, cela impliquait un temps long pour approfondir le sujet, analyser les productions, créer les outils et les perfectionner en mettant en place le collectif, car il n'existait pas de mise en œuvre préexistante.

Une typologie des problèmes multiplicatif existe. Sa catégorisation, sa modélisation et la progression associée a été complètement retravaillée par le maître supplémentaire pour permettre une approche plus concrète et plus efficace avec nos élèves sur un temps long afin de prendre le temps de travailler le sens, l'explicitation et les aptitudes de calcul. De même, en couplant cette typologie avec les exigences des programmes officiels nous avons pu établir une progression du cycle 2 au cycle 3 avec néanmoins l'insertion de prolongements permettant d'approfondir nettement les notions étudiées et d'aller au-delà quand cela était possible.

Les modèles schématiques proposés sont les créations du maître supplémentaire et sont les adaptations des modèles théoriques. Ces créations ont pour objectif de permettre à nos élèves de minimiser les sources d'incompréhension, d'avoir un support structurant qui servira de lien entre l'énoncé et l'équation mathématique et d'aider l'enseignant à

s'engager dans un questionnement avec l'élève pour le guider et l'étayer dans ses stratégies. Nous visons ainsi un gain d'efficacité dans le projet mais aussi dans l'ensemble du travail journalier concernant le domaine mathématique. Ces modèles servent à étudier et enseigner la structure profonde d'un problème en travaillant la grammaire de l'énoncé. Ces modèles sont des initiateurs de la mise en équation et des supports transitoires d'explicitation.

Nous avons établi un protocole d'action auprès de nos élèves pour exploiter cette modélisation au quotidien et pratiquer plus efficacement la résolution de problèmes en couvrant les cycles 2 et 3. Afin que chacun puisse progresser avec ambition et exigence, et tout le soutien nécessaire, nous avons créé un support qui peut permettre une individualisation pour tous les élèves afin d'aborder et de maîtriser progressivement la typologie proposée dans sa globalité et d'y exprimer toutes ses qualités au long des cinq années des cycles 2 et 3. Sans rogner sur les exigences car l'ambition est de mener tous les élèves au plus haut degré de maîtrise.

La première étape du travail du maître supplémentaire fut de reprendre ce document afin de le clarifier pour l'équipe enseignante et d'y modifier la schématisation proposée. En effet, le travail théorique présenté est de qualité mais peut paraître trop théorique ou abstrait pour les collègues qui n'avaient pas le temps de se plonger dans la lecture de toute la documentation proposée. Cette proposition théorique était très superficielle dans son aspect « utilisation par les enseignants ». Ce document est un outil de réflexion et d'explicitation pour les enseignants et non un support pour les élèves. L'intérêt premier est d'expliciter cette typologie et de proposer une démarche au plus grand nombre de collègues. Il faut donc tenir compte du fait que toutes et tous ne sont pas des spécialistes de la modélisation mathématique et des travaux de G. VERGNAUD. Il faut alors viser la clarté et la précision du document proposé pour que chacun des collègues puisse se l'approprier.

Il convient aussi d'expliciter la modélisation proposée et la progression envisagée pour que les enseignants puissent s'en saisir. Ceci est un travail préalable et nécessaire à la mise en route du projet. Nous préciserons tout au long de ce document les objectifs du projet, sa mise en œuvre, les moyens d'actions, les supports et les ramifications engendrées par cette démarche dans tous les domaines mathématiques. Il convient également de préciser que nous optons ici pour un enseignement explicite de stratégies efficaces de résolution aux élèves avec un support structurant. Les schémas qui seront proposés par le maître supplémentaire sont pensés pour une manipulation concrète en classe. Les modèles ont donc été traduits sous une forme à la fois *« modélisable »* et « *utilisable* » par les élèves.

Nous présenterons ci-après la typologie entièrement remaniée avec la progression précédemment proposée en y incluant nos schémas modifiés et un récapitulatif des différents types détaillés. En l'état, ce tableau propose 20 types de problèmes additifs et soustractifs. Il fait l'impasse sur plusieurs compositions de transformations que nous présenterons à titre indicatif. Le nombre total de types rencontrés est alors de 32 mais nombre d'entre eux ne sont qu'une « symétrie » d'un type existant. Nous nous attarderons

sur les plus pertinents. L'essentiel est la structure mathématique sous-jacente.

Compositions : 2 Types.

Transformations : 6 Types.

Comparaisons : 6 Types.

Compositions de transformations : 18 Types

Cette variabilité peut dépendre du fait que l'on travaille ou non dans les domaines suivants lors de la recherche d'une composante d'une composition de transformations :

- Les entiers relatifs : …, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3…, n… Ensemble noté généralement $\mathbb{Z}$
- Les entiers naturels : 0, 1, 2, 3…, n…ensemble noté généralement $\mathbb{N}$

Pour comprendre la catégorisation des problèmes, c'est-à-dire entrevoir la structure profonde des énoncés, il apparaît nécessaire de travailler à la fois sur la **construction** des catégories (les éléments qui les composent) et sur **l'utilisation de ces catégories** (confrontation et pratique intensive). Les deux aspects se faisant en parallèle en ne faisant pas s'exclure sens et automatisation qui s'appuient l'une sur l'autre. Les procédures expertes les plus efficaces sont l'aboutissement d'une progression structurée d'étude et de manipulation des problèmes arithmétiques additifs et multiplicatifs.

Nous sommes, au quotidien, confrontés à des « situations problème » (dans le sens arithmétique) même si nous n'avons pas toujours pleinement conscience de cet état de fait. Les achats, ventes, emprunts, recettes de cuisine, bricolage, etc. sont des situations qui permettent de mobiliser des procédures standardisées de résolution, les automatismes faisant que l'on peut ne plus « voir » le problème sous-jacent. L'utilisation et la maîtrise de la numération, des conversions de grandeurs, des techniques opératoires et de la géométrie va permettre de faciliter la résolution de la situation mais la maîtrise de ces outils, nécessaire et primordiale au demeurant, ne suffit pas. C'est une condition nécessaire mais pas suffisante. C'est le lien ténu entre ces composantes, créé et entretenu en situation qui permet de s'affranchir du cloisonnement didactique et d'appréhender la résolution d'un problème comme un « tout » mathématique. La résolution de problèmes nécessite des outils qui tendent à être de plus en plus puissants à mesure que le niveau d'expertise de résolution augmente. Cette conception de la résolution de problèmes induit une pratique analytique et des régulations permanentes.

Il peut être observé, dans des classes, un travail sur la maîtrise des outils mathématiques cités qui peut apparaître déconnecté de toute finalité. La maîtrise atteinte n'est pas mise au service d'une compréhension plus globale de phénomènes mathématiques. La résolution de problèmes, *« trop complexe à mettre en œuvre »*, nécessitant *« trop de temps »*, est parfois délaissée au détriment d'un travail uniquement basé sur la seule maîtrise de la numération ou du calcul. Maîtrise qui s'enrichirait par la confrontation fréquente avec des problèmes arithmétiques à résoudre, et dont les stratégies auraient été enseignées, pour mobiliser tous les savoirs des élèves. Par analogie, nous observerions un sportif qui s'entraînerait via divers exercices ciblés, travaillant ses muscles les uns après les autres mais sans remobiliser le fruit de cet entraînement en situation concrète. Une sorte de « gonflette » qui laisserait de côté la souplesse, l'endurance, la

réactivité car tout un apprentissage aurait été oublié. À l'inverse, le sportif « en compétition » sans entraînement se dirige inévitablement vers l'échec.

Dans notre projet, nous voulons susciter chez l'élève le besoin concret, prégnant, d'augmenter son niveau de maîtrise dans tous ces domaines pour résoudre des problèmes arithmétiques afin qu'ils conscientisent cette nécessité du travail « autour de ». Un élève peut nous répondre *« J'apprends, je travaille, je m'investis parce que j'en ai besoin »,* car nous avons matérialisé ce besoin. Les questions : *« pourquoi dois-je apprendre cela ? Quel est le but ? »* se font plus rares et deviennent alors rapidement les affirmations : *« J'ai envie d'apprendre ça ! Il faut que je comprenne et que je sache faire ça, car j'en ai besoin. Peux-tu m'apprendre cette technique ? »* d'autant plus fortement que l'élève gagne en maîtrise des savoirs et compétences et que cela nourrit sa confiance.

Cette pratique régulière que nous souhaitons mettre en place vise à développer l'efficacité des procédures des élèves et leur automatisation. Cette automatisation « réflexe » est alors un outil permettant d'aborder avec plus d'efficacité les problèmes complexes (automatisation de multiples procédures connues) et les problèmes ouverts (procédures par essais et analogies) car elle aura fait l'objet d'un enseignement progressif et structuré.

Nous faisons ici le choix assumé d'un enseignement explicite et direct des stratégies de résolution de problème (Problem Solving Teaching) plutôt qu'un enseignement basé sur la situation problème (Problem Based Learning). Celui-ci ne saurait précéder le premier, mais ces deux aspects ne sont pas opposés, **ils sont articulés**. « Je vais apprendre à faire puis j'apprendrais encore en faisant » comme le passage de l'apprenti vers l'expert. **Ces modèles ne sont pas excluants, le lecteur doit comprendre que des approches pédagogiques qui peuvent sembler opposées sont en fait articulés dans un continuum d'apprentissage. Les approches efficaces le sont en contexte et le gain d'expertise modifie ce contexte, car la compréhension du débutant et celle de l'expert sont fondamentalement différentes. En résumant : plus la maîtrise est forte, plus l'élève est capable d'apprendre en « situation problème ». Mais pour développer cette maîtrise forte, une approche directe, guidante et explicite est primordiale. L'articulation est le maître mot.**

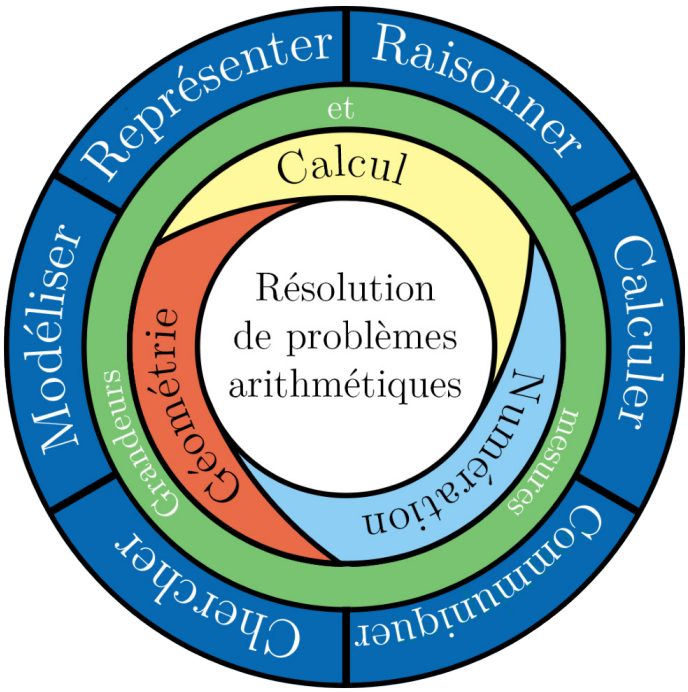
C'est également la rencontre **répétée** avec des « situations problèmes » variées qui permet l'émergence de réflexes cognitifs par l'utilisation d'une méthodologie adaptée. Nous entendons par « **répétée** » le fait de rencontrer ces situations chaque semaine durant toutes les années du CP au CM2. Le plus grand nombre de rencontres possibles est évidemment souhaité. Cet aspect doit être abordé à la fois qualitativement et quantitativement. La répétition est nécessaires pour automatiser les procédures et alléger sa mémoire à court terme.

L'automatisation ne se fait pas sans réflexion (complémentarité entre sens et technique), celle-ci se nourrit et grandit par l'acquisition de stratégies efficaces : Une situation connue des élèves appelle une procédure connue, une situation inconnue que nous introduisons tendra à se rapprocher par quelques éléments de similarité d'une situation connue, qui

appellera aussi des procédures connues qu'il faudra adapter, c'est ce que nous appelons le principe d'analogie. Cela nous pousse à expliciter et étudier profondément, autant que possible, le maximum de situations pour mettre en place des procédures de résolution. Cela se remarque dans les problèmes à étapes multiples qui ne sont que des agglomérats de modélisations connues (problèmes arithmétiques au primaire). L'élève à toujours une piste concrète qu'il peut suivre. La démarche finale n'est que la juxtaposition des procédures qu'il maîtrise. C'est ainsi que de proche en proche l'élève construit le chemin global de résolution. Dans un premier temps, il en élabore le plan progressif de résolution. Dans un second temps ce cheminement se veut, de fait, plus globalisant, car les procédures s'automatisent et se perfectionnent ce qui se traduit par une élaboration mentale rapide du cheminement. Ce cheminement et cette élaboration se construisent par des exemples résolus nombreux, des confrontations, des explicitations, des modèles que l'enseignant propose pour amener l'élève vers l'expertise.

Cette pratique régulière a pour but de permettre une mobilisation efficace des connaissances et attitudes face à de nouveaux problèmes plus complexes ou ouverts. Cela nécessite de l'entraînement (Régularité du travail), du défi (Rigueur, Objectifs à atteindre, Motivation), du perfectionnement (Exigence élevée sur sa pratique et ses résultats, analyser ses erreurs et réussites, s'appuyer dessus) pour acquérir une meilleure structuration et les réflexes cognitifs correspondants. Il va également de soi que chacun, quel que soit le profil de l'élève, est accompagné, guidé et soutenu tout au long de cet apprentissage.

Dans notre projet, la résolution des problèmes est mise au centre du domaine mathématique, entourée des outils qui vont permettre de la traiter avec efficacité et pertinence.



Cette position centrale ne veut pas dire quelle rayonne vers les autres domaines et qu'elle est l'origine de notre vision de l'apprentissage mathématique mais qu'elle nécessite, pour être performant, la convergence de ces « domaines / outils » qui doivent être travaillés et maîtrisés autant que possible.

La résolution efficace de problèmes nécessite cette agglomération d'éléments pour atteindre un degré de maîtrise élevé. Cette pratique se nourrit de la maîtrise des différents éléments. Cette démarche fait apparaître tous les entrelacs et ramifications entre les domaines étudiés. Ces outils sont nécessaires à l'élève et, parce qu'ils le sont vraiment pour lui (notion de besoin), l'élève s'en saisira d'autant plus (un pari que nous prenons). L'élève est guidé et accompagné vers l'apprentissage efficace de ce qui lui est nécessaire pour avancer dans le projet.

C'est parce qu'il en a, et aura, <u>concrètement</u> besoin (dans notre fonctionnement) que l'élève les utilisera pour avancer et se perfectionner. Mais surtout, ces outils auront été enseignés et l'élève ne sera pas pris au dépourvu. Le schéma présenté sur la page suivante dévoile notre conception et indique également, si cela n'était précisé, que les grandeurs et mesures sont traitées de manière inclusive et permanente. Au primaire, la réalité d'un nombre s'exprime par sa mesure, ce qu'il est et ce qu'il représente pour l'élève concrètement. La question « Qu'est-ce qu'un nombre ? » qui peut paraître triviale, est de toute importance pour l'enseignant pour maximiser la compréhension, par l'élève, des problèmes rencontrés et de la construction du nombre. Il n'y a donc pas, à part, les problèmes de « grandeurs et mesures », il y a « les problèmes arithmétiques avec les grandeurs et les mesures ». Les problèmes rencontrés dans la vie courante sont très souvent liés à ce domaine concret, (recettes de cuisine, bricolage, constructions, trajet de voyage, etc.). Les nombres sont alors une représentation d'une quantité réelle. Il faut donc, autant que possible, être clair sur les principes de nombres abstraits et nombres concrets :

– Un nombre est concret lorsqu'on précise la nature de son unité : 8 litres, 20 kilogrammes, 12 pommes. Le nombre concret est qualitatif (nous précisions sa qualité, sa nature).

– Un Nombre est abstrait si nous restons dans le registre quantitatif sans préciser sa qualité : 8, 20, 12.

Cela nous conduit naturellement à les introduire (les nombres concrets) très régulièrement (**rencontre répétée**) afin de préciser, expliciter et développer leur maîtrise au fur et à mesure tout au long du projet sur la durée des cycles (la rencontre se fait donc également dans le calcul : 2 pommes + 3 pommes = 5 pommes). Cela nous permet, du fait de la différenciation induite par notre mode d'action (fichiers autonomes), d'aborder différentes notions avec des groupes de tailles variables selon des modalités d'intervention elles aussi modulables. Cette « différenciation » peut paraître coûteuse en énergie de prime abord, car en plus d'agir avec le groupe classe il y a une action avec une portion du groupe classe. Il ne s'agit pas de faire moins avec ces élèves, **sûrement pas**, mais de faire encore et encore jusqu'à les amener au degré de réussite visé, et ce degré doit être atteignable mais élevé. Cela se révèle pertinent dans la transmission efficace des savoirs,

car elle nous permet de développer le tutorat par ses pairs (Peer Tutoring), l'analyse et la régulation par l'enseignant.

Il convient encore de garder à l'esprit que ce projet a été conçu pour être mené le plus efficacement possible en co-enseignement avec le maître supplémentaire, pour mieux gérer le groupe, même s'il est tout à fait envisageable de mener des séances seul dans des contextes différents. Si cette modalité n'est pas possible il faudra alors modifier le format d'intervention pour mettre en place le fonctionnement qui conviendra le mieux à l'enseignant. Des demi-groupes, des ateliers sont autant de propositions envisageables. Tout comme une approche en classe entière puis un basculement en groupe réduit. Ainsi, dans cet instant déterminé qu'est « la résolution de problèmes » certains points du programme peuvent être abordés individuellement avec les élèves les plus avancés avant une étude avec le groupe classe pour ensuite mobiliser les tuteurs. De même, certains points du programme ont pu être renforcés avec les élèves les moins avancés selon une logique spiralaire. Nous pensons que pour bâtir solidement il faut prendre le temps de poser clairement des fondations solides.

Tous les domaines de maîtrise de la langue sont bien sur mobilisés dans notre projet, car la clarté de l'énonciation d'un raisonnement est liée à la bonne conception de la démarche.

Dans cet ouvrage nous traiterons également souvent des isomorphismes structuraux en abordant la typologie et la modélisation dans les champs additifs et multiplicatifs. L'isomorphisme se définit ainsi : *« Deux problèmes sont dits isomorphes s'ils partagent le même but, les mêmes contraintes et le même espace de problèmes. Deux problèmes isomorphes disposent de la même structure de problème. Ils diffèrent par leur habillage sémantique c'est-à-dire que leurs traits de surfaces sont différents. »*[1] C'est le cœur de notre approche et la source de nombreuses difficultés de compréhension chez les élèves. Voir l'isomorphisme revient à voir à travers le voile de l'habillage de surface pour saisir immédiatement la structure cachée et donc pouvoir l'associer à une catégorie et à des procédures de résolution. Le novice voit l'habillage, l'expert voit la structure. Le passage de l'état novice à l'état expert se traduit par une plus grande capacité à voir au-delà de l'apparence du problème, en voyant à travers l'implicite, pour en saisir la structure mathématique et initier une démarche de résolution.

Ainsi, même si en apparence deux problèmes peuvent sembler distincts par leurs formulations et données, leur structure profonde peut être similaire. Leur modélisation sera identique et de fait, ils auront une mise en équation similaire. La modélisation au primaire présente l'intérêt de rendre visible, explicite, cette structuration profonde en préparation d'une future mise en équation au secondaire. Parce que cette modélisation est explicitée et utilisée il devient alors possible de mettre en place un traitement analogique de résolution. Sans compter que cette modélisation est un support d'explicitation de la démarche de résolution algébrique. L'élève ne va pas devenir expert seul, simplement par

1 http://edutechwiki.unige.ch/fr/Résolution_de_problème

l'entraînement régulier en pariant sur ses compétences d'analyse et d'analogie. Dans ce cas, nos élèves seraient tous des experts et la question de cet ouvrage ne se poserait pas. C'est là encore le fonctionnement d'un expert, pas d'un novice. Les élèves développent d'autant plus leurs capacités d'analyse et d'analogie au cours des ans qu'ils disposent d'un répertoire préalable solide de références, d'exemples, de stratégies et de procédures efficaces que l'enseignant leur a enseigné explicitement et directement.

Lors d'une procédure analogique l'élève utilise une situation connue et perçue comme similaire pour construire la solution du problème rencontré (qu'ai je en stock pour m'aider à résoudre ?). L'écueil se trouve dans le « perçue » car perçue en surface ou perçue en profondeur ? Nous parlons d'ici d'analogie structurelle perçue dans les problèmes car cela témoigne alors d'une compréhension profonde de la situation. Il devient alors possible de transférer des procédures connues lors d'une situation vers une autre, car elle aura été reconnue comme structurellement analogue.[2]

Les fichiers que nous avons mis au point ciblent très fortement cette recherche de la structuration profonde afin de favoriser le transfert de stratégies de résolution face à des problèmes nouveaux. Reconnaître la structure profonde des problèmes est un processus long que nous travaillons du CP au CM2 mais qui permet aux élèves de comprendre et résoudre des problèmes avec un très fort taux de réussite par rapport a ce qu'ils pouvaient faire auparavant.

Ce travail sur la structure profonde implique de montrer comment modéliser, de faire modéliser (Je fais, nous faisons ensemble, tu fais seul), les problèmes rencontrés pour en repérer les invariants. Cela implique aussi de confronter les modèles des différentes structures pour en extraire les convergences et divergences et d'affiner leur reconnaissance et catégorisation. Il convient également de manipuler ces modèles en étudiant les variations internes de ceux-ci (ex : recherche d'éléments différents dans une structure comparative). Sans jamais négliger la manipulation de données numériques pour construire le sens et le nombre. Le tri de problèmes selon une catégorisation basée sur ces modèles permet de s'entraîner à repérer la structure profonde puis d'y manipuler les constituants et donc de pouvoir par la suite transférer des procédures connues. La confrontation à une diversité de problèmes vient après l'étude structurelle et donc la modélisation. Nos élèves étudient d'abord très progressivement les différents modèles, leur structure et les comparent. À partir d'une structure de surface ils recherchent la structure profonde. Il est certes nécessaire d'approfondir l'étude des structures schématiques, mais il faut éviter l'écueil qui ne confronte jamais plusieurs structures. Catégoriser est essentiel pour les élèves.

Une question revient : Faut-il imposer un schéma type ?

Nous avons pu entendre des enseignants, CPC, IEN nous dire : « *Qu'il ne faut pas imposer un schéma type, cela bridera leur créativité »,* que « *l'élève va se construire sa représentation donc il comprendra mieux »* ou encore qu'il faut, au contraire, « *imposer une structure aux élèves ».* Que l'élève doit *« apprendre à représenter une situation et que*

2 (Gick & Holyoak, 1983)(Holyoak, 2005).

si cette représentation correspond à la situation elle est valide ». Mais aussi que *« l'élève doit juste apprendre par cœur les structures. »*

Oui et Non. Non et Oui.

Faut-il apprendre à représenter une situation ?

Bien sur. Représenter une situation c'est être capable d'un dégager les informations pertinentes et les liens entre elles. C'est rendre visible ce qui est en jeu dans le problème, c'est montrer ce que l'on sait et donc ce que l'on cherche. C'est rendre explicite l'implicite du texte. Un élève peut proposer un schéma personnel qui s'adapte au problème rencontré et voir ce modèle être validé par l'enseignant et présenté aux camarades. C'est ce qui peut être préconisé par beaucoup d'acteurs et qui se pratique très souvent. Néanmoins, si ce schéma est effectivement valide pour la structure de surface, il est extrêmement rare qu'un élève propose naturellement un modèle valide pour la structure interne. Ce qui fait que le schéma ainsi validé, n'est plus valide dans un isomorphisme (analogie de surface ≠ analogie de structure) d'où incompréhension. Ainsi, le travail de modélisation n'est pas pertinent, car il ne se fonde sur aucun codage, ni connaissances préalables du sujet par les élèves. Pour apprendre à représenter il faut des règles, un code simple et clair. Produire un écrit nécessite de connaître des rudiments de grammaire. Il en est de même pour les problèmes arithmétiques. Cette grammaire, pour être assimilée et manipulée, doit être enseignée. La créativité des élèves se développera à partir de cette base, pas avant. Les élèves de cycle 3 sont capables de proposer des adaptations des modèles donnés selon la situation rencontrée, car ils ont un « bagage » langagier et structurel plus important que le novice.

Comment juger la pertinence d'un modèle ?

Le modèle permet-il de faire apparaître les données du problème et les liens entre ces données ? Si oui, le modèle est valide pour <u>ce</u> problème. Pour qu'un modèle soit vraiment pertinent il doit pouvoir représenter une situation isomorphe. Il doit donc utiliser la même « grammaire » de construction dans toutes les situations. Voila où se trouve l'énorme difficulté de modéliser une situation par le schéma. Un modèle juste est souple, modulable avec une structure « base » solide. Une modélisation n'est efficace que si elle est reproductible dans tous les isomorphismes. Si ce n'est pas le cas, c'est que le modèle est incomplet et ne peut donc être une référence (affichage, stratégie). Le risque serait de valider un modèle non reproductible et que les élèves reproduiront dans toutes les situations (ce qui arrive très fréquemment avec les élèves ayant les plus grandes difficultés)

Imposer un modèle alors ?

Si une modélisation pertinente convient à tous les isomorphismes alors le modèle s'impose de lui-même. La nuance est que **le modèle n'est pas imposé, il s'impose**. La confrontation des modélisations permet de renforcer le modèle, il devient solide. Il convient donc d'apprendre explicitement à construire ce modèle qui repose sur une « grammaire » solide. Ainsi, l'élève ne propose pas un modèle venu du néant mais un modèle qui a déjà une logique plus poussée et une structure plus avancée. Il ne reste plus qu'à peaufiner ce modèle avec les élèves et le confronter à diverses situations. Il est

toujours plaisant de voir et d'entendre les élèves quand le schéma « apparaît » dans une situation et que tout prend sens devant eux. Le but n'est pas de réinventer sans arrêt la modélisation alors que nous disposons déjà d'outils performants. **Il faut apprendre à modéliser mais pas à l'aveugle. La grammaire n'est pas aléatoire**. Il convient juste d'apprendre à comprendre et à utiliser ces outils. La maîtrise de ces outils permet par la suite de les modifier. Nous voyons des élèves qui peuvent adapter les modèles aux situations mais en gardant toujours la structure « base ». Les modèles schématiques obéissent au principe d'économie. Une structure « base » est potentiellement modulable et donc extensible.

Ces élèves qui travaillent selon ce dispositif disposent d'une « grammaire » solide en résolution de problème. Ils peuvent donc l'utiliser dans une situation nouvelle en faisant apparaître les invariants structuraux et en y liant les nouvelles données. Le modèle proposé ne sera alors qu'une extension d'un des modèles de base. La finalité est que les modèles ne soient plus nécessaires.

Il est essentiel de prévoir une progression qui fait étudier les points suivants :

- Les structures logiques types (Les différentes catégories.).
- Les variations intra-structurelles (Les éléments d'un modèle).
- Chercher alternativement les inconnus dans des états variables d'une même structure en variant l'aspect additif et soustractif. (multiplicatif et divisif)
- Proposer le choix progressif entre plusieurs modèles à chaque situation.(repérage de la structure et de ses invariants = catégoriser)
- S'extraire des modèles pour aborder des situations complexes nécessitant l'imbrication de plusieurs modèles. (Construire puis déconstruire un complexe en briques simples, le reconstruire ensuite).

La connaissance profonde de la structure des problèmes, et donc le repérage des isomorphes, est un point essentiel de notre projet. Il s'agit de voir par-delà les apparences en utilisant la modélisation schématique. Ajoutons que les élèves se détachent des modèles à mesure qu'ils intègrent la structure profonde des problèmes. Plus le niveau d'expertise augmente, moins le support est utilisé, car il est mentalisé. Il faut d'un côté apprendre à construire le modèle efficace, utiliser ce modèle et le confronter de manière à le moduler, le consolider puis à terme s'en passer. Le modèle physique utilisé (le schéma) cède sa place à un modèle mental structuré. L'émergence de ce modèle mental logique est d'autant plus rapide que le travail de modélisation est fréquent et continue. Mais ce travail de modélisation doit être extrêmement explicite et converger vers la construction de modèles pertinents utilisables dans toutes les situations isomorphes. La validité ne vient pas de la pertinence d'un modèle pour un problème donné, mais de la pertinence d'un modèle pour tous les problèmes de la même catégorie.

Exemples de problèmes isomorphes :

Problèmes de transformation (recherche de l'état initial) :

« La directrice de l'école termine l'impression de 50 photocopies. Le compteur de la photocopieuse indique 60 photocopies. Combien indiquait-il de photocopies avant ? »

« Mr Pinpon vient de rouler 50 kilomètres. Le compteur de sa moto marque 60 kilomètres maintenant. Combien marquait-il avant de partir ? »

« Mr Euler vient d'acheter 50 compas pour sa classe. Il en a maintenant 60. Combien y avait-il de compas avant son achat ? »

« Mr Sauron vient d'acheter 50 Nazguls pour son armée du mal. Il en a maintenant 60. Combien y avait-il de Nazguls avant son achat ? »

« Mr Rose remet 50 glorks dans le vulpoc. Il a 60 glorks maintenant. Combien y avait-il de glorks dans le vulpoc ? »

État initial : À chercher
Transformation : + 50
État final : = 60
Soit : État initial + 50 = 60 et État initial = 10
Soit : x + 50 = 60 et x = 10

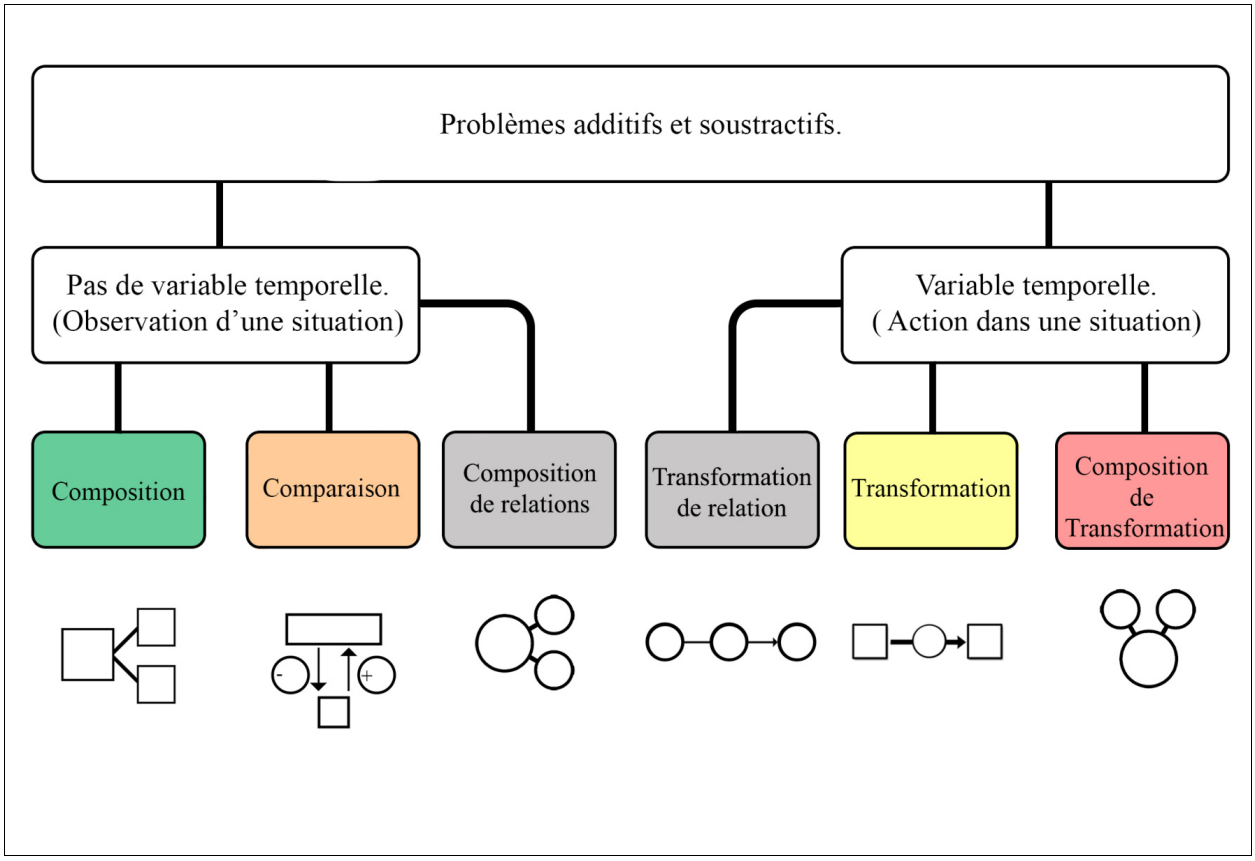
Ces 5 problèmes sont structurellement identiques même s'ils ne le sont pas en apparence pour nos élèves : *« des problèmes de photocopies, des problèmes de kilomètres, de compas, de Nazguls et de glorks ».* Avec des termes inventés qui vont perturber l'apparence alors que le fond ne change pas. Le travail dans nos fichiers vise à rendre évidente cette isomorphie pour maximiser la capacité à résoudre les problèmes. Il revient donc à l'enseignant de travailler explicitement cette modélisation afin de chercher à maximiser le transfert d'habiletés. La représentation schématique que nous utilisons permet de modéliser ces 5 problèmes de manière identique. Le modèle est donc pertinent et solide. Un modèle ne représentant qu'une situation aurait été pertinent mais trop fragile.

Tout au long de ce guide nous essaierons de répondre le plus exactement possible à toutes les interrogations des lecteurs. Le domaine concerné est extrêmement vaste mais nous nous appliquerons à donner aux enseignants toutes les ressources pour affiner leurs pratiques. Nous vous souhaitons une bonne lecture.

2 Les problèmes arithmétiques à structure additive.

Les problèmes additifs se scindent en deux ensembles selon la présence, ou non, d'une variable temporelle. S'agit-il d'une transformation appliquée à un état stable ou d'une situation observable sans variance ? Il s'agit donc, pour l'élève, de repérer ce qui est un marqueur de l'évolution temporelle d'une situation ou de repérer ce qui indique la relation qui s'opère entre deux états normés.

Ce questionnement est représenté par le document suivant qui présente les quatre familles (étudiées) ainsi que deux représentations non étudiées et la représentation symbolique associée.



Le codage appliqué dans ces modèles est basé sur une « grammaire » qui permet la traduction d'un énoncé en une équation mathématique à travers un schéma structurel dont les unités sont porteuses de sens. Chaque élément est signifiant, en voici une présentation rapide :

Nature	Symbole	Description
$\mathbb{N}$	$\square$	Une quantité. Un état. Une mesure.
$\mathbb{Z}$	$\bigcirc$	L'expression de la transformation. L'expression de la relation.

Nature	Définition
$\mathbb{N}$	Les entiers naturels (0, 1, 2, 3, 4)
$\mathbb{Z}$	Les entiers relatifs (-2 ;-1 ; 0 ; +1 ; +2)

Nous allons essayer de présenter aussi précisément que possible la typologie (définition et étude des types) des problèmes additifs pour en établir une classification accessible.

Les 4 grands types de problèmes additifs seront donc présentés successivement avec toutes les combinaisons existantes : Compositions d'états, Transformations d'états, Comparaisons d'états et Compositions de transformations.

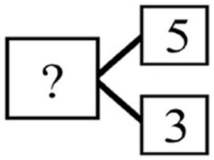
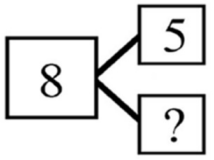
Il existe 2 types supplémentaires que nous présenterons également mais que nous ne travaillons pas spécifiquement dans nos fichiers. Il est bien sur possible de le faire, mais ils ont une structure particulière qui fait qu'ils ne sont pas, pour nous, prioritaires.

2 - 1 Typologie des problèmes additifs et progressivité des apprentissages.

Pour détailler cette typologie complète, nous prendrons le soin d'aborder successivement les quatre familles de problèmes additifs (sur 6 potentielles) et d'en dévoiler l'ensemble des composantes. Cette présentation se veut la plus complète possible mais n'a pas valeur de programmation stricte des apprentissages. Elle a pour objectif d'offrir le panorama le plus exhaustif sur la typologie des problèmes additifs afin que l'enseignant puisse y trouver toutes les informations relatives à ses questionnements. Cette typologie permet de faire le lien avec la grammaire que nous utilisons pour modéliser les situations rencontrées. Les 2 catégories détaillées après les principales le seront, car elles sont des fusions d'éléments des 4 précédentes dans des contextes particuliers.

Une progression englobant les cycles 2 et 3 sera proposée à la suite de cette présentation en ne reprenant que tout ou partie de la typologie présentée ci-après.

Les compositions de mesures aussi appelés « problèmes de réunion » :

Type	Exemple	Modélisation	
1	Composition de mesures : recherche du composé Paul a 5 billes en verre et 3 billes en acier. **Combien de billes a-t-il en tout ?**		Compositions
2	Composition de mesures : recherche du complément Paul a 8 billes en tout. 5 d'entre elles sont en verre. **Combien de billes sont en acier ?**		

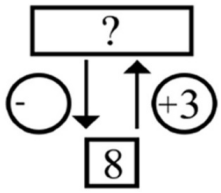
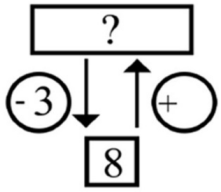
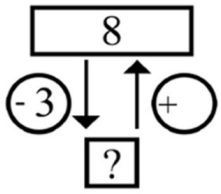
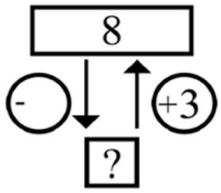
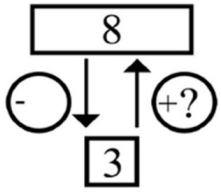
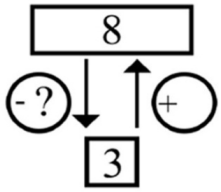
Les compositions de mesures / d'états peuvent être des compositions de multiples états. La composition de 4 éléments d'un **« tout »** correspondra au type 1. Réciproquement, la recherche d'une **« partie »** parmi plusieurs, le « tout » étant connu, correspondra au type 2. Le tout est délibérément placé du côté gauche du modèle, car il tient compte du sens de lecture des égalités. Dans le cas de la soustraction qui résulte du retrait d'une partie d'un tout, il apparaît donc visuellement que l'on retire la plus petite partie de la grande en respectant le sens de lecture.

Les transformations d'états / de mesures :

Type	Exemple	Modélisation
1	Transformation positive, recherche de l'état final. Max avait 5 billes, il en gagne 3. **Combien en a-t-il maintenant ?**	5 —(+3)→ ?
2	Transformation négative recherche de l'état initial. Tom joue au jeu de l'oie. Il recule de 3 cases et se retrouve sur la case 5. **De quelle case est-il partie ?**	? —(-3)→ 5
3	Transformation négative, recherche de l'état final. Hugo avait 8 bonbons, il en mange 3. **Combien lui en reste-t-il ?**	8 —(-3)→ ?
4	Transformation positive recherche de l'état initial. Lucie vient de recevoir 3 € de sa tante. Elle a maintenant 8 €. **Combien avait-elle avant ?**	? —(+3)→ 8
5	Transformation d'une mesure : recherche de la transformation positive Léo avait 3 billes avant de jouer. Il a maintenant 8 billes. **Combien de billes a-t-il gagnées ?**	3 —(+?)→ 8
6	Transformation d'une mesure : recherche de la transformation négative Léo a 3 billes. Avant de jouer, il en avait 8. **Combien a-t-il perdu de billes ?**	8 —(-?)→ 3

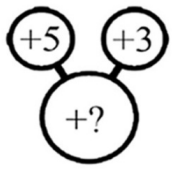
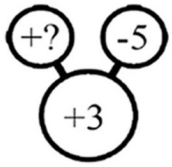
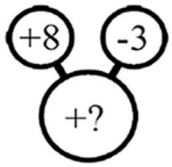
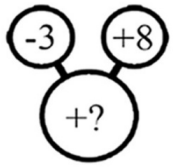
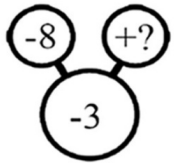
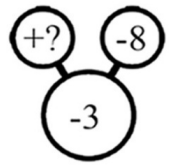
Transformations

Les comparaisons d'états / de mesures :

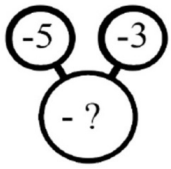
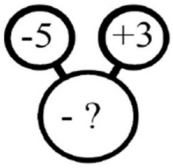
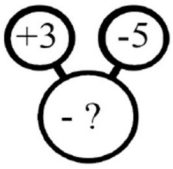
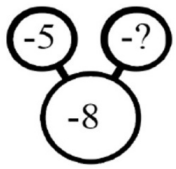
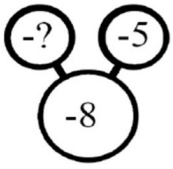
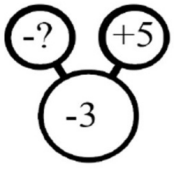
Type	Exemple	Modélisation
1	Comparaison d'une mesure : recherche du référé. Alan a 8 billes. Ben a 3 billes de plus qu'Alan. **Combien de billes a Ben ?**	
2	Comparaison d'une mesure : recherche du référent. Alan a 8 billes. Il a 3 billes de moins que Ben. **Combien de billes a Ben ?**	
3	Comparaison d'une mesure : recherche du référé. Alan a 8 billes. Ben en a 3 de moins qu'Alan. **Combien de billes a Ben ?**	
4	Comparaison d'une mesure : recherche du référent. Alan a 8 billes. Il a 3 billes de plus que Ben. **Combien de billes a Ben ?**	
5	Comparaison d'une mesure : recherche de la comparaison positive. Alan a 8 billes. Ben en a 3. **Combien de billes en plus a Alan ?**	
6	Comparaison d'une mesure : recherche de la comparaison négative Alan a 8 billes. Ben en a 3. **Combien de billes en moins a Ben ?**	

Comparaisons

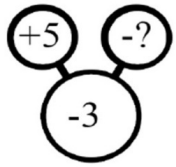
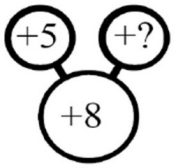
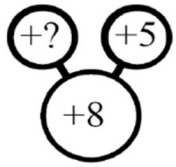
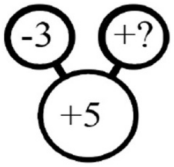
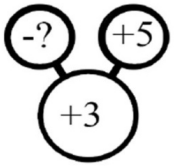
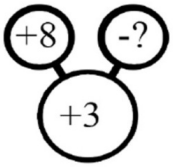
Les compositions de transformations :

Type	Exemple	Modélisation
1	Composition de deux transformations : recherche de la transformation composée Axel a joué deux parties de billes. A la première, il a gagné 5 billes et à la seconde, il en a gagné 3. **Combien de billes a-t-il gagnées en tout ?**	
2	Composition de deux transformations : recherche d'une composante Bruno joue deux fois aux billes. Au second jeu, il perd 5 billes. Après les deux jeux, il a gagné 3 billes. **Combien de billes a-t-il gagnées au premier jeu ?**	
3	Composition de deux transformations recherche de la transformation composée Bill a joué deux parties. A la première, il a gagné 8 billes et à la deuxième, il en a perdu 3. **Combien de billes a-t-il gagnées en tout ?**	
4	Composition de deux transformations : recherche de la transformation composée John a joué deux parties. A la première, il a perdu 3 billes et à la seconde, il en a gagné 8. **Combien de billes a-t-il gagnées en tout ?**	
5	Composition de deux transformations : recherche d'une composante Rachel a joué deux parties de billes. A la première, elle a perdu 8 billes. Elle a perdu en tout 3 billes. **Combien de billes a-t-elle gagnées à la deuxième ?**	
6	Composition de deux transformations : recherche d'une composante Axel a joué deux parties de billes. A la deuxième, il en a perdu 8. En tout, il a perdu 3 billes. **Combien de billes a-t-il gagnées à la première partie ?**	

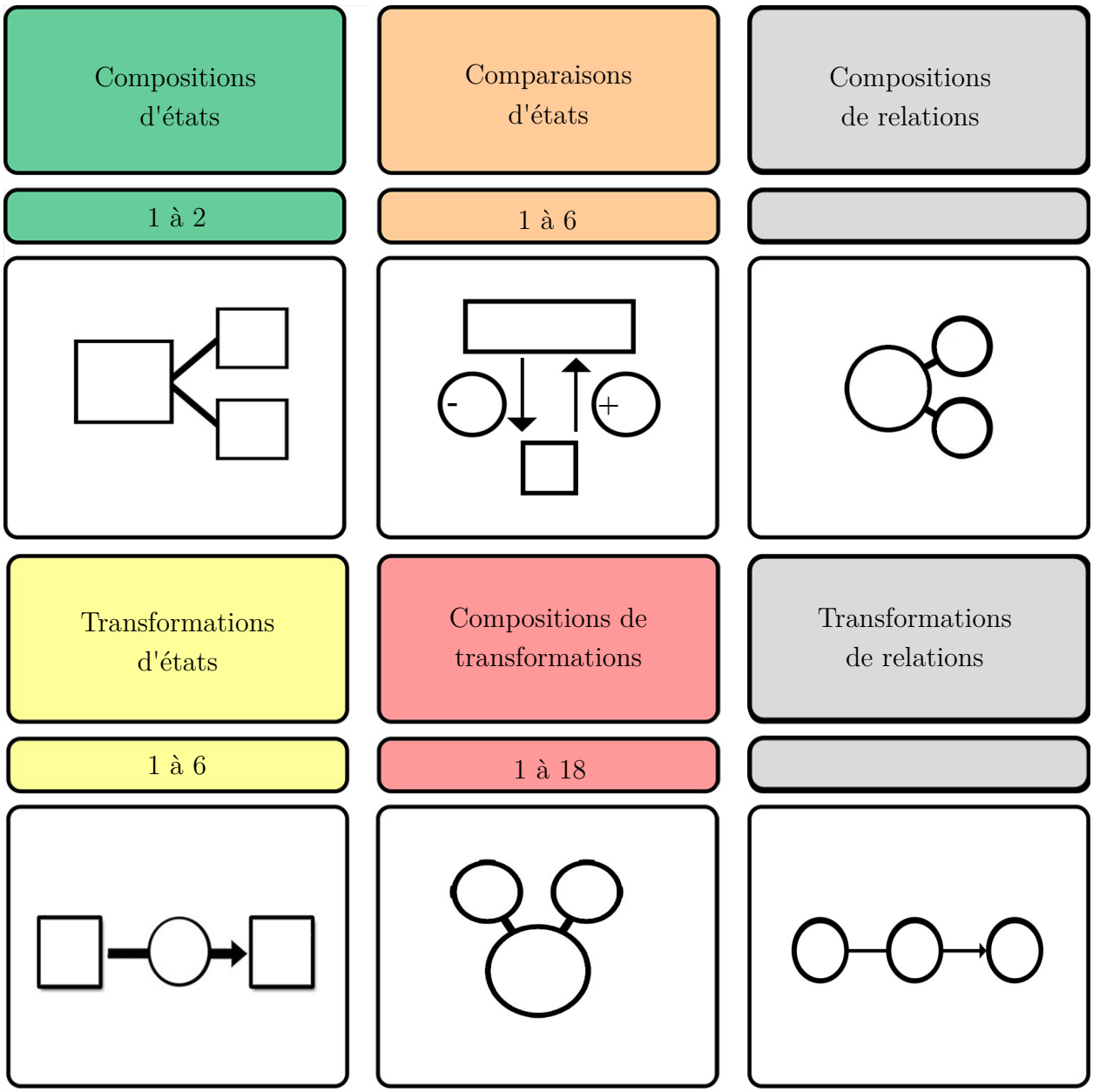
Composition de transformations

Type	Exemple	Modélisation
7	Composition de deux transformations : recherche de la transformation composée Axel a joué deux parties de billes. À la première, il a perdu 5 billes et à la seconde, il a perdu 3 billes. **Combien a-t-il perdu de billes en tout ?**	
8	Composition de deux transformations : recherche de la transformation composée John a joué deux parties. À la première, il a perdu 5 billes et à la seconde, il en a gagné 3. **Combien a-t-il perdu de billes en tout ?**	
9	Composition de deux transformations : recherche de la transformation composée Bill a joué deux parties. À la première, il a gagné 3 billes et à la deuxième, il en a perdu 5. **Combien a-t-il perdu de billes en tout ?**	
10	Composition de deux transformations : recherche d'une composante Carl a joué deux parties de billes. À la première, il en a perdu 5. Il a globalement perdu 8 billes. **Combien a-t-il perdu de billes à la deuxième partie ?**	
11	Composition de deux transformations : recherche d'une composante Denis a joué deux parties de billes. À la deuxième, il a perdu 5 billes et en tout il perd 8 billes. **Combien a-t-il perdu de billes lors de la première partie ?**	
12	Composition de deux transformations : recherche d'une composante Fabrice a joué deux parties de billes. À la deuxième, il en a gagné 5 et a globalement perdu 3 billes. **Combien a-t-il perdu de billes à la première ?**	

Composition de transformations

Type	Exemple	Modélisation	
13	Composition de deux transformations : recherche d'une composante Bill a joué deux parties de billes. À la première, il a gagné 5 billes. En tout, il a perdu 3 billes. **Combien a-t-il perdu de billes à la deuxième partie ?**		Composition de transformations
14	Composition de deux transformations : recherche d'une composante Gustave a joué deux parties de billes. À la première, il en a gagné 5 et globalement a gagné 8 billes. **Combien a-t-il gagné de billes à la deuxième ?**		
15	Composition de deux transformations : recherche d'une composante Marc a joué deux parties de billes. À la deuxième, il en a gagné 5 et en tout il en gagne 8. **Combien a-t-il gagné de billes lors de la première ?**		
16	Composition de deux transformations : recherche d'une composante Rachel a joué deux parties de billes. À la première, elle a perdu 3 billes. Elle a gagné en tout 5 billes. **Combien a-t-elle gagné de billes à la deuxième ?**		
17	Composition de deux transformations : recherche d'une composante Tom a joué deux parties de billes. À la deuxième, il en a gagné 5 et globalement gagné 3. **Combien a-t-il perdu de billes à la première ?**		
18	Composition de deux transformations : recherche d'une composante Ben a joué deux parties de billes. À la première, il en a gagné 8 et a globalement gagné 3 billes. **Combien a-t-il perdu de billes à la deuxième ?**		

Bilan récapitulatif des problèmes additifs



Nous tâcherons de rendre explicite l'importance du caractère progressif et cumulatif de l'étude progressive des différents types. L'étude n'est pas uniquement séquentielle, car il ne s'agit pas de faire une liste déroulante et de passer d'un type à un autre en imaginant que ce qui a été étudié est acquis par les élèves. Étudier un type de problème en le bornant à un temps fixe (séquence, période, année) est insuffisant, voir inefficace. La récurrence est nécessaire pour automatiser la reconnaissance des structures et la mise en place de stratégies pertinentes. L'objectif est d'étudier progressivement de plus en plus de structures sans délaisser celles déjà étudiées afin d'approfondir les connaissances des élèves, leurs compétences dans le domaine ciblé et d'asseoir une compréhension solide des stratégies de résolution. Les structures ne sont pas étudiées pour elles-mêmes mais l'utilisation croissante des stratégies de codage/traduction vont faire apparaître toutes les

nouvelles structures et automatiser très progressivement la reconnaissance des structures. Il suffit d'imaginer un escalier où chaque marche apporte une nouveauté sans écarter les anciennes marches.

Nous mettons donc en place une progression spiralée du CP au CM 2, afin de voir, revoir et encore revoir toutes les modélisations dans des contextes variées et avec des contraintes supplémentaires (degré de difficulté lié à la numération, aux calculs, etc.) en permettant un approfondissement des notions déjà étudiées. Un type de problème abordé ne cesse d'être travaillé tout au long du cycle 2 et du cycle 3. Nous proposerons tout au long de cet ouvrage plusieurs documents d'aide.

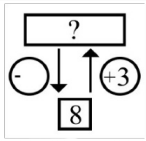
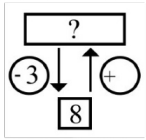
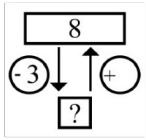
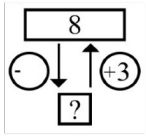
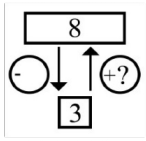
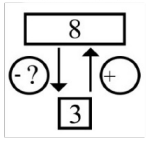
Le prochain document présente une progression cumulative (on rajoute progressivement sans enlever) possible et modifiable du CP au CM2. Cette progression vise l'enseignement progressif de toutes les structures avec une modélisation possible tout en enseignant également les stratégies de résolution. Cet enseignement est réalisé sur un temps long en reprenant toujours ce qui a été étudié. Les catégories rencontrées seront sans cesse reprises tout au long des cycles afin de consolider la maîtrise des élèves en automatisant des processus de résolution. D'autres progressions sont possibles, nos fichiers proposent une progression légèrement différente, car elle a été modifiée progressivement par des heures de pratique. En cas de modification, il faut alors s'assurer de pouvoir maintenir une continuité dans les structures proposées, dans le champ numérique et entre les enseignants du CP au CM2 pour assurer la cohérence. Il faut donc prendre garde à ne pas dénaturer l'outil proposé.

La progression détaillée pour chaque niveau sera approfondie plus après dans les chapitres traitant les progressions intra-cycle avec adjonction de la typologie des problèmes multiplicatifs. Ci-après une proposition de progression divisée en 3 pour une meilleure lecture ainsi qu'une progression très légèrement remaniée dans un document global. Dans celui-ci, deux modélisations sont proposées.

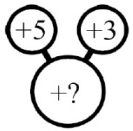
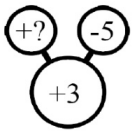
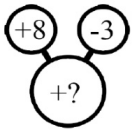
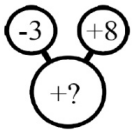
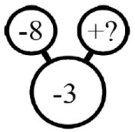
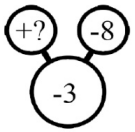
Progression du Cp au Cm 2 pour les compositions et les transformations d'états :

Type	Exemple	Modélisation		Cp	Ce1	Ce2	Cm1	Cm2
1	Composition de mesures : recherche du composé Paul a 5 billes en verre et 3 billes en acier. Combien a-t-il de billes en tout ?	? → 5, 3	Compositions					
2	Composition de mesures : recherche du complément Alice a invité 8 enfants pour son anniversaire. 5 d'entre eux sont des garçons. Combien y a-t-il de filles ?	8 → 5, ?						
1	Transformation positive, recherche de l'état final. Max avait 5 billes, il en gagne 3. Combien en a-t-il maintenant ?	5 —+3→ ?	Transformations					
2	Transformation négative recherche de l'état initial. Tom joue au jeu de l'oie. Il recule de 3 cases et se retrouve sur la case 5. De quelle case est-il parti ?	? —-3→ 5						
3	Transformation négative, recherche de l'état final. Hugo avait 8 bonbons, il en mange 3. Combien lui en reste-t-il ?	8 —-3→ ?						
4	Transformation positive recherche de l'état initial. Lucie vient de recevoir 3 € de sa tante. Elle a maintenant 8 €. Combien avait-elle d'argent avant ?	? —+3→ 8						
5	Transformation d'une mesure : recherche de la transformation positive Léo avait 3 billes avant de jouer. Il a maintenant 8 billes. Combien de billes a-t-il gagnées ?	3 —+?→ 8						
6	Transformation d'une mesure : recherche de la transformation négative Léo a 3 billes. Avant de jouer, il en avait 8. Combien a-t-il perdu de billes ?	8 —-?→ 3						

Progression du Cp au Cm 2 pour les comparaisons :

Type	Exemple	Modélisation		Cp	Ce1	Ce2	Cm1	Cm2
1	Comparaison de mesures : recherche du référé Lise a 8 billes. Léa a 3 billes de plus que Lise. Combien Léa a-t-elle de billes ?		Comparaisons					
2	Comparaison de mesures : recherche du référent Léa a 8 billes. Elle a 3 billes de moins que Lise. Combien Lise a-t-elle de billes ?							
3	Comparaison de mesures : recherche du référé Charlotte a 8 billes. Nina a 3 billes de moins que Charlotte. Combien Nina a-t-elle de billes ?							
4	Comparaison de mesures : recherche du référent Charlotte a 8 billes. Elle a 3 billes de plus que Nina. Combien Nina a-telle de billes ?							
5	Comparaison de mesures : recherche de la comparaison positive Muriel a 8 billes. Sarah en a 3. Combien de billes Muriel a-t-elle de plus ?							
6	Comparaison de mesures : recherche de la comparaison négative Muriel a 3 billes. Sarah en a 8. Combien de billes Muriel a-t-elle de moins ?							

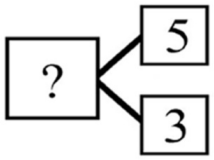
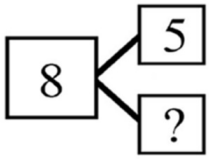
Progression du Cp au Cm 2 pour les compositions de transformations :

Type	Exemple	Modélisation		Cp	Ce1	Ce2	Cm1	Cm2
1	Composition de deux transformations recherche de la transformation composée Axel a joué deux parties de billes. À la première, il a gagné 5 billes et à la seconde, il a gagné 3 billes. Combien a-t-il gagné de billes en tout ?		Composition de transformations					
2	Composition de deux transformations : recherche d'une composante Bruno joue deux fois aux billes. Au second jeu, il perd 5 billes. Après les deux jeux, il a gagné 3 billes. Combien de billes a-t-il gagnées au premier jeu ?							
3	Composition de deux transformations recherche de la transformation composée Bill a joué deux parties. À la première, il a gagné 8 billes et à la deuxième, il en a perdu 3. Combien a-t-il gagné de billes en tout ?							
4	Composition de deux transformations : recherche de la transformation composée John a joué deux parties. À la première, il a perdu 3 billes et à la seconde, il en a gagné 8. Combien a-t-il gagné de billes en tout ?							
5	Composition de deux transformations : recherche d'une composante Rachel a joué deux parties de billes. À la première, elle a perdu 8 billes. Elle a perdu en tout 3 billes. Combien a-t-elle gagné de billes à la deuxième ?							
6	Composition de deux transformations : recherche d'une composante Axel a joué deux parties de billes. À la deuxième, il en a perdu 8. En tout, il a perdu 3 billes. Combien a-t-il gagné de billes à la première partie ?							

Type	Exemple	Modélisation			Cp	Ce1	Ce2	Cm1	Cm2
1	Composition de mesures : recherche du composé Paul a 5 billes en verre et 3 billes en acier. Combien a-t-il de billes en tout ?	? 5 3	5 3 ?	Compositions					
2	Composition de mesures : recherche du complément Alice a invité 8 enfants pour son anniversaire. 3 d'entre eux sont des garçons. Combien y a-t-il de filles ?	8 3 ?	8 3 ?						
1	Transformation positive, recherche de l'état final. Max avait 5 billes, il en gagne 3. Combien en a-t-il maintenant ?	5 +3 ?	5 3 ?	Transformations					
2	Transformation négative recherche de l'état initial. Tom joue au jeu de l'oie. Il recule de 3 cases et se retrouve sur la case 5. De quelle case est-il parti ?	? -3 5	5 3 ?						
3	Transformation négative, recherche de l'état final. Hugo avait 8 bonbons, il en mange 3. Combien lui en reste-t-il ?	8 -3 ?	8 3 ?						
4	Transformation positive recherche de l'état initial. Lucie vient de recevoir 3 € de sa tante. Elle a maintenant 8 €. Combien avait-elle d'argent avant ?	? +3 8	8 3 ?						
5	Transformation d'une mesure : recherche de la transformation positive Léo avait 3 billes avant de jouer. Il a maintenant 8 billes. Combien de billes a-t-il gagnées ?	3 +? 8	8 3 ?						
6	Transformation d'une mesure : recherche de la transformation négative Léo a 3 billes. Avant de jouer, il en avait 8. Combien a-t-il perdu de billes ?	8 -? 3	8 3 ?						
1	Comparaison de mesures : recherche du référé Lise a 5 billes. Léa a 3 billes de plus que Lise. Combien Léa a-t-elle de billes ?	? - +3 5	5 3 ?	Comparaisons					
2	Comparaison de mesures : recherche du référent Léa a 5 billes. Elle a 3 billes de moins que Lise. Combien Lise a-t-elle de billes ?	? -3 - 5	5 3 ?						
3	Comparaison de mesures : recherche du référé Charlotte a 8 billes. Nina a 3 billes de moins que Charlotte. Combien Nina a-t-elle de billes ?	8 -3 - ?	8 3 ?						
4	Comparaison de mesures : recherche du référent Charlotte a 8 billes. Elle a 3 billes de plus que Nina. Combien Nina a-telle de billes ?	8 - +3 ?	8 3 ?						
5	Comparaison de mesures : recherche de la comparaison positive Muriel a 8 billes. Sarah en a 3. Combien de billes Muriel a-t-elle de plus ?	8 - +? 3	8 3 ?						
6	Comparaison de mesures : recherche de la comparaison négative Muriel a 3 billes. Sarah en a 8. Combien de billes Muriel a-t-elle de moins ?	8 -? - 3	8 3 ?						
1	Composition de deux transformations recherche de la transformation composée Axel a joué deux parties de billes. À la première, il a gagné 5 billes et à la seconde, il a gagné 3 billes. Combien a-t-il gagné de billes en tout ?	+5 +3 +?	5 3 ?	Composition de transformations					
2	Composition de deux transformations : recherche d'une composante Bruno joue deux fois aux billes. Au second jeu, il perd 5 billes. Après les deux jeux, il a gagné 3 billes. Combien de billes a-t-il gagnées au premier jeu ?	+? -5 +3	5 3 ?						
3	Composition de deux transformations recherche de la transformation composée Bill a joué deux parties. À la première, il a gagné 8 billes et à la deuxième, il en a perdu 3. Combien a-t-il gagné de billes en tout ?	+8 -3 +?	8 3 ?						
4	Composition de deux transformations : recherche de la transformation composée John a joué deux parties. À la première, il a perdu 3 billes et à la seconde, il en a gagné 8. Combien a-t-il gagné de billes en tout ?	-3 +8 +?	8 3 ?						
5	Composition de deux transformations : recherche d'une composante Rachel a joué deux parties de billes. À la première, elle a perdu 8 billes. Elle a perdu en tout 3 billes. Combien a-t-elle gagné de billes à la deuxième ?	-8 +? -3	8 3 ?						
6	Composition de deux transformations : recherche d'une composante Axel a joué deux parties de billes. À la deuxième, il en a perdu 8. En tout, il a perdu 3 billes. Combien a-t-il gagné de billes à la première partie ?	+? -8 -3	8 3 ?						

Type	Exemple	Modélisation			Cp	Ce1	Ce2	Cm1	Cm2
7	Composition de deux transformations: recherche de la transformation composée Axel a joué deux parties de billes. À la première, il a perdu 5 billes et à la seconde il a perdu 3 billes. Combien a-t-il perdu de billes en tout ?	-5 -3 -?	5 3 ?	Composition de transformations					
8	Composition de deux transformations: recherche de la transformation composée John a joué deux parties de billes. À la première, il a perdu 8 billes et à la seconde il a gagné 3 billes. Combien a-t-il perdu de billes en tout ?	-8 +3 -?	8 3 ?						
9	Composition de deux transformations: recherche de la transformation composée Bill a joué deux parties de billes. À la première, il a gagné 3 billes et à la seconde il a perdu 8 billes. Combien a-t-il perdu de billes en tout ?	+3 -8 -?	8 3 ?						
10	Composition de deux transformations: recherche d'une composante. Carl a joué deux parties de billes. À la première, il a perdu 3 billes. Il a globalement perdu 8 billes. Combien a-t-il perdu de billes à la deuxième partie ?	-3 -? -8	8 3 ?						
11	Composition de deux transformations: recherche d'une composante. Denis a joué deux parties de billes. À la deuxième, il a perdu 3 billes. Il a globalement perdu 8 billes. Combien a-t-il perdu de billes à la première partie ?	-? -3 -8	8 3 ?						
12	Composition de deux transformations: recherche d'une composante. Fabrice a joué deux parties de billes. À la deuxième, il a gagné 5 billes. Il a globalement perdu 3 billes. Combien a-t-il perdu de billes à la première partie ?	-? +5 -3	5 3 ?						
13	Composition de deux transformations: recherche d'une composante. Bill a joué deux parties de billes. À la première, il a gagné 5 billes. Il a globalement perdu 3 billes. Combien a-t-il perdu de billes à la deuxième partie ?	+5 -? -3	5 3 ?						
14	Composition de deux transformations: recherche d'une composante. Gustave a joué deux parties de billes. À la première, il a gagné 3 billes. Il a globalement gagné 8 billes. Combien a-t-il perdu de billes à la deuxième partie ?	+3 +? +8	8 3 ?						
15	Composition de deux transformations: recherche d'une composante. Marc a joué deux parties de billes. À la deuxième, il a gagné 3 billes. Il a globalement gagné 8 billes. Combien a-t-il gagné de billes à la première partie ?	+? +3 +8	8 3 ?						
16	Composition de deux transformations: recherche d'une composante. Rachel a joué deux parties de billes. À la première, elle a perdu 3 billes. Elle a globalement gagné 5 billes. Combien a-t-elle gagné de billes à la deuxième partie ?	-3 +? +5	5 3 ?						
17	Composition de deux transformations: recherche d'une composante. Tom a joué deux parties de billes. À la deuxième, il a gagné 5 billes. Il a globalement gagné 3 billes. Combien a-t-il perdu de billes à la première partie ?	-? +5 +3	5 3 ?						
18	Composition de deux transformations: recherche d'une composante. Tom a joué deux parties de billes. À la première, il a gagné 8 billes. Il a globalement gagné 3 billes. Combien a-t-il perdu de billes à la deuxième partie ?	+8 -? +3	8 3 ?						

2 - 2 Compositions d'états

Type	Exemple	Modélisation	
1	Recherche du composé : Paul a 5 billes en verre et 3 billes en acier. **Combien a-t-il de billes en tout ?**		Compositions
2	Recherche du complément : Alice a invité 8 enfants pour son anniversaire. 5 d'entre eux sont des garçons. **Combien y a-t-il de filles ?**		

Les compositions d'états concernent des situations temporellement stables dans lesquelles la recherche portera sur la découverte d'une partie d'un ensemble ou sur le Tout d'un ensemble dont les parties sont connues. Il existe 2 types de compositions selon que l'on cherche une partie ou le tout.

Type 1 : Composition de mesures : recherche du composé.

Le **type 1** est le plus abordable : Nous mettons ici des éléments, des parties, ensemble pour former un tout. Néanmoins, au sein de notre fichier, bien que le schéma type ne dispose que de 2 cases « partie », nous introduisons de manière immédiate le fait que rien ne limite le nombre de parties. Il peut y en avoir 2, 4, 50, etc. Le concept reste le même, l'assemblage de toutes les parties d'un ensemble formera un tout quel que soit le nombre de parties. Le processus de modélisation induit donc la nécessité de modéliser des situations avec une quantité variable de parties afin de faire émerger la structure originelle.

Le ticket de caisse est un exemple pertinent, car les articles représentent les Parties et le total, le Tout. Le jeu de la marchande, la constitution d'une trousse, la répartition des élèves, sont des supports efficaces pouvant servir de situation de découverte à ce type de problème. De même, toute situation de mise en commun (feutres, billes, cartes, etc.) est possiblement une situation de résolution de ce type de problème. Les présents et les

absents en classe, les élèves qui mangent chez eux et ceux qui mangent à la cantine.

Comme cette modélisation avec deux parties peut ne pas convenir pour une représentation ou les parties sont plus nombreuses, il semble important de faire comprendre et modéliser aux élèves qu'ils peuvent adapter les représentations, les reconstruire à partir d'une base stable. Nous proposons donc des problèmes où il y a 3 parties ou plus pour établir de nouvelles stratégies. Ces problèmes peuvent être étudiés lors de rituels.

Deux adaptations sont observées :

- Ils dessinent une 3e case et complètent leur nouveau schéma.
- Ils additionnent 2 parties d'un côté, passant ainsi de 3 parties à 2 et complètent le schéma.

Ils transforment alors selon leurs préférences une représentation « base » (mais évolutive) en gardant toutefois la cohérence avec le problème abordé. Le but reste de faire **simple** et **efficace** pour résoudre.

Type 2 : Composition de mesures : recherche du complément.

Le **type 2** va nous permettre d'introduire la soustraction et la réversibilité de celle-ci avec l'addition. Deux méthodes sont généralement utilisées pour résoudre. La plus usitée consiste pour les élèves, au début de leur scolarité, à compléter jusqu'à atteindre le Tout.

« Je pars de 5 et je vais à 8. » 5 +… = 8. Les élèves peuvent utiliser les compléments qu'ils connaissent et les stratégies de calcul mental. Attention, ajouter une quantité à partir d'une quantité initiale s'apprend, surtout au CP. Il n'est donc pas ici question de comptage-numérotage en se servant d'une file numérique, mais bien de l'ajout d'une quantité (via des cubes, ses doigts, etc.) à une autre qui est concrète (objets, jetons,) ou mémorisée. Bien sur, lorsque les quantités sont importantes cela complique la tâche. Les élèves arrivent à une limite ou l'addition à trou n'est plus efficace. *Il est donc primordial de commencer au plus tôt la manipulation en parallèle de l'addition et de la soustraction pour passer à une procédure plus simple et efficace*. La recherche d'un complément est la soustraction au Tout de la partie connue. Chercher ce qui manque à 5 pour obtenir 8 revient à ôter 5 de 8 pour obtenir le reste.

Nous remarquons que l'addition à trou est maintenue par des élèves du CE2 au CM2 si son étude à été tardive et donc tant que le concept même de soustraction n'est pas maîtrisé ou si les quantités en jeu sont manipulables aisément via un calcul mental. La compréhension d'un concept peut être longue aussi il convient dès le tout début du CP d'étudier les relations additives et soustractives en parallèle pour permettre un apprentissage explicite, progressif et structurant.

La démonstration, l'explicitation, la manipulation, le dessin, le jeu de rôle, nous aident à faire émerger rapidement cet équivalent de résolution :

8 —5 =… (qui pourrait aussi s'écrire 8 —… = 5)

Il convient donc d'écrire systématiquement et d'expliciter oralement les 2 égalités (addition et soustraction) pour garder en mémoire, à force de rencontres et de

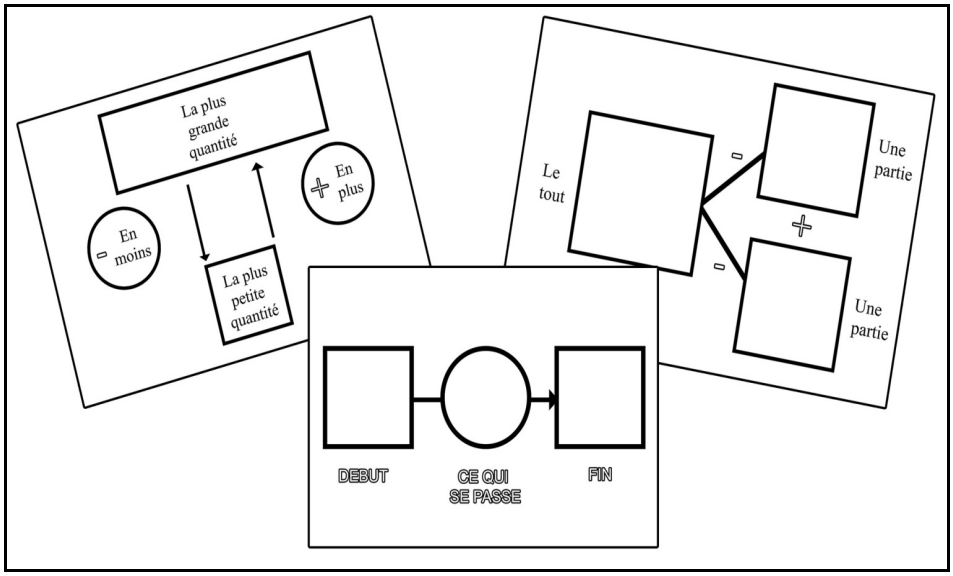
manipulations, que si je peux ajouter d'un côté je peux retrancher de l'autre.

Attention : plusieurs élèves ne voient pas le lien entre addition et soustraction dans l'écriture des égalités. Ils ont une vision « à sens unique » dans un monde « tout additif » et sont parfois perturbés par la notion même de « perte ». De même, il est difficile pour nombre d'entre eux de concevoir qu'une quantité est un Tout si elle n'a pas été nommée comme tel.

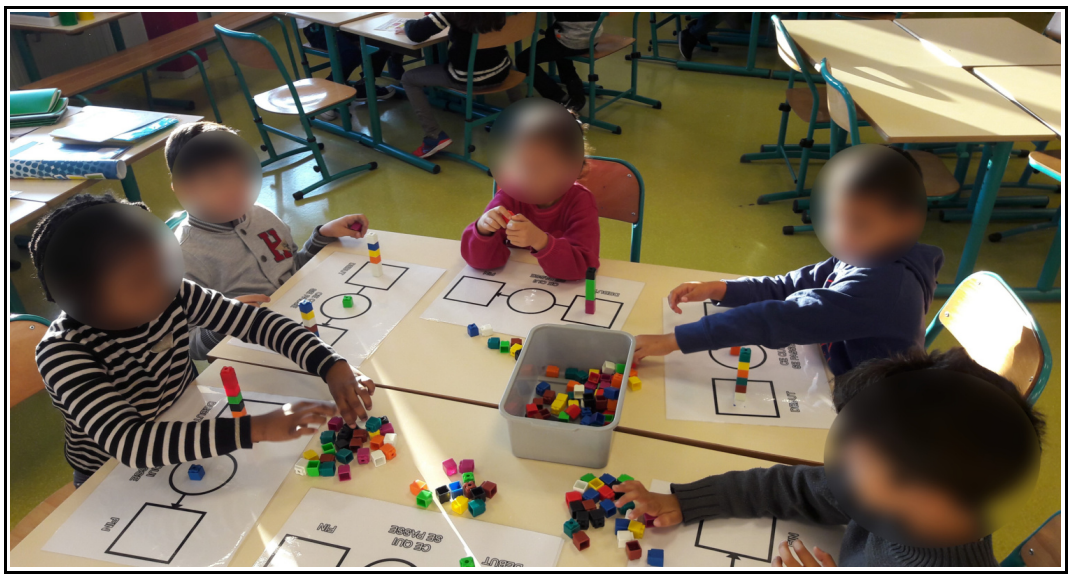
Exemple : *« J'ai 12 crayons, combien ai-je de crayons en tout ? »* Cet exemple peut bloquer certains élèves, car le Tout n'est pas explicitement nommé bien que 12 soit la quantité stable visible. Il faut donc, tout au long des cycles, travailler ce concept de « Tout » pour en affiner la compréhension.

Nous avons délibérément fait le choix de débuter notre étude de ces types de problèmes au CP par une signification explicite du tout, puis par une introduction progressive d'implicites au CE1 afin de ne presque plus nommer explicitement un Tout au cycle 3. Au-delà de l'aspect lexical, il en va de la compréhension fine de la situation par l'exploitation des implicites. Le but est de mettre l'élève en situation d'utiliser des stratégies efficaces et de rechercher en mémoire de manière fréquente les connaissances qui lui sont nécessaires.

Conseils : Nous conseillons l'utilisation des schémas comme support physique de manipulation[1] (feuille A3 plastifiée) une fois passée la phase de modélisation et avant d'aborder la phase d'abstraction. Il s'agit d'un retour vers la phase de manipulation initiale mais avec l'adjonction de l'élément modélisant. Les élèves manipulent sur ces schémas avec des cubes ou des jetons (matériel **Lubienska**) en explicitant les procédures. **Il s'agit donc d'un travail langagier d'explicitation et de structuration**. Ils peuvent aussi y écrire avec un feutre, rater, réessayer. Tous les élèves n'en ont pas besoin, mais cela peut aider certains à expliciter petit à petit la stratégie de résolution. Le schéma devient alors une base de manipulation et d'explicitation pour l'élève avec validation par l'enseignant.



1 Figures ci-dessus comme support de l'explicitation et de la manipulation



Élèves de CP en atelier d'explicitation/manipulation. Le schéma comme support de travail langagier et de construction du nombre.

De même, nous conseillons l'utilisation des quantités réduites pour établir les égalités possibles en nommant les parties, une partie et le tout. Il est essentiel de faire établir concrètement les calculs en déplaçant les quantités, en les comparant et en verbalisant ce que l'on fait. La manipulation n'a pas vocation à être uniquement physique, la manipulation des quantités et l'explication des relations est une manipulation mentale effectuée via un support physique. Les petits ateliers d'accueil s'y prêtent très bien. (valable du CP au CM2). Ce travail d'explicitation/manipulation fait l'objet d'un apprentissage. Nous pensons essentiel le fait de systématiser l'écriture des multiples égalités. La soustraction ne doit pas être vue comme un frein alors qu'elle peut être la solution de résolution experte.

5 +… = 8 8 -… = 5 8 —5 =…

Nous jugeons primordial de rappeler qu'une addition à trou implique une soustraction qui sera elle-même vérifiée par l'addition. Le fait de poser les deux possibilités permet une vérification par l'élève et une systématisation de la démarche de rétrocontrôle. L'étude parallèle de l'addition et de la soustraction prend alors tout son sens. Il s'agit également de remobiliser les connaissances sur les compléments.

Exemple : *« Je trouve que 8-5=3 alors je vais vérifier sa réciproque 5+3=8. Les deux opérations se complètent, mon calcul est juste. »*

❄ Addition à trou ?

… + 2 = 6

❄ Soustraction !

6 - 2 = …

❄ Soustraction à trou ?

6 - … = 4

❄ Soustraction !

6 - 4 = …

❄ Soustraction à trou ?

… - 2 = 4

❄ Addition !

4 + 2 = …

Autre exemple : Si les élèves ne savent pas encore résoudre une soustraction par le calcul posé mais qu'ils sont face à des nombres relativement « grands », il convient de construire avec eux des stratégies efficaces.

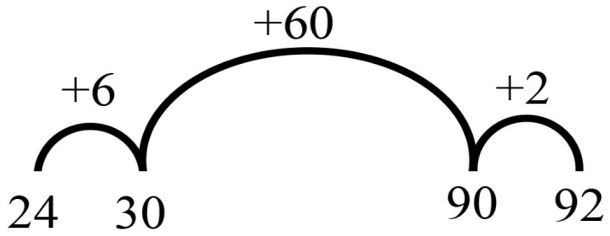
Attention, cette efficacité est relative. Une stratégie est efficace à un moment donné selon le socle de connaissances et d'habiletés de l'élève. Cette même stratégie a pour but de devenir obsolète par migration vers la stratégie experte. Chaque stratégie est donc **efficace à** un moment donné, mais il faut viser progressivement l'acquisition de la stratégie experte à la fois efficace et peu coûteuse cognitivement. Voici une stratégie observée pour le problème suivant :

« Il y a 92 ballons dans la réserve de l'école. 24 sont des ballons de football. **Combien y a-t-il de balles de Basket-ball ?** »

Après avoir complété leur schéma, les élèves savent quels sont les calculs envisageables. Ils savent qu'ils peuvent écrire les égalités suivantes :

24 +… = 92 ou 92 —24 =…

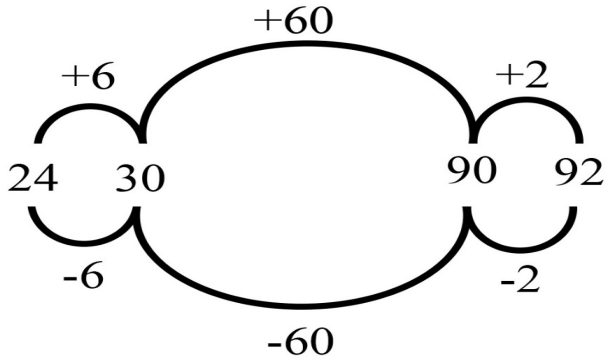
Nous présentons ici une stratégie relativement efficace dans la mesure où les élèves ne peuvent résoudre par le calcul posé. Les élèves cherchent ce qu'il manque pour compléter de 24 à 92 ou l'inverse de 92 vers 24. Le but est de verbaliser rapidement les demandes d'outils et de présenter de manière **explicite** ce qui fonctionne, ce qui ne fonctionne pas et donc ce qui est hautement efficace ou inefficace.



L'élève trouve donc ici que 24 + **68** (60 + 6 + 2) = 92

Mais comme nous le préconisons, il faut aussi s'attarder sur le fait que le chemin inverse est possible et réalisable en parallèle pour aller de 92 vers 24.

L'élève trouve donc ici que 92 —**68** (- 60 —6 -2) = 24



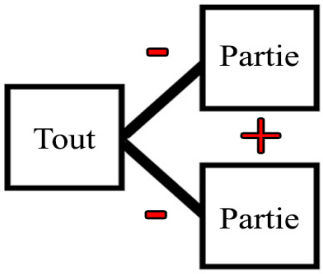
Il est également possible de mobiliser d'autres stratégies de calcul mental. L'élève peut compléter avec le nombre de dizaines manquant : 24 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 94 et 94 —2 = 92 soit 24 + (70 —2) = 92

Les stratégies doivent être explicitées, montrées et utilisées pour en dégager la plus grande efficacité. Le choix de l'efficacité se fait par utilisation et comparaison de techniques, il est donc essentiel de verbaliser systématiquement (par l'enseignant et l'élève) le raisonnement et les procédures de résolution.

Schéma bilan explicatif pouvant servir de support pour les enseignants et les élèves.

Ce schéma, comme ceux des autres familles, est présent en affichage et construit par chaque élève.

Partie - Partie - Tout



Partie + Partie = Tout
Tout - Partie = Partie

— Si je connais les parties d'un ensemble, elles forment le tout.

Partie 1 + Partie 2 = Tout.

— Si je connais le tout et une partie, je peux faire une addition à trou pour compléter, mais je vois aussi clairement sur le schéma que si j'ôte une partie il reste l'autre. Je peux en plus vérifier par l'addition si mon résultat est juste.

Tout —Partie 1 = Partie 2 Tout —Partie 2 = Partie 1

Nous faisons cohabiter les 2 visions à chaque fois. Contrairement au document théorique présenté lors de la formation, sur notre modélisation le **Tout** est situé à gauche du schéma et non à droite. Bien que cela ne puisse paraître qu'esthétique de prime abord, cela est au contraire de toute importance pour la suite et traduit une réflexion en amont des comportements possibles de l'élève et des écueils à éviter.

Ainsi, il convient de s'interroger sur la compréhension induite chez un élève suite à la modélisation de ce schéma. Si nous retranchons une partie du Tout, nous effectuons une soustraction comme indiqué sur le schéma bilan. Or, le sens de lecture est de gauche à

droite et un schéma orienté droite / gauche comme sur le modèle initial se concrétiserait par un sens de lecture aberrant faisant soustraire la plus grande quantité de la plus petite.

Chez un élève où la soustraction n'est pas stabilisée l'erreur est alors systématique et risque d'induire des erreurs de conception. L'élève voit qu'il faut soustraire mais le sens de lecture est trompeur et cette représentation induit un conflit cognitif. Il devrait alors systématiquement ré-ordonner les quantités pour avoir un calcul cohérent. Il va de soi qu'une majorité des élèves peut faire ce travail mais pour les plus fragiles, cela ne peut que conduire les enseignants à devoir leur déconstruire une mauvaise compréhension pour reconstruire correctement la notion. Ainsi, pour gagner en efficacité il faut accorder une place toute particulière à l'analyse poussée des sources d'erreurs pour agir en amont.

Notre modèle permet alors d'éviter autant que possible ces sources d'erreur et n'en est que plus « logique ». Le travail d'analyse et de rétrocontrôle est essentiel. L'efficacité procédurale ne peut être entière que si l'explicitation est elle-même efficace.

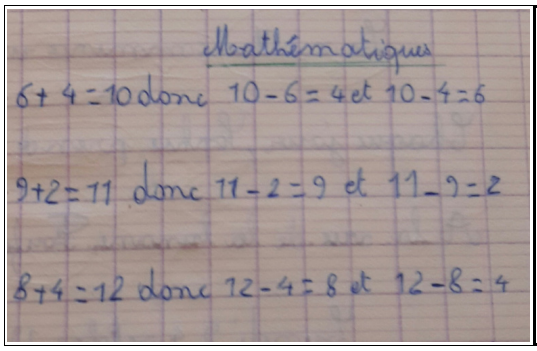
Ce schéma peut être le support d'activités portant sur les compléments. (compléments à 10, 20, etc.) Idem pour les nombres décimaux (partie entière et partie décimale)

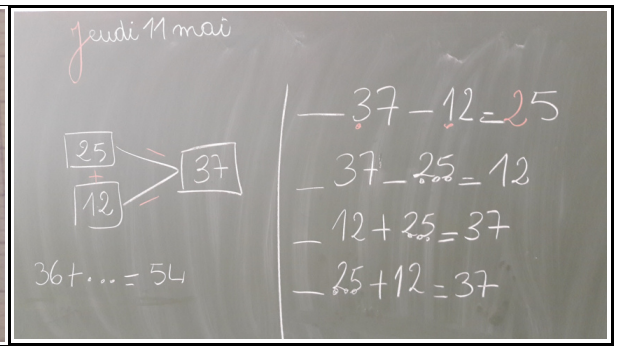
Exemple :

$$4 + 6 = 10 \text{ donc } 10 - 6 = 4 \text{ et } 10 - 4 = 6$$

Le fait de compléter cette triple égalité avec le schéma permet encore une fois de travailler de manière simultanée l'addition et la soustraction, de lier la notion de partie et de complément (les parties complétant le tout).

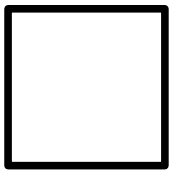
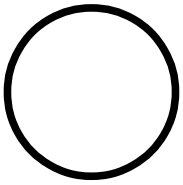
L'avantage est de favoriser la mise en place de stratégies de calcul mental par la systématisation de ce travail de composition / décomposition qui montre en permanence le parallélisme addition / soustraction.





2 - 3 Transformations d'états

Tableau explicatif du codage :

Modélisation	Exemple
	État initial, intermédiaire au final. Le carré représente une structure stable, un élément donné, un fait établi. ($\mathbb{N}$)
	Transformation appliquée à un état donné. La transformation peut être positive ou négative. Le cercle représente une évolution, un changement qui se caractérise par l'écriture du nombre et d'un signe. ($\mathbb{Z}$)

Les transformations d'états correspondent à l'évolution temporelle d'un état quantitatif stable vers un autre état quantitatif stable en subissant une transformation. Cette transformation peut être de nature additive ou soustractive. Nous avons opté pour un codage particulier dans l'élaboration du modèle, support du passage à l'abstraction.

Les carrés représentent un état initial ou final **stable**. Cet état est établi par les **indices** du problème qui sont indiqués ici. Les indices temporels sont une aide précieuse, mais ils peuvent être présents de manière implicite dans un énoncé et découlant d'un seul indice donné. De même, un état peut se découvrir relativement à un autre qui, lui, est indiqué. Il peut donc y avoir un processus déductif à enclencher. Ce processus se traduit alors par la modélisation temporelle cohérente du problème rencontré. Le principe est de pouvoir lire une histoire logique sous forme schématique. Cette logique permet le passage au calcul correspondant.

Ce problème se résout comme une histoire ou il faudrait découvrir le début, la fin ou ce qui s'est passé entre les deux. Il y a une cohérence chronologique à suivre. Il apparaît donc nécessaire d'expliciter le vocabulaire mathématique, de le reprendre, le mémoriser et le faire redire, tout comme l'histoire du problème pour les plus jeunes du cycle 2. La phase de verbalisation est essentiel pour organiser les données et établir les liens de causalité entre elles. Le travail essentiel à mener, pour nous, est un travail langagier intensif d'explicitation des situations et des stratégies.

Le cercle représente le mouvement, le changement, la transformation positive ou négative. Le ciblage se fera donc sur le verbe employé dans la mesure ou il traduirait une action symbolisable.

Il faudra donc garder à l'esprit deux questions : *« Qu'est-ce que je sais ? »* (**La stabilité**) et *« Qu'est-ce qui se passe ? »* (**le mouvement, l'action**). Ce préalable conduit naturellement à *« Qu'est-ce que je cherche ? ».*

En se servant du vocabulaire de la consigne, les élèves sauront rapidement ou positionner les données (mais il faut travailler de manière **explicite et précise le questionnement** pour que cette démarche devienne un réflexe, ce n'est pas inné, surtout si l'inconnue est l'état initial, ou la transformation) pour le faire de manière mentale par la suite. Le schéma physique devient alors progressivement (plus ou moins rapide selon les élèves) inutile par l'entraînement, car il est remplacé par un schéma mental logique. L'organisation logique des données est donc un des leviers principaux de la démarche, car elle conduit les élèves à structurer leurs pensées et donc leur démarche de résolution.[1]

Dans tous les cas, que la transformation soit positive ou négative en recherchant l'état initial ou final, ce schéma donne le sens de lecture de l'histoire. On peut relire en passant le doigt dessus pour s'assurer de la logique de son histoire. Le rétrocontrôle est donc possible durant toute la démarche de résolution.

1 Voir illustration « atelier de manipulation sur schéma avec l'enseignant ».

Tableau synthétique des problèmes de transformations d'états :

Type	Exemple	Modélisation
1	Transformation positive, recherche de l'état final. Max avait 5 billes, il en gagne 3. **Combien en a-t-il maintenant ?**	5 —(+3)→ ?
2	Transformation négative recherche de l'état initial. Tom joue au jeu de l'oie. Il recule de 3 cases et se retrouve sur la case 5. **De quelle case est-il partie ?**	? —(-3)→ 5
3	Transformation négative, recherche de l'état final. Hugo avait 8 bonbons, il en mange 3. **Combien lui en reste-t-il ?**	8 —(-3)→ ?
4	Transformation positive recherche de l'état initial. Lucie vient de recevoir 3 € de sa tante. Elle a maintenant 8 €. **Combien avait-elle avant ?**	? —(+3)→ 8
5	Transformation d'une mesure : recherche de la transformation positive Léo avait 3 billes avant de jouer. Il a maintenant 8 billes. **Combien de billes a-t-il gagnées ?**	3 —(+?)→ 8
6	Transformation d'une mesure : recherche de la transformation négative Léo a 3 billes. Avant de jouer, il en avait 8. **Combien a-t-il perdu de billes ?**	8 —(-?)→ 3

Transformations

Atelier de manipulation sur schéma avec l'enseignant :

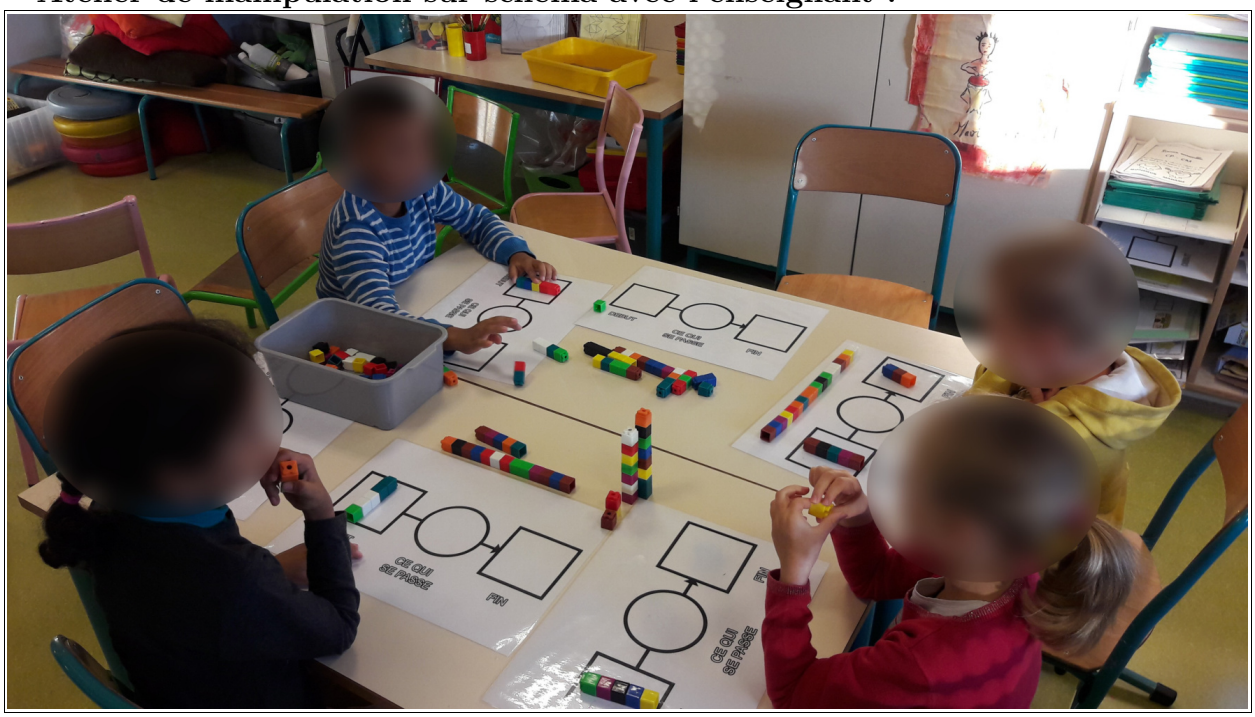
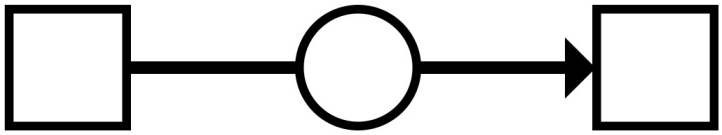


Schéma bilan explicatif avec le modèle de l'enseignant :

Transformation positive ou négative

+			-
	- achèter	- vendre	
	- prendre	- donner	
	- ajouter	- enlèver	
	- gagner	- perdre	



Etat initial	Etat final
- avant	- après
- au début	- à la fin
- ce matin	- ce soir
- etc.	- maintenant

Attention aux écueils suivants :

« Je gagne, c'est plus. Je perds, c'est moins », est une réflexion fréquemment entendue auprès des plus jeunes mais s'il est effectivement exact que dans de nombreux cas cette réflexion soit juste, il convient de ne pas la systématiser car cela est relatif à l'état qui est connu.

Oui, le vocabulaire de l'énoncé peut donner des indices sur la transformation effectuée.

Non, il n'indique en rien de manière certaine la nature de l'opération.

Exemple :

« Je perds 10 euros à midi. Il me reste 20 euros ce soir. ***Combien avais-je d'euros ce matin ?*** *»*

Chronologiquement, j'ignore l'état initial que je vais chercher, mais je connais la transformation négative et l'état final. L'erreur observée est celle-ci :

« Je perds donc c'est moins, je vais donc faire 20-10. J'ai donc 10 euros ce matin »

L'élève n'a pas respecté la structure logique des changements d'états. En négligeant la modélisation il se concentre sur le calcul qui ne retranscrit pas le déroulement logique. La modélisation revêt alors tout son intérêt, car la construction du schéma logique indique que, bien que la transformation soit négative, l'opération adéquate est une addition. Le schéma nous indique « … – 10 = 20 ». Autrement dit, si nous lisons l'histoire dans le sens chronologiquement inverse, nous obtenons : « 20+10=… ». Cette soustraction incomplète se résout par l'établissement d'une addition.

Pourquoi ?

Reprenons : *« Je perds 10 et il me reste 20. Combien avais-je au départ ? »*

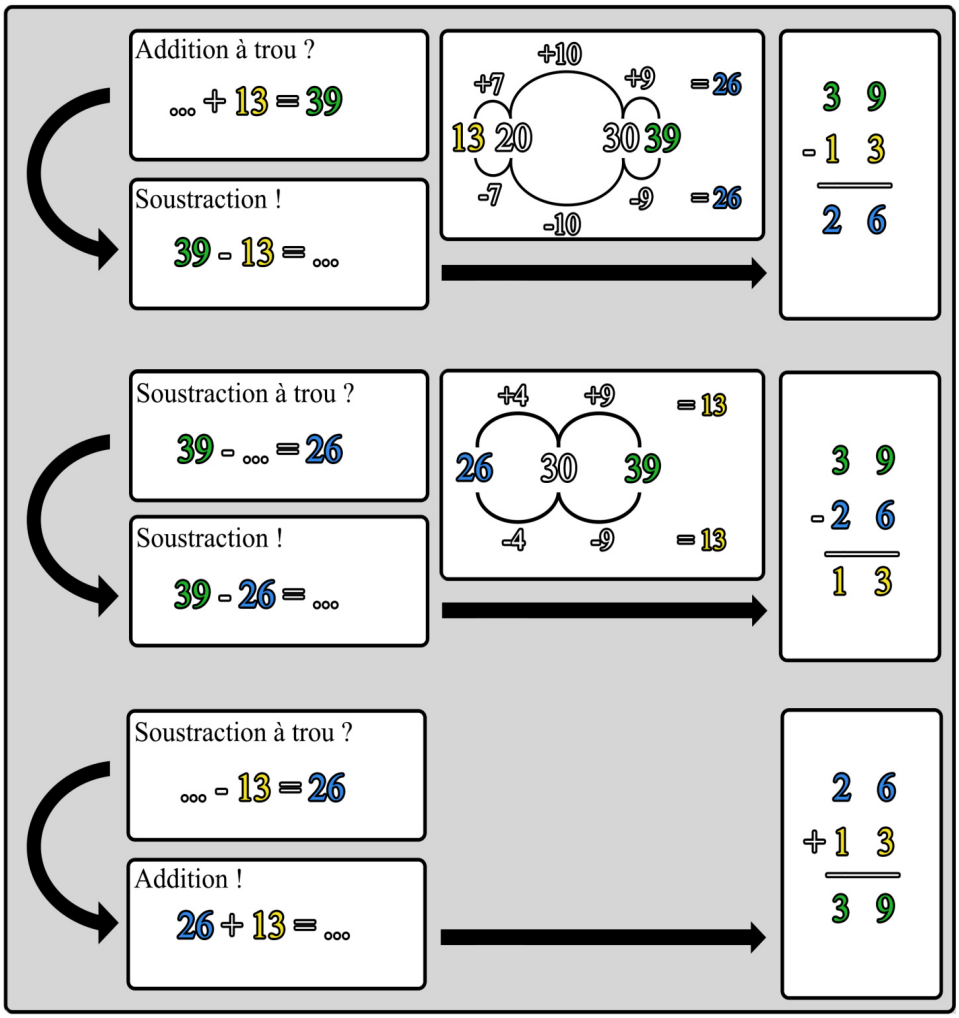
Questionnement : **Au départ, avais-je plus ou moins d'argent ? Avant de perdre, avais-je plus ou moins ?**

Réponse : avant la perte j'avais plus d'argent, donc je vais additionner pour retrouver cette quantité plus grande. Je vais reprendre ma perte et l'additionner avec mon reste. Une addition est donc utilisée pour résoudre une soustraction dont le premier terme est manquant. Il est essentiel de systématiser un questionnement sur la quantité recherchée : est-elle plus importante ? Qu'est-ce que cela implique ? Il faut donc expliciter le raisonnement qui devra être systématisé. Cela revient à automatiser un questionnement structurant pour avancer dans la résolution.

Nous en revenons encore une fois au fait que le traitement de l'addition et de la soustraction se doit d'être réalisé en parallèle pour éviter de construire unilatéralement le nombre et vérifier d'un côté de l'égalité ce que je trouve de l'autre. Cela nous guide à faire établir des outils méthodologiques et mnémotechniques par les élèves afin qu'ils puissent réagir dans une situation donnée ou s'adapter plus facilement face à une situation inconnue. Face à une addition à trou, l'élève sait que la procédure de résolution efficace est la soustraction. (Sauf cas ou les données numériques permettent une résolution mentale rapide.)

Sur la page suivante nous proposons une aide méthodologique construite par et pour les élèves afin de systématiser les procédures de résolution. Cette aide permet, dans la mesure

où l'élève a construit un modèle temporellement exact, de valider l'opération correspondante. L'élève, quelle que soit la situation, dispose donc d'une procédure de calcul et d'une procédure de vérification de ce calcul. Les 2 procédures permettent de lier parallèlement et systématiquement l'aspect additif et soustractif d'une équation. C'est la rencontre répétée de ces situations qui va automatiser la résolution et permettre un *« jonglage »* de l'addition vers la soustraction et vice-versa par les élèves.

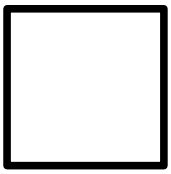
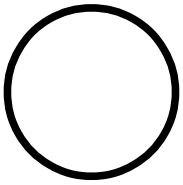


Quand je rencontre un calcul à trou, je peux compléter jusqu'au résultat comme sur le modèle. Je vais alors chercher ce qui manque petit à petit.

Mais je peux aussi poser le bon calcul! Le modèle nous montre ce que nous pouvons faire dans cette situation.

2 - 4 Comparaisons d'états

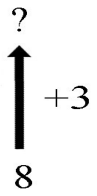
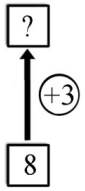
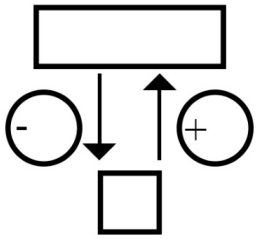
Tableau explicatif du codage :

Modélisation	Exemple
	État initial, intermédiaire au final. Le carré représente une structure stable, un élément donné, un fait établi. ($\mathbb{N}$)
	Relation appliquée à un état donné. La relation peut être positive ou négative. Le cercle représente le lien entre deux éléments par l'écriture du nombre et d'un signe. ($\mathbb{Z}$)

Selon la typologie de **G. VERGNAUD** présentée dans le document suivant, une comparaison est symbolisée par le passage (flèche) d'un état à un autre sans que la notion même de *« différence »* n'entre en jeu de manière **explicite** mais en faisant varier le positionnement des quantités (exemple : petite quantité en haut ou en bas). La difficulté induite est alors que la transition est identique qu'elle aille vers une grande ou une petite quantité.

Modélisation unidirectionnelle de la comparaison :

Comparaison de mesures : recherche du référé Lise a 8 billes . Léa a 3 billes de plus que Lise. Combien Léa a-t-elle de billes ?	? ↑ +3 8
Comparaison de mesures : recherche du référé Charlotte a 8 billes. Nina a 3 billes de moins que Charlotte. Combien Nina a-t-elle de billes ?	? ↑ -3 8
Comparaison de mesures : recherche de la comparaison positive Muriel a 8 billes. Sarah en a 3. Combien de billes Muriel a-t-elle de plus ?	8 ↑ ? 3
Comparaison de mesures : recherche de la comparaison négative Muriel a 3 billes. Sarah en a 8. Combien de billes Muriel a-t-elle de moins ?	3 ↑ ? 8

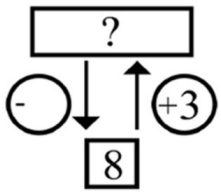
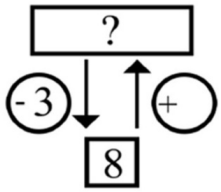
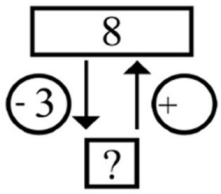
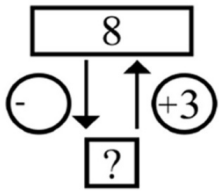
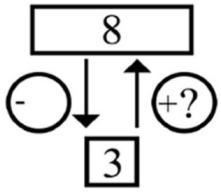
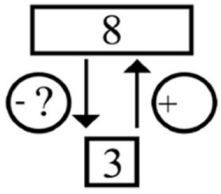
Principe théorique	Adaptation utilisée dans plusieurs ouvrages	Adaptation proposée par l'auteur
		

Ici, nous comparons 2 quantités (2 mesures) et bien que la flèche indique le passage de l'une à l'autre, le sens « unique » risque de laisser penser aux élèves que *« c'est toujours plus que »*. De même, imaginons que le passage d'un état de référence à un autre soit négatif, le sens indiqué par la flèche reste le même. Confronté à cette représentation théorique l'élève remarque que, de part la nature verticale de la représentation, *« ça monte »* que le signe soit positif ou négatif d'où une certaine contradiction logique. De même, en respectant ce codage, il n'apparaît pas *« logique »* pour un élève de positionner la plus petite mesure en haut du schéma car cela va à l'encontre de leurs conceptions naturelles. De plus, sans proposer ce modèle à un élève (car c'est un modèle structurel théorique et on pourrait objecter que cette représentation est pour les enseignants), le risque serait que l'enseignant valide ou propose d'autres modélisations basées sur cette représentation (car elle aussi est donnée comme valide) en ne voyant pas l'écueil initial. Quel que soit le destinataire de ce modèle, il semblait plus judicieux de modifier cette représentation pour la rendre plus logique afin que l'enseignant puisse s'en emparer en visualisant immédiatement tous les concepts en jeu.

Ainsi la logique sous-jacente n'était pas explicite pour la majorité des élèves. Pour eux, ce schéma représentait la même chose que pour les transformations et ils ne comprenaient donc pas le principe de comparaison et n'envisageaient même pas le principe de différence entre deux états et que cette différence pouvait être à la fois positive ou négative selon le point de vue. Ils se perdaient avec les *« plus que »* et *« moins que »*.

L'auteur a donc réalisé une adaptation personnelle avec des « états » comparés **Grands** et **petits** (dérivation du concept Partie-partie-tout) en incorporant de manière **explicite** la notion de différence et le parallélisme entre addition et soustraction. La comparaison n'étant pas unidirectionnelle mais parallèle selon le point de vue. Les problèmes arithmétiques qui composent les problèmes de comparaison sont modélisés selon cette approche dans le document ci-après. En complément, une modélisation en barre est proposée pour lier l'aspect « traduction de texte » et « articulation des quantités ».

Tableau synthétique des problèmes de comparaison d'états :

Type	Exemple	Modélisation	
1	Comparaison d'une mesure : recherche du référé. Alan a 8 billes. Ben a 3 billes de plus qu'Alan. **Combien de billes a Ben ?**		Comparaisons
2	Comparaison d'une mesure : recherche du référent. Alan a 8 billes. Il a 3 billes de moins que Ben. **Combien de billes a Ben ?**		
3	Comparaison d'une mesure : recherche du référé. Alan a 8 billes. Ben en a 3 de moins qu'Alan. **Combien de billes a Ben ?**		
4	Comparaison d'une mesure : recherche du référent. Alan a 8 billes. Il a 3 billes de plus que Ben. **Combien de billes a Ben ?**		
5	Comparaison d'une mesure : recherche de la comparaison positive. Alan a 8 billes. Ben en a 3. **Combien de billes en plus a Alan ?**		
6	Comparaison d'une mesure : recherche de la comparaison négative Alan a 8 billes. Ben en a 3. **Combien de billes en moins a Ben ?**		

Exemple : Je dois d'abord savoir si je connais la petite quantité (ou mesure) ou la grande quantité (ou mesure). Je place ensuite logiquement mes données. Le positionnement de l'une et l'autre est relatif. La difficulté est donc d'agencer les éléments entre eux et il faut donc enseigner aux élèves comment repérer les éléments pertinents et comment les disposer. De proche en proche le modèle va se construire.

Puis, pour aller du petit au grand, j'ajoute donc c'est + (même si le problème dit « moins que »). Pour aller du grand au petit, je retire, donc c'est – (même si le problème dit « plus que »). La « différence » est complétée des 2 cotés du modèle. Le « moins que » et le « plus que » sont relatifs à la mesure ou quantité comparée.

Ce dernier schéma regroupe les 2 visions de la comparaison « plus que » et « moins que » afin de voir que la **différence** est un nombre donné et que seul le signe (+, -) change. Le passage par le côté positif implique une notion de croissance, par le côté négatif c'est la notion de décroissance. Ces passages se conçoivent d'autant mieux que le parallélisme est systématiquement présent. Le rétrocontrôle est encore une fois possible en faisant automatiquement vérifier par le calcul complémentaire.

Exemple : *« Je suis plus grand de 10 cm que David mais David est aussi plus petit de 10 cm que moi. »* 10 est fixe, c'est une quantité relative, exprimée par rapport à un état de référence. Seul son signe change selon le point de vue pour qualifier cette donnée.

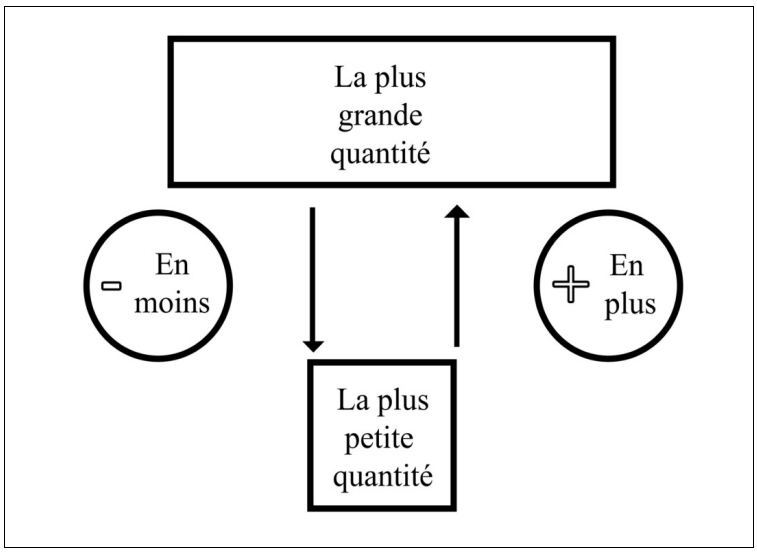
Les élèves peuvent donc compléter dans un sens puis dans l'autre avec le signe opposé. Ils commencent dans le sens qui leur paraît le plus logique, puis complètent en parallèle. Cela limite le nombre d'erreurs. L'intérêt, encore une fois, est d'avoir en parallèle les deux sens de calcul. La difficulté observée est dans le repérage explicite des quantités de l'énoncé (exemple : des pommes) au lieu des nombres de l'énoncé. *« 10 pommes de moins »* n'est pas la petite quantité de pommes et des élèves se focalisent sur la donnée numérique est faisant abstraction de l'unité qui la caractérise. Le calcul peut être juste, il y a une profonde erreur de compréhension des relations en jeu dans le problème.

Résumé pour les élèves :

Je sais qui est le plus grand et donc par réciprocité qui est le plus petit (ou alors je sais que je cherche le plus petit).

Pour aller du « petit » au « grand », j'ajoute alors c'est plus (attention à l'addition à trou).

Pour aller du « grand » au « petit », j'enlève alors c'est moins.



Ils peuvent aussi vérifier si le calcul est correct dans les 2 sens en posant la double égalité. Il s'agit encore une fois de systématiser le rétrocontrôle des calculs et de donner aux élèves des outils permettant de consolider leur démarche et de la vérifier. Cette vérification est un contrôle de la compréhension de l'énoncé, de sa validité logique.

Encore une fois, après utilisation efficace du modèle, si l'élève se retrouve face à une situation où les données connues sont les quantités ou valeurs comparées et où la différence est à chercher, la structure même du modèle représentera concrètement le calcul en jeu.

Exemple :

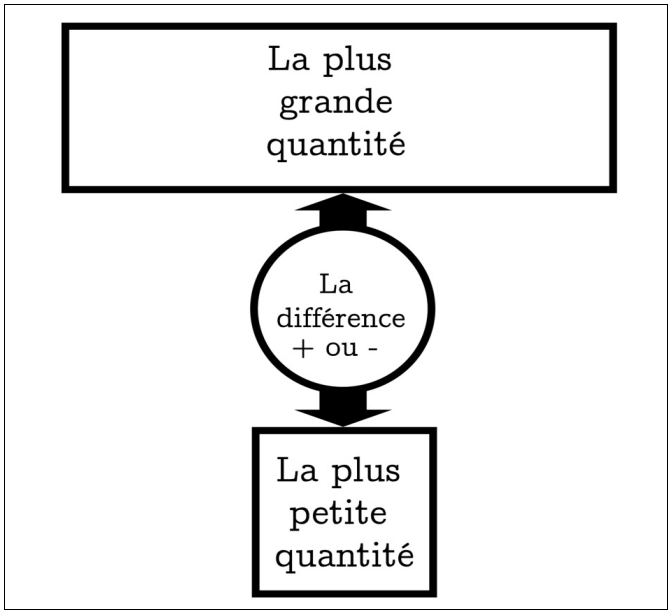
« Jean à 25 euros et Jacques 15 euros. Combien Jean a-t-il de plus que Jacques ? »

Le modèle nous proposera deux mises en équation :

15 +… = 25

25 -… = 15

Ces deux cas se traitant, selon notre affichage méthodologique, par une soustraction.



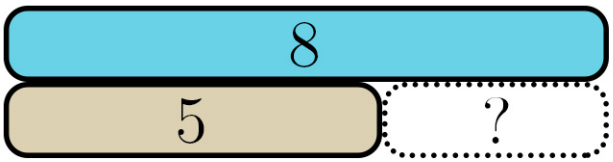
Cette autre modélisation est une fusion des éléments disjoints de la modélisation précédente. Le cercle central est la différence entre les deux états, à la fois positive ou négative selon le référent. Elle reprend la structure de la transformation d'états, mais sa verticalité induit une non-évolution temporelle.

C'est ce que les élèves nomment « l'ascenseur », allant de bas en haut et de haut en bas, la différence étant la navette qui circule d'un état à l'autre. La différence portera le signe correspondant à l'énoncé du problème arithmétique.

L'intérêt de ce modèle, à nos yeux, est de permettre la superposition de représentations d'états (2 bonhommes, un petit et un grand ; deux ou plusieurs éléments comparés) sur le schéma pour utiliser sa structure. Encore une fois, c'est l'utilisation, et les résultats obtenus selon les modèles, qui nous guide empiriquement vers la plus grande efficacité. Ce modèle permet une approche simple et guidante pour traduire l'énoncé et travailler la compréhension globale tout comme la nature des éléments. Ce modèle se complète aisément avec un modèle en barre qui cible plus spécifiquement l'aspect calculatoire.

Ci-dessous un exemple de modélisation avec des barres pour organiser les quantités entre elles et symboliser la différence qui est l'élément manquant :

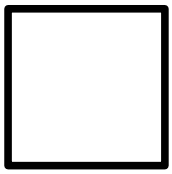
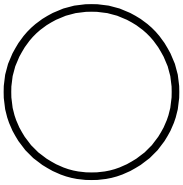
« Alban a 8 euros et Basile en a 5. Combien Alban a-t-il d'euros de plus ? »



Les deux modélisations se complètent pour étudier la structure, rendre visible ce qui se joue dans l'énoncé et montrer l'articulation logique entre les quantités.

2 - 5 Compositions de transformations

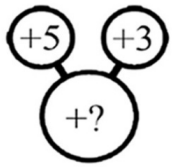
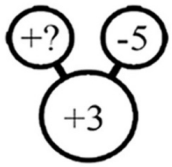
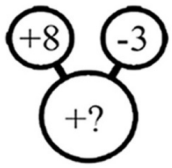
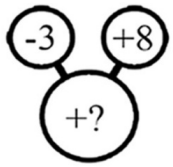
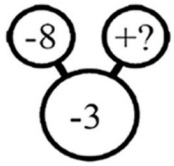
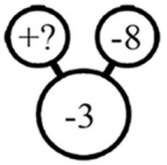
Tableau explicatif du codage :

Modélisation	Exemple
	État initial, intermédiaire au final. Le carré représente une structure stable, un élément donné, un fait établi. ($\mathbb{N}$)
	Transformation appliquée à un état donné. La transformation peut être positive ou négative. Le cercle représente le lien entre deux éléments par l'écriture du nombre et d'un signe. ($\mathbb{Z}$)

Les 6 types de compositions de transformations qui sont présentés dans le document de la page suivante sont les types principaux étudiés entre le cycle 2 et le cycle 3. À ces 6 types, d'autres parmi les multiples itérations de ce modèle peuvent être ajoutés ponctuellement pour travailler la structure et surtout pour l'associer à d'autres types de problèmes (fusion de plusieurs modèles dans un problème complexe). Nous avons préalablement détaillé tous les types existants pour ce genre de problème.

Les compositions de transformations sont comme leur nom l'indique des assemblages de transformations d'états. En retirant les états initiaux et finaux, les multiples transformations vont pouvoir être condensées en une transformation globale dont elles sont les « parties actives ». La composition de transformation peut être vue comme la version « $\mathbb{Z}$ » des compositions d'états qui sont « $\mathbb{N}$ ». Le nombre de transformations n'est pas limité même si, pour débuter, le schéma choisi n'en considère que deux. La difficulté est de se passer des états de référence et de se focaliser sur l'aspect relatif des « transformations ». C'est cette difficulté de conceptualisation qu'il faut avoir à l'esprit pour enseigner des stratégies de résolution qui peuvent faire intervenir, pour mieux en saisir le sens, des états initiaux ou finaux arbitraires. Il s'agit donc de proposer à l'élève, selon la situation, de faire intervenir un état qui va l'aider à percevoir la situation avant de se recentrer sur la structure arithmétique.

Tableau synthétique des problèmes de composition de transformations :

Type	Exemple	Modélisation	
1	Composition de deux transformations : recherche de la transformation composée Axel a joué deux parties de billes. A la première, il a gagné 5 billes et à la seconde, il en a gagné 3. **Combien de billes a-t-il gagnées en tout ?**		Composition de transformations
2	Composition de deux transformations : recherche d'une composante Bruno joue deux fois aux billes. Au second jeu, il perd 5 billes. Après les deux jeux, il a gagné 3 billes. **Combien de billes a-t-il gagnées au premier jeu ?**		
3	Composition de deux transformations recherche de la transformation composée Bill a joué deux parties. A la première, il a gagné 8 billes et à la deuxième, il en a perdu 3. **Combien de billes a-t-il gagnées en tout ?**		
4	Composition de deux transformations : recherche de la transformation composée John a joué deux parties. A la première, il a perdu 3 billes et à la seconde, il en a gagné 8. **Combien de billes a-t-il gagnées en tout ?**		
5	Composition de deux transformations : recherche d'une composante Rachel a joué deux parties de billes. A la première, elle a perdu 8 billes. Elle a perdu en tout 3 billes. **Combien de billes a-t-elle gagnées à la deuxième ?**		
6	Composition de deux transformations : recherche d'une composante Axel a joué deux parties de billes. A la deuxième, il en a perdu 8. En tout, il a perdu 3 billes. **Combien de billes a-t-il gagnées à la première partie ?**		

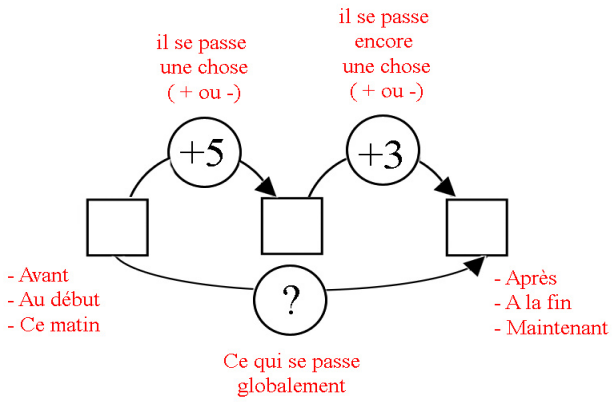
Les compositions de transformations peuvent s'appréhender de deux manières distinctes. Soit il y a focalisation sur la succession des transformations dans la mesure où l'un des états est connu, et de proche en proche la résolution s'opère. Cela correspond à une fusion des modèles « Transformation de mesures » et « Composition de transformation ».

Soit il y a focalisation sur la partie composition avec recherche de la composition globale. La connaissance de cette composition globale est pertinente si les états ne sont pas signifiés ou s'ils sont signifiés tardivement. Chacune des transformations se traduit par l'établissement d'un état intermédiaire migrant vers un état final si un état normé est proposé. Dans les problèmes de ce type nous ne connaissons, a priori, pas l'état initial, ni intermédiaire ni final. Nous cherchons seulement la transformation globale ou l'une de ses composantes. Nous pouvons néanmoins ajouter par la suite les stades initiaux où finaux pour ajouter des étapes où complexifier le problème de base (mais cela peut avoir un effet simplificateur pour comprendre plus profondément le rôle des multiples transformations) tout dépend de ce qui est visé. L'ajout des états « implicites » peut être une aide pour scinder la procédure de résolution en unités hiérarchisées et facilité un raisonnement séquentiel.

Il convient de faire preuve de vigilance concernant le vocabulaire du problème pour noter ce que l'on sait. Comme pour chaque problème rencontré, il est nécessaire de se questionner pour le modéliser et passer à la phase d'abstraction.

« Est-ce que je connais l'état initial ? L'état final ? Ce qui se passe la première fois ? La seconde fois ?, Etc. » Il y a encore une fois un questionnement très important sur le rôle des verbes et des indices lexicaux pour articuler les éléments. Et cette articulation est également temporelle, car les transformations sont progressives.

Voilà le schéma type issu du document initial après une remise en forme :



Les carrés représentent un état initial, intermédiaire ou final. Cette structure est déjà connue des élèves via les problèmes de transformations déjà abordés. Il ne s'agit ici pour eux que *« d'une histoire plus longue »*. Le cercle représente le changement, la transformation positive ou négative. En se servant du vocabulaire de la consigne, les élèves pourront immédiatement positionner les données. **Une question supplémentaire** du problème peut permettre d'ajouter une donnée (Un des états par exemple).

Exemple : Je donne l'état final en connaissant toutes les transformations intermédiaires.

« Axel a joué deux parties de billes. À la première, il en a gagné 5 et à la seconde, il en a gagné 3. ***Combien en a-t-il gagné en tout ?*** *(transformation globale)* ***S'il a 25 billes maintenant, combien en avait-il ce matin ?*** *(recherche de l'état initial) »*

Il faudra trouver la transformation globale dans un premier temps puis l'état initial comme dans un problème de transformation simple. Dans tous les cas, que la transformation soit positive ou négative en recherchant l'état initial ou final, ce schéma donne le sens de lecture de l'histoire. On peut relire en passant le doigt dessus pour s'assurer de la logique de son histoire. La difficulté restera toujours l'organisation des éléments et il faudra toujours veiller à faire repérer les actions et comment elles sont liées pour modéliser.

Difficultés rencontrées :

– Bien identifier ce qui se passe (transformations) et ne pas les confondre avec un état stable. Il est parfois très déstabilisant pour un élève de se centrer sur les transformations sans connaître l'état initial. Le fait de ne pas connaître le « départ » peut accaparer l'attention des élèves, comme si découvrir une action globale était impossible sans connaître au moins un des états (il s'agit pourtant d'une situation assez commune mais très implicite). Il faut donc apprendre à cibler les informations, à se focaliser sur les informations utiles au problème (ici les informations grammaticales, pas numériques), à voir au-delà de la surface pour se concentrer sur la structure.

– Type 4 et Type 5 où la première transformation est une soustraction surtout sans connaître l'état initial. Certains élèves utilisent une valeur initiale imaginaire pour simplifier le calcul, puis l'effacent. D'autres inversent les événements en plaçant l'addition d'abord car quel que soit l'ordonnancement temporel des gains et des pertes, la transformation globale reste inchangée.

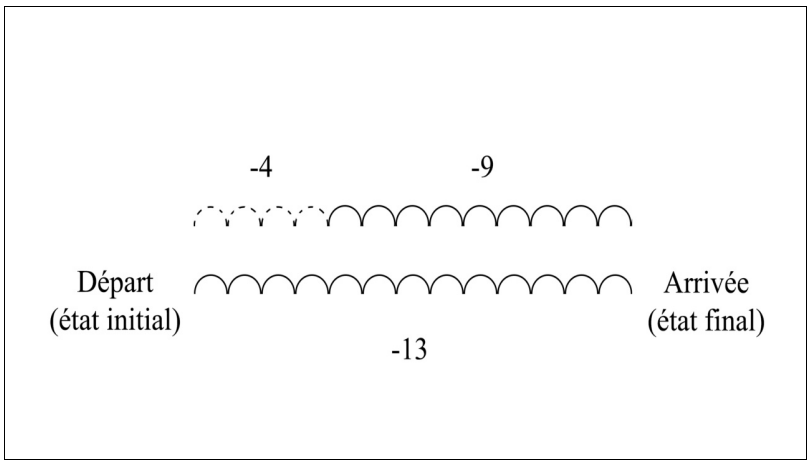
Aides méthodologiques possibles pour la résolution :

Le principe du saut de puce peut compléter la démarche pour modéliser d'une façon différente.

Exemple :

« Une puce se déplace en 2 fois. Lors de son second déplacement elle recule de 9 sauts. Je remarque qu'elle a reculé globalement de 13 sauts lors des 2 déplacements consécutifs.

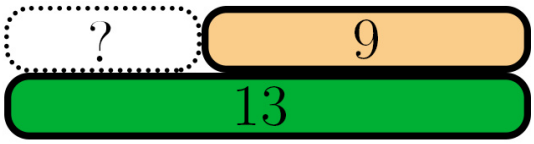
De combien de sauts a-t-elle reculés lors du premier déplacement ? »



- Je représente les 13 sauts en arrière (signe -).
- Je superpose les 9 sauts en arrière que je connais. (signe -)
- Je complète le vide. (je trouve – 4)

Je peux agir de la sorte quels que soient les signes (+ ou -). Je représente juste les transformations en valeur absolu, que je superpose afin de trouver l'information manquante (via le calcul).

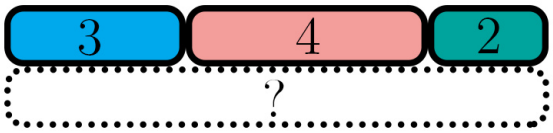
Nous remarquons (et faisons remarquer) que ce schéma n'est qu'une déclinaison de la représentation « <u>partie-partie-tout</u> »… qui peut se modéliser ainsi :



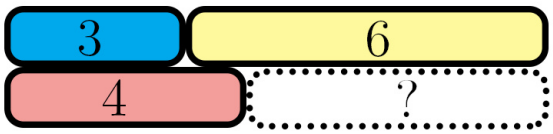
Dans cette situation, les barrettes de cubes sont très utiles pour représenter la situation lors de la phase de Modélisation / Verbalisation. Toutes ces représentations ont un habillage différent mais la différence n'est qu'esthétique, car le fond structurel est le même. Dans les cas simples avec deux transformations de même signe opératoire, c'est une aide précieuse. Plus le nombre de transformations augmente, plus la difficulté de modélisation augmente, allant de pair avec la possibilité de voir cohabiter plusieurs signes opératoires. Dans ce cas, cette modélisation peut devenir lourde à manipuler, d'autant plus s'il y a des transformations additives et négatives.

Quelques exemples :

« Une puce se déplace en 3 fois. Elle avance de 3 sauts, avance ensuite de 4 sauts et enfin de 2 sauts. ***Combien de sauts a-t-elle effectués en tout ?*** *»*



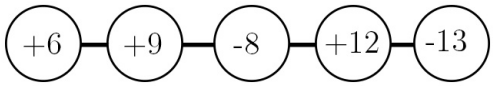
« Une puce se déplace en 3 fois. Elle avance de 3 sauts, avance ensuite de 6 sauts mais recule ensuite de 4 sauts. ***De combien de sauts a-t-elle avancé globalement ?*** *»*



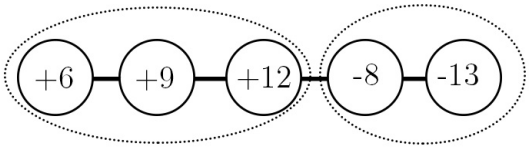
Pour faciliter la modélisation de situations analogues, l'expérience nous amène à organiser les quantités en 2 ensembles : les gains et les perte en valeur absolue. Ici l'élève recherche la différence entre un « gain de 9 » et une « perte de 4 » L'inconnue est la différence entre les gains et les pertes. Cela peut poser une difficulté si les stratégies pour modéliser n'ont pas été enseignées. Cette conceptualisation n'est pas innée, elle est le fruit d'un apprentissage qui se doit d'être régulier. Les données numériques ne doivent pas être un frein à la compréhension sinon il y a cumul de 2 difficultés : le concept structurel et les grandeurs. Cette modélisation très progressive peut se faire avec un outil très simple comme les réglettes cuisenaires.

« Une puce se déplace en plusieurs fois. Elle avance de 6 sauts, avance ensuite de 9 sauts mais recule de 8 sauts. Elle avance encore de 12 sauts avant de reculer de 13 sauts. ***De combien de sauts a-t-elle avancé ou reculé ?*** *»*

Une modélisation séquentielle :

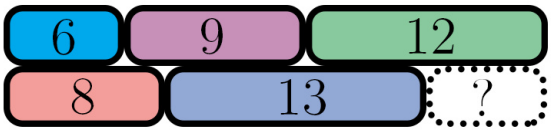


L'approche séquentielle va faire calculer de proche en proche dans un cadre temporel, « D'abord je… puis je… et je…etc ». Attention si la perte est la première transformation, c'est une difficulté à envisager. De même si la seconde transformation est une perte plus importante qu'un gain lors de la première. Il est possible de modéliser séquentiellement mais en groupant gains et pertes en 2 ensembles distincts.



Dans ce cas j'additionne les gains avant de soustraire les pertes. Il y a toujours des limites selon les situations aussi il faudra toujours équilibrer la difficulté proposée, induite par le concept ou par les grandeurs, et la progression de l'élève afin de ne pas le mettre face à un obstacle conceptuel trop élevé.

Une modélisation « gain/perte » :



Le modèle organise les données en deux ensembles « gains/pertes » pour faire apparaître la différence de grandeur entre les deux. Cette différence représente ici un gain plus élevé que les pertes. Ces approches sont autant de possibilités de manipuler en verbalisant les stratégies pour que l'élève puisse intégrer un modèle d'intervention possible.

Autre exemple :

« Une puce se déplace en 2 fois. Lors de son second déplacement elle avance de 9 sauts. Je remarque qu'elle a reculé globalement de 4 sauts lors des 2 déplacements consécutifs. ***De combien de sauts a-t-elle reculés ou avancés lors du premier déplacement ?*** *»*

Le blocage provient généralement du fait que 2 signes cohabitent. Le déplacement total est négatif alors que le second déplacement est positif.

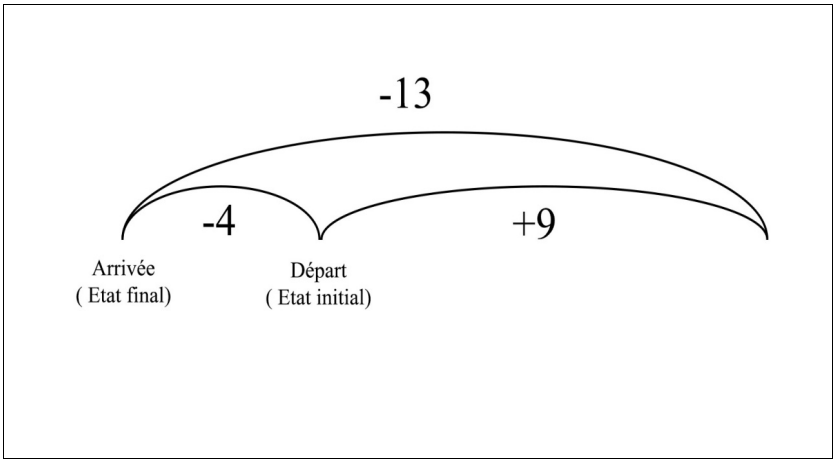
1ère procédure : Il n'est pas interdit d'inverser le déroulement pour faciliter la compréhension. Comme nous connaissons le déplacement global, inverser le 1er et le 2nd déplacement n'a strictement aucune importance sur le résultat. Il faut enseigner à l'élève les stratégies qui sont les moins coûteuses pour appréhender une situation. Le principe est d'éviter de surcharger la mémoire immédiate par trop d'implicites. Dans ces cas particuliers il ne faut jamais hésiter à modéliser et résoudre de très nombreux problèmes pour offrir aux élèves des stratégies efficaces.

Nous avons donc ici une piste de travail sur la gestion des informations et leur traitement par les élèves. Comment puis-je manipuler les informations pour en faciliter la compréhension ? Ils ne doivent pas rester enfermés dans des conceptions inamovibles, les modélisations sont flexibles et adaptables selon les situations en partant d'une base structurée. C'est là que porte le travail : quels petits réglages puis-je apporter à ma structure de base pour l'adapter au problème rencontré. Il faut aussi s'extraire des signes ; nous manipulons ici des quantités, relatives bien sur, mais des quantités. Nous observons donc des relations entre ces quantités que le signe (+ ou -) viendra préciser.

Résultat : Je vais modéliser les déplacements et pour cela je vais me rappeler que je peux choisir arbitrairement un point de départ.

- Je fixe le départ.
- Je représente l'avancée de 9 sauts puisque je la connais et que je peux inverser les Transformations. (+9)
- Je représente le déplacement global entre Départ et Arrivée. (-4)
- Je vois ainsi directement le déplacement manquant qui recoupe les 2.

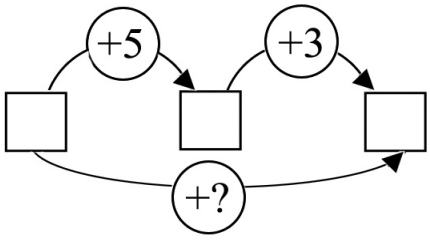
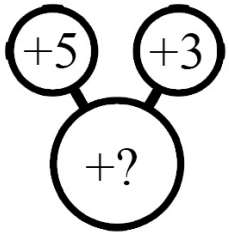
Mon schéma devient alors un schéma Partie – Partie – Tout. (-13)



<u>Évolution du schéma par ciblage des transformations :</u>

Le schéma qui va suivre résulte de la nécessité de limiter les erreurs d'interprétation en se focalisant sur les informations utiles. Le premier schéma présenté, bien que permettant de faire apparaître toutes les données, apporte une surcharge d'informations qui peut empêcher l'élève de structurer efficacement sa procédure de résolution.

Nous avons opté pour un recentrage sur les transformations observées avec une modélisation de type « partie-partie-tout » déjà connue des élèves. Nous pouvons alors traiter le problème comme une transformation d'état simple, si les états initiaux ou finaux sont connus, car la transformation globale est connue.

1ère adaptation utilisée	Adaptation modifiée par l'auteur
	

Dans le modèle ainsi proposé, nous faisons émerger la version *« active »* du schéma *« partie – partie – tout »*. Le premier schéma représente une situation complexe (plusieurs ensembles) alors que le second est une situation simple. Le premier schéma est la fusion du schéma de droite et de celui des transformations. C'est une modélisation complexe.

Nous purgeons le schéma des représentations des états stables (état initial et état final) car le but est ici de se focaliser sur les transformations. Il s'agit d'une composition de transformations alors nous ciblons la modélisation de ces transformations. Nous voyons alors surgir le pendant **« actif »** du schéma de composition d'états.

La transformation globale pourra alors être utilisée de façon pertinente si les états

initiaux ou finaux sont donnés. Cela se traduira a posteriori par la modélisation d'une transformation simple. Dans le cas où le problème n'aborde que la transformation globale, le modèle est suffisant, car le « Tout » de la transformations est visible. Si les états sont donnés, le modèle se transforme immédiatement en celui des transformations d'états.

De plus, la connaissance du modèle de composition d'états par les élèves et le codage employé (carré= stable, cercle= transformation) permet là encore de favoriser l'approche et la mémorisation des structures en évitant une surcharge d'informations non pertinentes. L'approche de ces problèmes se fait alors de manière plus progressive par modélisation d'étapes qui sont toutes simplifiées. Cela nous permet de travailler un point qui peut être extrêmement complexe pour les élèves :

Exemple :

« Je joue deux parties. À la seconde je gagne 3 billes. Globalement j'ai perdu 5 billes. ***Combien de billes ai-je gagnées ou perdues à la première ?*** *»*

Voilà l'exemple type du problème qui « pose problème ». La difficulté est de **s'extraire** des signes opératoires pour ne s'intéresser qu'aux quantités en jeu et de faire établir des règles aux élèves. Le signe se place alors après le calcul, car il n'indique alors que la nature de la transformation. Ce travail sur la **quantité neutre** peut aider à faire disparaître la difficulté posée par l'ordonnancement des signes. Ceux-ci ne viennent qu'ensuite via le travail de compréhension global de la transformation.

Exemple d'aides :

Je cherche la transformation globale :

– Deux transformations de même signe : J'additionne obligatoirement les transformations, j'ajoute le signe après. (J'ai une perte je place un –, j'ai un gain je place un +)

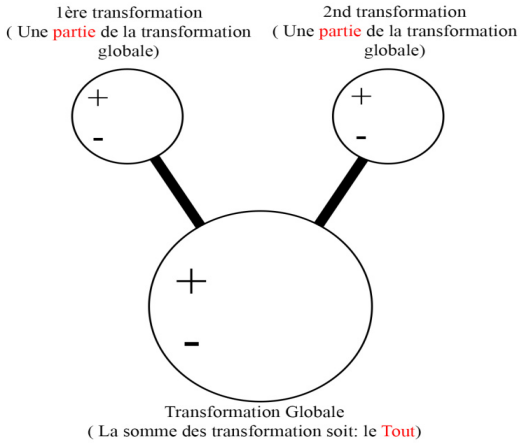
– Une transformation positive et une négative : Je soustrais obligatoirement les transformations, j'ajoute le signe de la plus grande Transformation après. (- ou + selon la grandeur qui l'emporte.) De manière triviale : « Qu'*est-ce qu'il s'est passé le plus ? L'ajout ou la perte ? »*

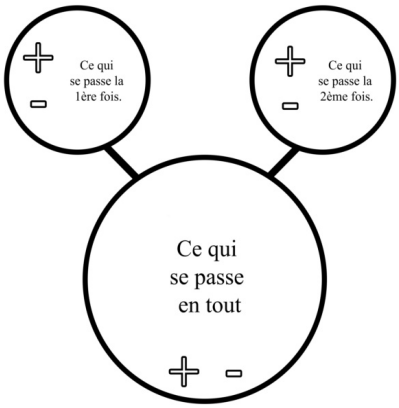
Je cherche une transformation, je connais la globale :

– Deux transformations de même signe : Je soustrais obligatoirement les transformations, j'ajoute le signe de la globale après.

– Deux transformations de signes opposés : J'additionne obligatoirement les transformations, j'ajoute le signe de la globale après.

Proposition de schéma bilan :



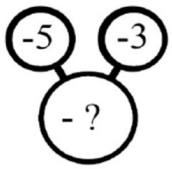
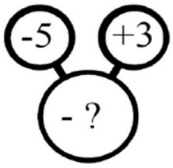
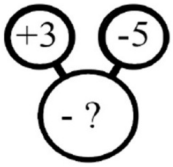
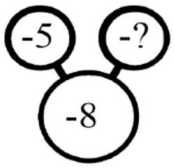
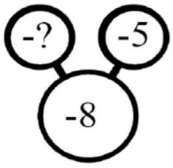
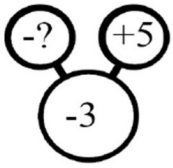


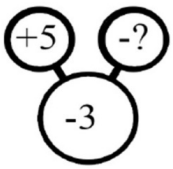
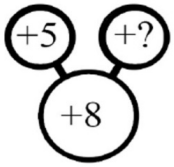
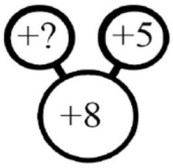
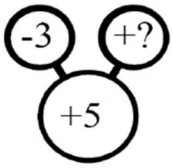
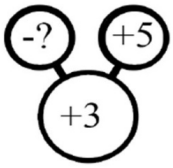
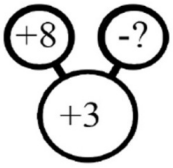
Dans nos fichiers, en inclusion dans les chapitres traitant des types 1 à 18, les types surnuméraires présentés précédemment peuvent être ponctuellement ajoutés. Nous nous attachons alors, comme précédemment noté, à travailler la modélisation des transformations dans un cadre temporel en faisant représenter de manière absolue les transformations afin de faire ressortir par la suite le signe mathématique qui traduira le sens de la transformation.

L'étude des compositions de transformations se fait alors non pas en envisageant une approche séquentielle des types de problèmes (les types les uns après les autres sans variations interne) mais en abordant des groupements de ceux-ci selon les cibles méthodologiques que l'enseignant souhaite aborder. La structure du problème servira de base au travail souhaité : les techniques opératoires ? La compréhension des relations ? Les nombres relatifs ? etc.

Il est donc possible et souhaitable, d'après notre expérience, de traiter dans un chapitre 2 à 3 types distincts liés par une relative homogénéité (exemple : toutes les transformations sont négatives, toutes les transformations sont positives. Dans les 2 cas seul le répertoire additif est concerné car l'accumulation de pertes est la somme de celles-ci avant l'adjonction du signe mathématique traduisant la transformation.) Puis de traiter une plus grande variété de types une fois que la structure a fait l'objet d'une étude explicite et poussée. La structure devient le support de l'explicitation et du travail que voudra cibler l'enseignant. N'oublions pas que nous souhaitons atteindre avec nos élèves des automatismes de raisonnement et de structuration pour améliorer la compréhension globale et dépasser par la suite les premiers automatismes. Cela nécessitera de prime abord des efforts pour la mémoire et nécessitera également un entraînement régulier et intensif. La structure des fichiers (étapes, objectifs clairs, paliers différenciés) permet de rendre ce travail très « attirantt » pour les élèves.

Tableau synthétique des problèmes de composition de transformations :

Type	Exemple	Modélisation	
7	Composition de deux transformations : recherche de la transformation composée Axel a joué deux parties de billes. À la première, il a perdu 5 billes et à la seconde, il a perdu 3 billes. **Combien a-t-il perdu de billes en tout ?**		Composition de transformations
8	Composition de deux transformations : recherche de la transformation composée John a joué deux parties. À la première, il a perdu 5 billes et à la seconde, il en a gagné 3. **Combien a-t-il perdu de billes en tout ?**		
9	Composition de deux transformations : recherche de la transformation composée Bill a joué deux parties. À la première, il a gagné 3 billes et à la deuxième, il en a perdu 5. **Combien a-t-il perdu de billes en tout ?**		
10	Composition de deux transformations : recherche d'une composante Carl a joué deux parties de billes. À la première, il en a perdu 5. Il a globalement perdu 8 billes. **Combien a-t-il perdu de billes à la deuxième partie ?**		
11	Composition de deux transformations : recherche d'une composante Denis a joué deux parties de billes. À la deuxième, il a perdu 5 billes et en tout il perd 8 billes. **Combien a-t-il perdu de billes lors de la première partie ?**		
12	Composition de deux transformations : recherche d'une composante Fabrice a joué deux parties de billes. À la deuxième, il en a gagné 5 et a globalement perdu 3 billes. **Combien a-t-il perdu de billes à la première ?**		

Type	Exemple	Modélisation	
13	Composition de deux transformations : recherche d'une composante Bill a joué deux parties de billes. À la première, il a gagné 5 billes. En tout, il a perdu 3 billes. **Combien a-t-il perdu de billes à la deuxième partie ?**		Composition de transformations
14	Composition de deux transformations : recherche d'une composante Gustave a joué deux parties de billes. À la première, il en a gagné 5 et globalement a gagné 8 billes. **Combien a-t-il gagné de billes à la deuxième ?**		
15	Composition de deux transformations : recherche d'une composante Marc a joué deux parties de billes. À la deuxième, il en a gagné 5 et en tout il en gagne 8. **Combien a-t-il gagné de billes lors de la première ?**		
16	Composition de deux transformations : recherche d'une composante Rachel a joué deux parties de billes. À la première, elle a perdu 3 billes. Elle a gagné en tout 5 billes. **Combien a-t-elle gagné de billes à la deuxième ?**		
17	Composition de deux transformations : recherche d'une composante Tom a joué deux parties de billes. À la deuxième, il en a gagné 5 et globalement gagné 3. **Combien a-t-il perdu de billes à la première ?**		
18	Composition de deux transformations : recherche d'une composante Ben a joué deux parties de billes. À la première, il en a gagné 8 et a globalement gagné 3 billes. **Combien a-t-il perdu de billes à la deuxième ?**		

2 - 6 Composition de relations

À partir d'une grammaire préétablie (carré et cercle) il est possible de reconstruire des catégories plus « exotiques » que nous n'aborderons pas avec nos élèves. Parmi ces catégories, il y a la composition de relations. Il n'y a pas d'états, mais il y a deux relations : une de A vers B et une de ma B vers A. Les compositions de relations ont une structure proche des compositions de transformations ; la relation, où l'état relatif, étant codée dans notre grammaire par un cercle. La structure des compositions de relations est donc visuellement la synthèse des structures de composition d'états et de compositions de transformations. C'est la nature des composantes qui va différer.

Nous utilisons ici des états relatifs (donc par rapport à un état normé qui peut être signifié ou non). Deux relations (ou plus) se composent pour donner un état relatif global.

Ce type de problème ne sera pas formellement abordé au primaire (avec étude structurelle), mais il peut être rencontré fortuitement et joué/manipulé fréquemment par les élèves sans entrer dans le détail. C'est un problème du type *« Je te dois, tu me dois, donc je te dois quoi ? » mais aussi « J'ai plus que…, mais moins que…globalement combien de plus/de moins ? »*

exemple :

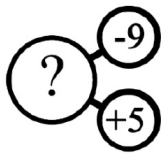
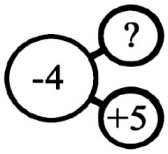
Je te dois 20 € pour le repas, mais tu me dois 5 € pour le parking. **Combien te dois-je réellement ?** »

Je n'ai pas 20 €, ce n'est donc pas un état qui représente une quantité fixe. Je ne donne pas 20 €, ce n'est pas une transformation d'une quantité fixe. Je dois 20 €, c'est un état relatif, c'est une « étape » intermédiaire entre 2 états donnés. Comme cet « état relatif » est relatif, c'est qu'il l'est par rapport à un état de référence. Donc le signe appliqué est variable selon la référence, et cette référence peut être variable.

Je dois 20 € : Pour moi c'est une perte qui se code -20. Pour le receveur c'est un gain qui se code +20.

Tu me dois 5 : Pour moi c'est un gain qui se code +5. Pour le receveur c'est une perte qui se code -5.

Le signe de la composition globale est donc lié à la référence choisie pour aborder la relation. Ainsi, dans une même structure, il y aura une grande variété de types possibles. Nous présenterons uniquement 2 types pour information

Type	Exemple	Modélisation	
1	Recherche de la composition globale. Jean doit 9 billes à Tom. Tom doit aussi 5 billes à Jean. Combien Jean doit-il réellement de billes ?		Composition de relations
2	Recherche d'une relation. Tom doit 5 billes à Jean. Jean doit aussi des billes mais n'en donne que 4 à Tom. Combien Jean devait-il réellement de billes ?		

Type 1 :

Nous nous plaçons ici du point de vue de Jean. Jean doit 9 billes, c'est une perte pour lui. Tom lui doit 5 billes. C'est un gain pour Jean. La composition montre que Jean doit plus de billes qu'il ne va en gagner. Il va donc, globalement, devoir donner 4 billes.

Type 2 :

Nous nous plaçons ici du point de vue de Jean. Jean doit récupérer 5 billes de Tom. C'est un gain pour lui. Mais nous savons que Jean doit globalement 4 billes, c'est une perte globale pour lui. Nous savons donc que la perte est supérieure au gain. Cela implique que Jean devait plus à Tom que Tom ne devait à Jean.

2 - 7 Transformation de relations

Les transformations de relations ont une structure proche des transformations de mesure. La relation, où l'état relatif, est codé dans notre grammaire par un cercle tout comme la transformation. Il n'y a pas d'états dans ce cas, mais il y a une relation qui subit une transformation additive ou soustractive. Il n'y a qu'une relation au niveau sémantique. La structure des transformations de relations est donc visuellement proche des transformations de mesures. C'est encore une fois la nature des composantes qui va différer.

Dans ce type de problème arithmétique, un état relatif va alors migrer temporellement vers un autre état relatif via une transformation. Ce type de problème ne sera généralement pas non plus formellement abordé au primaire, mais il peut être rencontré fortuitement ou servir de support pour manipuler des quantités. C'est un problème du type : *« Je te dois, je t'ai donné, donc qu'est-ce que je te dois encore ? »*

exemple :

« je te dois 20 € pour le repas, je te donne 5 € car je n'ai que ça en poche. ***Combien te dois-je encore ? »***

Je dois 20 €, c'est un état relatif, c'est une « étape » intermédiaire entre 2 états donnés. Comme cet « état relatif » est relatif, c'est qu'il l'est par rapport à un état de référence. Donc le signe appliqué est variable selon la référence, et cette référence est elle-même variable.

Je dois 20 € : Pour moi c'est une perte qui se code -20. Pour le receveur, c'est un gain qui se code +20.

Je te donne 5 : 5 est une perte pour moi, on serait donc tenté d'écrire -5. Mais cette perte est surtout une composante négative d'un état relatif global négatif. C'est-à-dire que c'est ce « -5 » qui est à ôter du « -20 ». D'où : -20-(-5) qui se retranscrira -20+5.

La difficulté résidera dans la capacité à déterminer précisément les états relatifs et par rapport à quel état s'applique la transformation. Ainsi, ici aussi, pour une même structure, il y aura une grande variété de types possibles. Nous présenterons uniquement 2 types pour information.

Type	Exemple	Modélisation	
1	Recherche de la relation finale. Jean doit 9 billes à Tom. Il en rend 5 à Tom. Combien doit-il encore de billes a Tom ?	-9 → +5 → ?	Transformation de relation
2	Recherche de la transformation. Jean doit 9 billes à Tom. Il en rend à Tom et n'en doit plus que 4. Combien a-t-il rendu de billes a Tom ?	-9 → ? → -4	

Type 1 :

Nous cherchons ici la relation finale. Jean doit 9 billes, c'est une perte pour lui. Il rend 5 billes, ce qui diminue ce qu'il doit et augmente ce qu'il ne doit plus. C'est un gain pour Tom. Jean ne devra donc plus que 4 billes à Tom.

Type 2 :

Nous cherchons ici la transformation. Jean doit 9 billes, c'est une perte pour lui. Il rend un nombre inconnu de bille, ce qui va diminuer ce qu'il doit et augmenter ce qu'il ne doit plus. C'est un gain limité pour Tom. Tom a donc récupéré 5 billes sur les 9.

3 Les problèmes arithmétiques à structure multiplicative.

VERGNAUD[1] nomme un champ conceptuel : *« un ensemble de situations, qui permet de générer des classifications reposant sur l'analyse des tâches cognitives et des procédures pouvant être mises en jeu dans chacune d'elles »*. Ainsi, le champ conceptuel des structures multiplicatives est l'ensemble des situations qui impliquent une multiplication, une division ou les deux. Il n'y a donc pas une séparation selon le type d'opération (les multiplications d'un côté et les divisions de l'autre) car celles-ci interviennent simultanément. C'est dans cette optique que nous faisons aborder simultanément les problèmes impliquant une addition et une soustraction, ainsi que ceux nécessitant une multiplication et une division. La multiplication et la division se complètent dans la construction de leur sens propre.

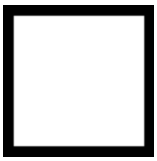
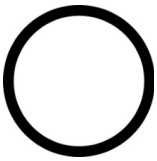
De manière formelle, la définition d'un problème multiplicatif est la suivante : un problème multiplicatif est un problème qui peut être modélisé sous forme d'une équation à une inconnue ou d'un tableau de proportionnalité. Plus simplement, les problèmes multiplicatifs se résolvent par une multiplication, par une division ou par une combinaison des deux. Bien sur, un problème multiplicatif ne va pas se limiter pas à la simple application de la technique opératoire. Certaines applications calculatoires paraîtront évidentes et d'autres beaucoup moins. C'est pourquoi nous précisons que ce type de problème peut être modélisé sous forme d'une équation à une inconnue qui impliquera une procédure de résolution adéquate. Le schéma est une étape proposée, conduisant à l'établissement de l'équation, car il permet de signifier chacune des données et de faire établir les liens entre elles. Comme nous l'avons déjà dit pour les problèmes additifs et soustractifs, les situations de comparaisons, de proportionnalité et les calculs des produits de mesures (aire, volume…) constituent les principales occasions de faire des multiplications ou des divisions. Cela est valable dans nos vies privées et professionnelles sans oublier bien sur l'école pour nos élèves ; faire des achats, du bricolage, choisir des matériaux, calculer un taux de crédit, etc. sont des situations problème au sens arithmétique. La numération, le calcul et la géométrie sont alors encore une fois des outils au service de la résolution de la situation, ils sont aussi utilisés pour en perfectionner l'usage.

Dans notre projet nous proposons également une modélisation pour chaque type de problème multiplicatif rencontré. Nous visons toujours une modélisation logique, cohérente

1 VERGNAUD G. (1990), RDM 10.2.3

et efficace. Ces modèles peuvent à tout moment être modifiés et améliorés selon les observations et analyses des pratiques. Cette typologie se veut être la plus exhaustive possible et aura pour but de présenter la plus grande variété de structures multiplicatives possibles, et elles sont nombreuses. Toutes ces structures multiplicatives n'ont pas vocation à être étudiées durant les cycles 2 et 3. Une proposition de progression sera proposée en tenant compte des attendus des programmes.

La représentation des problèmes, le modèle schématique, se base sur la grammaire établie et sur le lien structurel entre les problèmes qui relèvent de l'addition et ceux qui relèvent de la multiplication. Ces 2 opérations sont liées et par conséquent les structures qui en dépendent le sont aussi. Le codage appliqué dans ces modèles est basé sur une « grammaire » qui permet la traduction d'un énoncé en une équation mathématique à travers un schéma structurel dont les unités sont porteuses de sens. Chaque élément est signifiant, en voici une présentation rapide :

Nature	Symbole	Description
$\mathbb{N}$		Une quantité. Un état. Une mesure.
$\mathbb{Z}$		L'expression de la transformation. L'expression de la relation.

Nature	Définition
$\mathbb{N}$	Les entiers naturels (0, 1, 2, 3, 4)
$\mathbb{Z}$	Les entiers relatifs (-2 ;-1 ; 0 ; +1 ; +2)

La classification des problèmes arithmétiques multiplicatifs peut se faire selon plusieurs approches structurelles (ternaire ou quaternaire) ou fonctionnelles (rôle de la proportionnalité). Nous allons en présenter plusieurs afin de mettre en évidence, autant que possible, toutes les caractéristiques qui déterminent ces problèmes. G. VERGNAUD propose 4 classes de problèmes :

– **La comparaison multiplicative de grandeurs :** Comparaison de grandeurs et comparaison de relations multiplicatives.

– **La proportionnalité simple :** les 4 types ; simple, partition, quotition, règle de 3 ainsi que les transformations multiplicatives de grandeurs, les composition de transformations multiplicatives et les transformations de relations multiplicatives.

– **La proportionnalité composée :** composition de situations de proportionnalité simple imbriquées.

– **La proportionnalité double :** Le produit cartésien et ses dérivées (configuration rectangulaire, triangulaire et cubique) ainsi que la proportionnalité double (des situations de proportionnalité simple interdépendantes).

Le document suivant organise les problèmes arithmétiques multiplicatifs selon ces 4 grands ensembles. Chaque ensemble présente les types de problèmes avec les structures ternaires et quaternaires. C'est une possibilité d'organisation typologique.

Problèmes arithmétiques multiplicatifs

Problèmes de comparaisons multiplicatives de grandeurs

Problèmes ternaires

- Comparaisons multiplicatives
- Composition de relations multiplicatives

Problèmes de proportionnalité simple

Problèmes ternaires

- Transformations de grandeurs
- Compositions de transformations de grandeurs
- Transformation de relations multiplicatives

Problèmes quaternaires

- Multiplication
- Division partition
- Division quotition
- Règle de 3

Problèmes de proportionnalité composé

Problèmes quaternaires composés

- Proportionnalité composée

Problèmes de proportionnalité double

Problèmes ternaires

- Produit Cartésien
- Configuration Rectangulaire
- Configuration Triangulaire
- Configuration Cubique

Problèmes quaternaires composés

- Proportionnalité double

Nous pouvons aussi opter pour la classification des problèmes multiplicatifs en 3 grandes catégories interconnectées selon la structure minimale des problèmes rencontrés. Les problèmes ternaires, les problèmes quaternaires et les problèmes relevant d'une composition de grandeurs. Cette dernière est intercatégorielle, car elle va englober des problèmes aux structures ternaires et quaternaires avec le point commun de lier des domaines de grandeur par un rapport de proportionnalité. Le fait de lier plus spécifiquement plusieurs problèmes de proportionnalité (Proportionnalité simple composée et Proportionnalité double) engendre un ensemble particulier que nous choisissons de détailler plus spécifiquement. Dans les faits, les problèmes relevant de la double proportionnalité sont généralement des problèmes quaternaires complexes, mais cette propriété s'applique également à des problèmes dont la structure est ternaire..

Les problèmes de « produit cartésien » sont particuliers car selon les auteurs ils peuvent être considérés comme ternaires ou quaternaires. Les problèmes de produit cartésien impliquent la recherche de l'ensemble produit de n ensembles (n entier non nul dans notre cas), cela implique donc une structure de double proportion (Vergnaud 1981). Le produit cartésien est alors un des problèmes relevant de la double proportionnalité et tout en étant ternaire (pour n=2, au-delà la structure est quaternaire). Il apparaît donc que, comme la recherche de l'inconnue se fait à partir de 2 données connues (structure basique pour $n = 2$), le produit cartésien pourrait obéir ponctuellement à la structure ternaire, même si cette définition est réductrice car un ensemble produit peut être le produit de n-ensembles (avec $n > 2$ donc autre que ternaire).

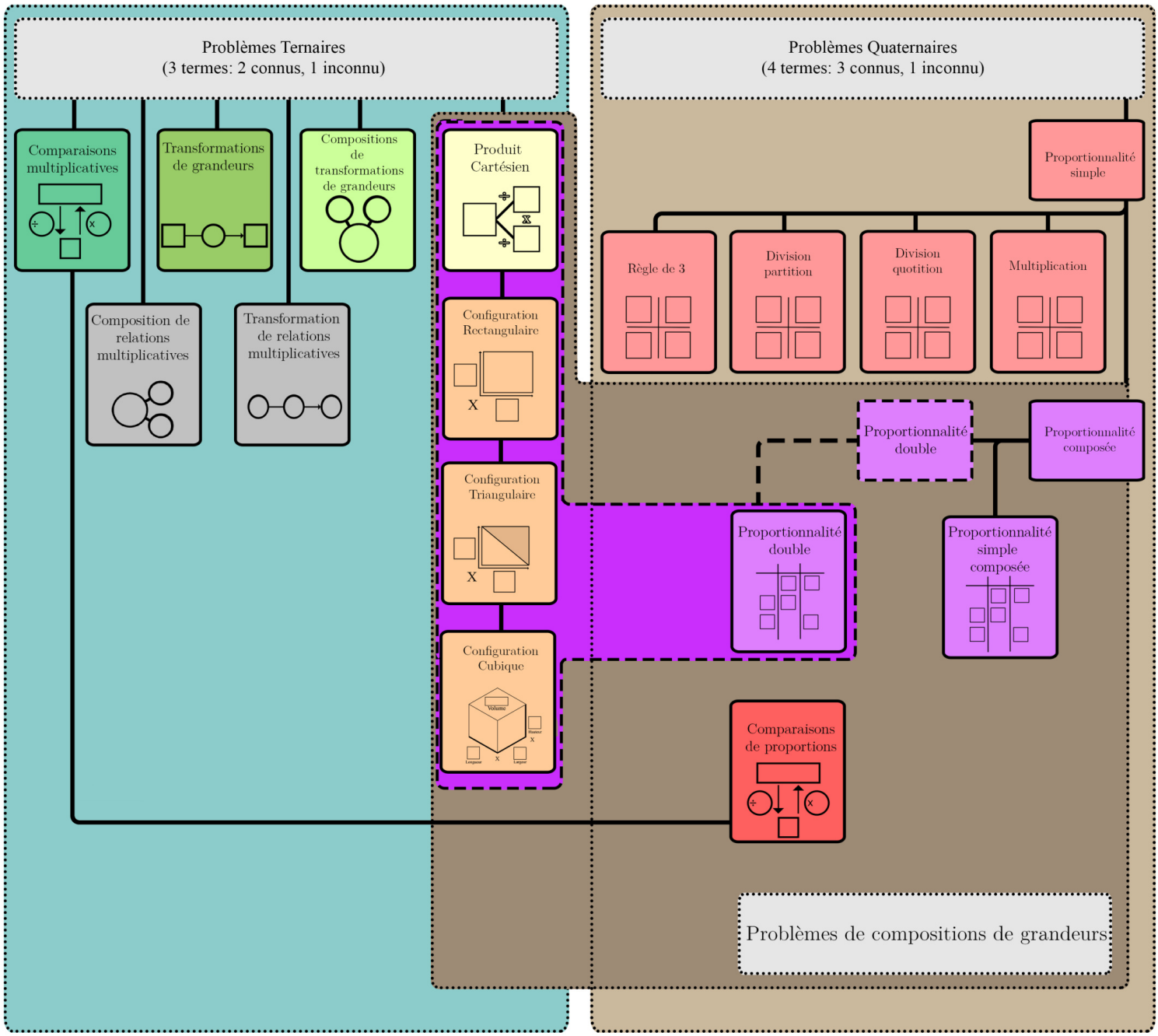
De plus, la configuration rectangulaire qui est la recherche d'un ensemble (Aire) produit de 2 ensembles (longueur et largeur) correspond à cette définition (si l'un des ensembles est constant) et est *de facto* un problème de produit cartésien relevant de la double proportion. Ainsi, si un des domaines de grandeur est fixe (par exemple la largeur), ce domaine devient le coefficient de proportionnalité. La variation du second domaine (la longueur) modifiera proportionnellement l'Aire (l'Aire va croître ou décroître proportionnellement à la variation de la longueur). Dans notre représentation nous signifions les problèmes de configuration rectangulaire comme étant des prolongements (sous-catégorie) des problèmes de produit cartésien et les problèmes de recherche d'un volume comme étant eux aussi les prolongements des premiers. Nous rappelons également que notre typologie se base aussi sur la « structure représentée » du problème. C'est-à-dire qu'en gardant visible la structure interne du problème via sa représentation schématique, nous agençons les différents éléments de cette structure pour la rendre plus « parlante » en fonction du contexte (exemple des configurations rectangulaires et cubiques).

Nous avons fait le choix, actuellement, de traiter les problèmes de produit cartésien avec l'ensemble des problèmes ternaires (en gardant la structure logique la plus basique mais la plus évolutive). Cette étude se limite à des structures simples (ensemble A $\times$ ensemble B

× ensemble C ou recherche d'un ensemble en connaissant l'ensemble produit) où l'étude est centrée sur la représentation des possibilités de choix qui sont les produits des ensembles proposés. Ce choix est guidé par les progressions proposées et la démarche mise en place aux cycles 2 et 3.

Nous nous réservons bien sur le droit de modifier cette présentation et il nous paraissait nécessaire de signifier le cas particulier de ce type de problèmes. Il faut tenir compte du fait que plus la relation structurelle est abstraite pour l'élève , et la double proportionnalité est très abstraite au primaire, plus nous devons équilibrer la modélisation qui reprend les éléments de surface sans altérer la composition structurelle. Si la modélisation se focalise trop sur la surface du problème, le modèle n'est plus transférable aux problèmes isomorphes (le modèle n'est donc valide qu'au cas par cas) et la structure interne est encore plus ardue à reconnaître et expliciter par l'enseignant. A contrario, une modélisation trop pointue sur la structure interne (cas d'une mise en équation) devient alors inaccessible au novice même si elle est valide dans tous les isomorphisme rencontrés.

Problèmes arithmétiques multiplicatifs

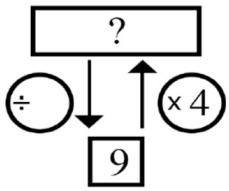
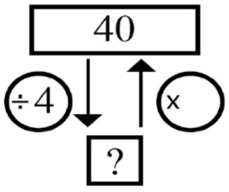
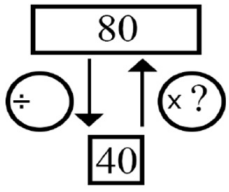
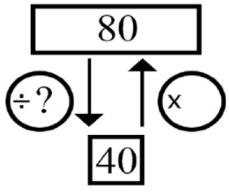
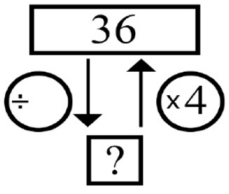
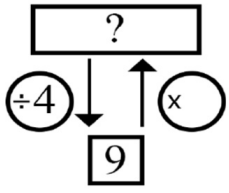


Problèmes ternaires	Comparaisons multiplicatives	Transformations de grandeurs	Compositions de transformations de grandeurs	Produit Cartésien	Configuration Rectangulaire	Configuration Triangulaire
	Composition de relations multiplicatives	Transformation de relations multiplicatives	Configuration Cubique			
Problèmes quaternaires	Multiplication	Division partition	Division quotition	Règle de 3	Proportionnalité simple composée	Proportionnalité double
	Comparaisons de proportions					
Composition de grandeurs	Proportionnalité simple composée	Proportionnalité double	Comparaisons de proportions	Produit Cartésien	Configuration Rectangulaire	Configuration Triangulaire
	Configuration Cubique					

3 - 1 Typologie des problèmes multiplicatifs et progressivité des apprentissages.

Pour détailler cette typologie complète, nous prendrons le soin d'aborder successivement les différentes de problèmes multiplicatifs et d'en dévoiler l'ensemble des composantes. Cette présentation se veut la plus complète possible mais n'a pas valeur de programmation stricte des apprentissages. Elle a pour objectif d'offrir le panorama le plus exhaustif sur la typologie des problèmes multiplicatifs afin que l'enseignant puisse y trouver toutes les informations relatives à ses questionnements. Cette typologie permet de faire le lien avec la grammaire que nous utilisons pour modéliser les situations rencontrées.

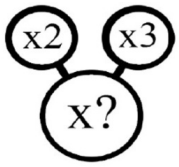
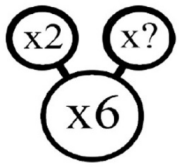
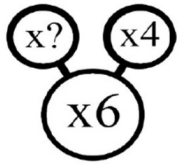
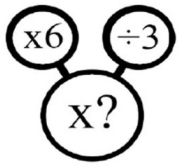
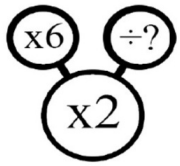
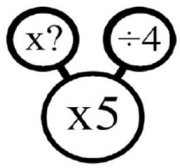
Une progression englobant les cycles 2 et 3 sera proposée à la suite de cette présentation en ne reprenant que tout ou partie de la typologie présentée ci-après.

Type	Exemple	Modélisation
1	Comparaison multiplicative : recherche du référé Pierre a 9 ans et son père est 4 fois plus âgé que lui. **Quel est l'âge de son père ?**	
2	Comparaison multiplicative : recherche du référé Le père de Pierre a 36 ans et son fils 4 fois moins. **Quel est l'age de Pierre ?**	
3	Comparaison multiplicative : recherche du nombre de fois plus. J'ai 40 billes et Tom en a 80. **Tom en a combien de fois plus que moi ?**	
4	Comparaison multiplicative : recherche du nombre de fois moins. J'ai 80 billes et Tom en a 40. **Tom en a combien de fois moins que moi ?**	
5	Comparaison multiplicative : recherche du référant Le père de Pierre a 36 ans, il est 4 fois plus âgé que son fils. **Quel est l'âge de Pierre ?**	
6	Comparaison multiplicative : recherche du référant Pierre a 9 ans et il est 4 fois moins âgé que son père. **Quel est l'age de son père ?**	

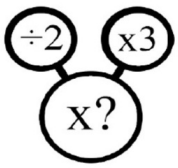
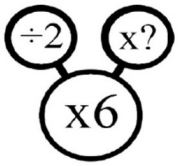
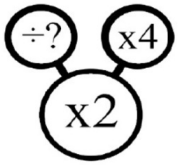
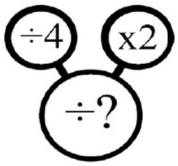
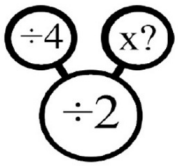
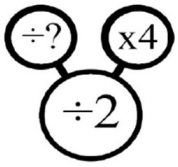
Comparaisons multiplicatives

Type	Exemple	Modélisation
1	Transformation de grandeurs : recherche de l'état final Une image mesure 10 cm de long. Je l'agrandis par un coefficient d'agrandissement de 2. **Quelle est sa longueur actuelle ?**	10 — x 2 → ?
2	Transformation de grandeurs : recherche de l'état final Une image mesurait 20 cm de long. Je la rétrécis par un coefficient de rétrécissement de 2. **Quelle est sa longueur actuelle ?**	20 — ÷ 2 → ?
3	Transformation de grandeurs : recherche de l'état initial Une image mesure maintenant 20 cm de long. Elle a été agrandie par un coefficient d'agrandissement de 2. **Quelle était sa longueur originelle ?**	? — x 2 → 20
4	Transformation de grandeurs : recherche de l'état initial Un smartphone a une épaisseur de 8 mm. Son épaisseur à été divisée par 4 en 4 ans. **Quelle était son épaisseur originelle ?**	? — ÷ 4 → 8
5	Transformation de grandeurs : recherche de la transformation multiplicative Une pièce de monnaie mesure 2 cm de diamètre. À la loupe ce diamètre est de 10 cm. **Quel est l'agrandissement de la loupe ?**	2 — x ? → 10
6	Transformation de grandeurs : recherche de la transformation divisive Sur une carte, une route mesure 10 cm. En réalité elle mesurait 1 m. **Quel est le rétrécissement de la carte ?**	100 — ÷ ? → 10

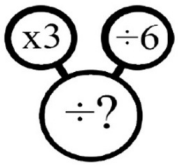
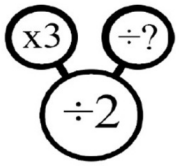
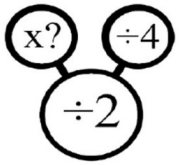
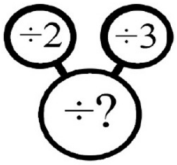
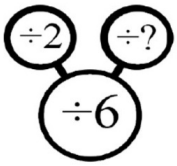
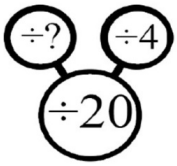
Transformation de grandeurs

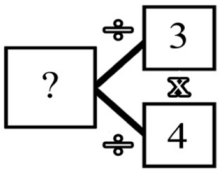
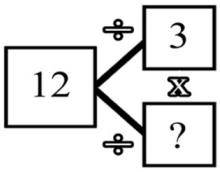
Type	Exemple	Modélisation
1	Composition de transformations de grandeurs : recherche de la composée Une image voit sa longueur multipliée par 2 puis par 3.**Quel est l'agrandissement total de la longueur de l'image ?**	
2	Composition de transformations de grandeurs : recherche d'une composante Une image voit sa longueur multipliée par 2 puis encore multipliée par la suite. Globalement, sa longueur est multipliée par 6. **Quelle est la valeur du second agrandissement ?**	
3	Composition de transformations de grandeurs : recherche d'une composante Je multiplie le prix d'un objet, puis je le multiplie encore par 4. Globalement son prix est multiplié par 20. **Quelle est la valeur de la première multiplication ?**	
4	Composition de transformations de grandeurs : recherche de la composée Une image voit sa longueur multipliée par 6 et divisée par 3.**Quel est l'agrandissement total de la longueur de l'image ?**	
5	Composition de transformations de grandeurs : recherche d'une composante Une image voit sa longueur multipliée par 6 puis est divisée par la suite. Globalement, sa longueur est multipliée par 2. **Quelle est la valeur de la réduction ?**	
6	Composition de transformations de grandeurs : recherche d'une composante Je multiplie le prix d'un objet, puis je divise ce prix par 4. Globalement son prix est multiplié par 5. **Quelle est la valeur de la première multiplication ?**	

Composition de transformation de grandeurs

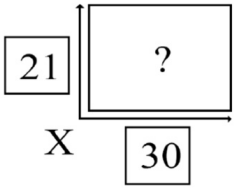
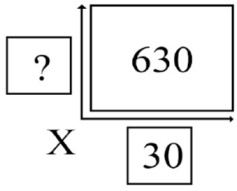
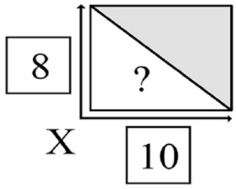
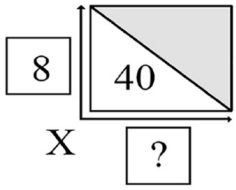
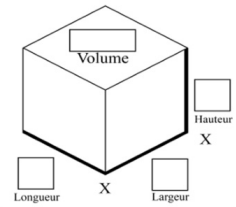
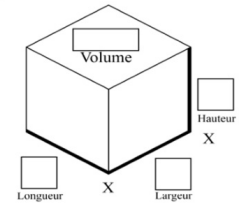
Type	Exemple	Modélisation
7	Composition de transformations de grandeurs : recherche de la composée Une image voit sa longueur divisée par 2 puis multipliée par 3**. Quel est l'agrandissement total de la longueur de l'image ?**	
8	Composition de transformations de grandeurs : recherche d'une composante Une image voit sa longueur divisée par 2 puis encore multipliée par la suite. Globalement, sa longueur est multipliée par 6. **Quelle est la valeur du second agrandissement ?**	
9	Composition de transformations de grandeurs : recherche d'une composante Je divise le prix d'un objet, puis je le multiplie encore par 4. Globalement son prix est multiplié par 2. **Quelle est la valeur de la première division ?**	
10	Composition de transformations de grandeurs : recherche de la composée Une image voit sa longueur divisée par 4 puis multipliée par 2. **Quel est le facteur de réduction total de la longueur de l'image ?**	
11	Composition de transformations de grandeurs : recherche d'une composante Une image voit sa longueur divisée par 4 puis encore multipliée par la suite. Globalement, sa longueur est divisée par 2. **Quelle est la valeur du second agrandissement ?**	
12	Composition de transformations de grandeurs : recherche d'une composante Je divise le prix d'un objet, puis je le multiplie encore par 4. Globalement son prix est divisé par 2. **Quelle est la valeur de la première division ?**	

Composition de transformation de grandeurs

Type	Exemple	Modélisation	
13	Composition de transformations de grandeurs : recherche de la composée Une image voit sa longueur multipliée par 3 et divisée par 6.**Quel est le facteur de réduction total de la longueur de l'image ?**		Composition de transformation de grandeurs
14	Composition de transformations de grandeurs : recherche d'une composante Une image voit sa longueur multipliée par 3 puis est divisée par la suite. Globalement, sa longueur est divisée par 2. **Quelle est la valeur de la réduction ?**		
15	Composition de transformations de grandeurs : recherche d'une composante Je multiplie le prix d'un objet, puis je divise ce prix par 4. Globalement son prix n'a été divisé que par 2. **Quelle est la valeur de la première multiplication ?**		
16	Composition de transformations de grandeurs : recherche de la composée Une image voit sa longueur divisée par 2 puis par 3. **Quel est le facteur de réduction total de la longueur de l'image ?**		
17	Composition de transformations de grandeurs : recherche d'une composante Une image voit sa longueur divisée par 2 puis encore divisée par la suite. Globalement, sa longueur est divisée par 6. **Quelle est la valeur du second rétrécissement ?**		
18	Composition de transformations de grandeurs : recherche d'une composante Je divise le prix d'un objet, puis je le divise encore par 4. Globalement son prix est divisé par 20. **Quelle est la valeur de la première division ?**		

Type	Exemple	Modélisation	
1	Produit Cartésien : recherche des possibilités Il y a 3 vestes et 4 pantalons. **Combien de tenues puis-je former ?** Il y a 4 colliers, 2 bracelets et 5 bagues. **Combien y a-t-il d'ensembles ?**		Produit cartésien
2	Produit Cartésien : recherche des possibilités Je peux former12 ensembles avec 3 vestes et des pantalons. **Combien ai-je de pantalons ?** Je peux former 40 parures avec 4 colliers, 2 bracelets et des bagues. **Combien ai-je de bagues ?**		

Nous présentons tout d'abord les 2 types les plus simples avant de traiter les extensions des problèmes de produit cartésien. Cette catégorie, et ses extensions, sera traitée dans le détail plus après car elle est extrêmement riche structurellement et nécessite des années d'apprentissage pour en étudier tous les aspects. Ainsi, à partir d'une même structure profonde, il nous apparaît comme plus judicieux de proposer des structures « visuelles » qui diffèrent légèrement selon les contextes, car elles sont visuellement plus « parlantes » et plus ciblées sur le contexte rencontré.

Type	Exemple	Modélisation	
1	Configuration rectangulaire : recherche de l'aire Une feuille mesure 30 cm de long et 21 cm de large. **Quelle est son aire ?**		Configuration rectangulaire
2	Configuration rectangulaire : recherche d'une longueur Une feuille à une aire de 630cm². Sa longueur est 30cm.**Quelle est sa largeur ?**		
3	Configuration triangulaire : recherche de l'aire Un triangle rectangle a une base de 10 cm et une hauteur de 8 cm. **Quelle est son aire ?**		Configuration triangulaire
4	Configuration triangulaire : recherche de la base / hauteur Un triangle rectangle a une aire de 40 cm² et une hauteur de 8 cm. **Quelle est la longueur de sa base ?**		
5	Configuration cubique : recherche d'un volume Un cube a une longueur de 10 cm, une largeur de 10 cm et une hauteur de 10 cm. **Quel est son volume ?**		Configuration cubique
6	Configuration cubique : recherche d'une hauteur / largeur / longueur Un cube a une longueur de 10 cm, une largeur de 10 cm et un volume de 1000 cm³. **Quelle est sa hauteur ?**		

Type	Exemple	Modélisation	
1	Proportionnalité simple, multiplication : Recherche du nombre d'éléments 1 dictionnaire coûte 38 €. **Combien coûtent 8 dictionnaires ?**	1 | 38 8 | ?	Proportionnalité simple
2	Proportionnalité simple, division/partition : Recherche du nombre d'éléments par part L'achat de 12 dictionnaires identiques a coûté 372 €. **Quel est le prix d'un seul dictionnaire ?**	1 | ? 12 | 372	
3	Proportionnalité simple, division/quotition : Recherche du nombre de parts Une fermière range 48 œufs dans des boîtes de 6 œufs. **Combien de boîtes d'œufs remplit-elle ?**	1 | 6 ? | 48	
4	Proportionnalité simple : Règle de 3 4 dictionnaires identiques pèsent 10 kg. **Combien pèseraient 14 dictionnaires ?**	4 | 10 14 | ?	

En tenant compte du fait que la règle de 3 permet de trouver une quatrième proportionnelle, il est donc évident que la règle de 3 ne s'applique pas qu'aux problèmes de multiplication de la proportionnalité simple (dans la catégorie : recherche du nombre d'éléments). Elle est applicable aux problèmes de division / partition et de division / quotition.

Deux exemples sont proposés ci-après.

Type	Exemple	Modélisation	
2'	Proportionnalité simple, division/partition Règle de 3 : Recherche du nombre d'éléments par part 14 dictionnaires identiques pèsent 35 kg. **Combien pèseraient 4 dictionnaires ?**	4 ? / 14 35	Proportionnalité simple
3'	Proportionnalité simple, division/partition Règle de 3 : Recherche du nombre d'éléments par part 4 dictionnaires identiques pèsent 10 kg. **Combien de dictionnaires pèseront 35 kg ?**	4 10 / ? 35	

Type	Exemple	Modélisation	
1	Comparaisons de proportions : Abel mélange 12 cl de sirop et 16 cl d'eau. Chloé fait un mélange 1,5 fois plus concentré. **Quel est le rapport sirop/eau en cl du mélange de Chloé ?**	? ÷1,5 ×1,5 12/16	Comparaison de proportions
2	Comparaisons de proportions : Abel mélange 12 cl de sirop et 16 cl d'eau. Chloé mélange 10 cl de sirop et 15Â cl d'eau. **Qui a le mélange le plus concentré en sirop ? (combien de fois est-il plus concentré ?)**	12/16 ÷ ? × ? 10/15	

Les comparaisons de proportions sont des problèmes complexes (au sens « composé ») qui traitent à la fois d'une situation de proportionnalité et d'une situation de comparaison multiplicative/ additive ou de composition. La structure principale est donc la structure comparative qui fait le lien entre les éléments liés par la proportionnalité.

Ces problèmes nous ont été proposés et sont évoqués dans un ouvrage du SCEREN[1] , nous y reviendrons dans un chapitre dédié.

1« *Situations multiplicatives, problèmes de multiplication et de division*. Olivier Graff, Benoît Wozniak. Ed SCEREN. »

Type	Exemple	Modélisation
1	Proportionnalité simple composée Dans un sachet de gâteaux il y a 4 gâteaux et dans 1 paquet il y a 3 sachets. Dimitri achète 2 paquets de gâteaux.**Combien y a-t-il de gâteaux ?**	1 / 1 / 3 / 4 / 2 / ?
2	Proportionnalité simple composée Dans 1 sachet de gâteaux il y a 4 gâteaux et dans 1 paquet il y a plusieurs sachets. Dimitri achète 2 paquets de gâteaux et obtiens donc 24 gâteaux. **Combien y a-t-il de sachets ?**	1 / 1 / ? / 4 / 2 / 24
3	Proportionnalité simple composée Dans un sachet de gâteaux il y a 4 gâteaux et dans 1 paquet il y a 3 sachets. Dimitri a 24 gâteaux. **Combien y a-t-il de paquets de gâteaux ?**	1 / 1 / 3 / 4 / ? / 24
4	Proportionnalité simple composée Dans 1 paquet de gâteaux il y a 3 sachets. Dimitri achète 2 paquets de gâteaux et obtiens 24 gâteaux. **Combien y a-t-il de gâteaux dans 1 sachet ?**	1 / 1 / 3 / ? / 2 / 24

Proportionnalité simple composé

Type	Exemple	Modélisation
1	Proportionnalité double Un café coûte 2 € par personne chaque jour, **Combien 4 personnes paieront-elles en 5 jours ?**	1 / 1 / 5 ; 1 / 4 ; 2 / ?
2	Proportionnalité double Un groupe de 4 personnes paye 40 € de café en 5 jours,**Combien paiera 1 personne pour 1 café ?**	1 / 1 / 5 ; 1 / 4 ; ? / 40
3	Proportionnalité double Un café coûte 2 € par personne chaque jour, **Combien de personnes sont dans un groupe qui paye 40 € en 5 jours ?**	1 / 1 / 5 ; 1 / ? ; 2 / 40
4	Proportionnalité double Un café coûte 2 € par personne chaque jour, **Combien de jours sont nécessaires à 4 personnes pour payer 40 € ?**	1 / 1 / ? ; 1 / 4 ; 2 / 40

Proportionnalité double

Pierre a 9 ans et son père est 4 fois plus âgé que lui.
Quel est l'âge de son père ?

1

Le père de Pierre a 36 ans et son fils 4 fois moins.
Quel est l'age de Pierre ?

2

J'ai 40 billes et Tom en a 80.
Tom en a combien de fois plus que moi ?

3

J'ai 80 billes et Tom en a 40.
Tom en a combien de fois moins que moi ?

4

Le père de Pierre a 36 ans, il est 4 fois plus âgé que son fils.
Quel est l'âge de Pierre ?

5

Pierre a 9 ans et il est 4 fois moins âgé que son père.
Quel est l'age de son père ?

6

Une image mesure 10 cm de long. Je l'agrandis par un coefficient d'agrandissement de 2. **Quelle est sa longueur actuelle ?**

1

Une image mesurait 20 cm de long. Je la rétrécis par un coefficient de rétrécissement de 2. **Quelle est sa longueur actuelle ?**

2

Une image mesure maintenant 20 cm de long. Elle a été agrandie par un coefficient d'agrandissement de 2. **Quelle était sa longueur originelle ?**

3

Un smartphone a une épaisseur de 8 mm. Son épaisseur à été divisée par 4 en 4 ans. **Quelle était son épaisseur originelle ?**

4

Une pièce de monnaie mesure 2 cm de diamètre. À la loupe ce diamètre est de 10 cm.
Quel est l'agrandissement de la loupe ?

5

Sur une carte, une route mesure 10 cm. En réalité elle mesurait 1 m.
Quel est le rétrécissement de la carte ?

6

Une image voit sa longueur multipliée par 2 puis par 3.
Quel est l'agrandissement total de la longueur de l'image ?

1

Une image voit sa longueur multipliée par 2 puis encore multipliée par la suite. Globalement, sa longueur est multipliée par 6. **Quelle est la valeur du second agrandissement ?**

2

Je multiplie le prix d'un objet, puis je le multiplie encore par 4. Globalement son prix est multiplié par 20. **Quelle est la valeur de la première multiplication ?**

3

Une image voit sa longueur multipliée par 6 et divisée par 3.
Quel est l'agrandissement total de la longueur de l'image ?

4

Une image voit sa longueur multipliée par 6 puis est divisée par la suite. Globalement, sa longueur est multipliée par 2. **Quelle est la valeur de la réduction ?**

5

Je multiplie le prix d'un objet, puis je divise ce prix par 4. Globalement son prix est multiplié par 5. **Quelle est la valeur de la première multiplication ?**

6

Une image voit sa longueur divisée par 2 puis multipliée par 3.
Quel est l'agrandissement total de la longueur de l'image ?

1

Une image voit sa longueur divisée par 2 puis encore multipliée par la suite. Globalement, sa longueur est multipliée par 6. **Quelle est la valeur du second agrandissement ?**

2

Je divise le prix d'un objet, puis je le multiplie encore par 4. Globalement son prix est multiplié par 2. **Quelle est la valeur de la première division ?**

3

Une image voit sa longueur divisée par 4 puis multipliée par 2.
Quel est le facteur de réduction total de la longueur de l'image ?

4

Une image voit sa longueur divisée par 4 puis encore multipliée par la suite. Globalement, sa longueur est divisée par 2. **Quelle est la valeur du second agrandissement ?**

5

Je divise le prix d'un objet, puis je le multiplie encore par 4. Globalement son prix est divisé par 2. **Quelle est la valeur de la première division ?**

6

Une image voit sa longueur multipliée par 3 et divisée par 6.
Quel est le facteur de réduction total de la longueur de l'image ?

7

Une image voit sa longueur multipliée par 3 puis est divisée par la suite. Globalement, sa longueur est divisée par 2. **Quelle est la valeur de la réduction ?**

8

Je multiplie le prix d'un objet, puis je divise ce prix par 4. Globalement son prix n'a été divisé que par 2. **Quelle est la valeur de la première multiplication ?**

9

Une image voit sa longueur divisée par 2 puis par 3.
Quel est le facteur de réduction total de la longueur de l'image ?

10

Une image voit sa longueur divisée par 2 puis encore divisée par la suite. Globalement, sa longueur est divisée par 6. **Quelle est la valeur du second rétrécissement ?**

11

Je divise le prix d'un objet, puis je le divise encore par 4. Globalement son prix est divisé par 20. **Quelle est la valeur de la première division ?**

12

13

14

15

16

17

18

Il y a 3 vestes et 4 pantalons. **Combien de tenues puis-je former ?**
Il y a 4 colliers, 2 bracelets et 5 bagues. **Combien y a-t-il d'ensembles ?**

1

Je peux former12 ensembles avec 3 vestes et des pantalons. **Combien ai-je de pantalons ?**
Je peux former 40 parures avec 4 colliers, 2 bracelets et des bagues. **Combien ai-je de bagues ?**

2

Une feuille mesure 30 cm de Long et 21 cm de large.
Quelle est son aire ?

1

Une feuille à une aire de 630 cm^2. Sa longueur est 30 cm.
Quelle est sa longueur ?

2

Un triangle rectangle a une base de 10 cm et une hauteur de 8 cm.
Quelle est son aire ?

3

Un triangle rectangle a une aire de 40 cm^2 et une hauteur de 8 cm.
Quelle est la longueur de sa base ?

4

Un cube a une longueur de 10 cm, une largeur de 10 cm et une hauteur de 10 cm.
Quel est son volume ?

5

Un cube a une longueur de 10 cm, une largeur de 10 cm et un volume de 1000Â cm^3.
Quelle est sa hauteur ?

6

1 dictionnaire coûte 38 €.
Combien coûtent 8 dictionnaires ?

1

L'achat de 12 dictionnaires identiques a coûté 372 €.
Quel est le prix d'un seul dictionnaire ?

2

Une fermière range 48 œufs dans des boîtes de 6 œufs.
Combien de boîtes d'œufs remplit-elle ?

3

4 dictionnaires identiques pèsent 10 kg.
Combien pèseraient 14 dictionnaires ?

4

Abel mélange 12 cl de sirop et 16 cl d'eau. Chloé fait un mélange 1,5 fois plus concentré.
Quel est le rapport sirop/eau en cl du mélange de Chloé ?

1

Abel mélange 12 cl de sirop et 16 cl d'eau. Chloé mélange 10 cl de sirop et 15 cl d'eau.
Qui a le mélange le plus concentré en sirop ? (combien de fois est-il plus concentré ?)

2

Dans un sachet de gâteaux il y a 4 gâteaux et dans 1 paquet il y a 3 sachets. Dimitri achète 2 paquets de gâteaux.
Combien y a-t-il de gâteaux ?

1

Dans 1 sachet de gâteaux il y a 4 gâteaux et dans 1 paquet il y a plusieurs sachets. Dimitri achète 2 paquets de gâteaux et obtiens donc 24 gâteaux.
Combien y a-t-il de sachets ?

2

Dans un sachet de gâteaux il y a 4 gâteaux et dans 1 paquet il y a 3 sachets. Dimitri a 24 gâteaux.
Combien y a-t-il de paquets de gâteaux ?

3

Dans 1 paquet de gâteaux il y a 3 sachets. Dimitri achète 2 paquets de gâteaux et obtiens 24 gâteaux. **Combien y a-t-il de gâteaux dans 1 sachet ?**

4

Un café coûte 2 € par personne chaque jour,
Combien 4 personnes paieront-elles en 5 jours ?

1

Un groupe de 4 personnes paye 40 € de café en 5 jours,
Combien paiera 1 personne pour 1 café ?

2

Un café coûte 2 € par personne chaque jour,
Combien de personnes sont dans un groupe qui paye 40 € en 5 jours ?

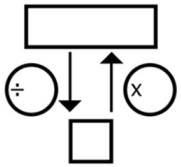
3

Un café coûte 2 € par personne chaque jour,
Combien de jours sont nécessaires à 4 personnes pour payer 40 € ?

4

Comparaisons multiplicatives

1 à 6

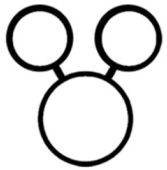


Transformations multiplicatives

1 à 6

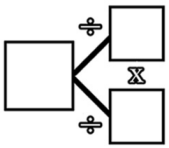
Compositions multiplicatives

1 à 18



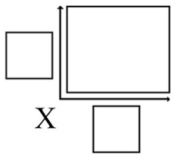
Produit cartésien

1 à 2



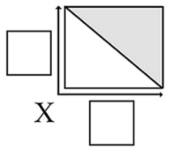
Configuration rectangulaire

1 à 2



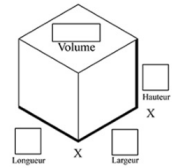
Configuration triangulaire

1 à 2



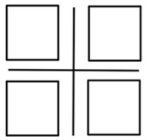
Configuration cubique

1 à 2



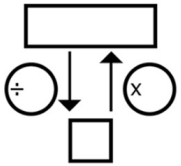
Proportionnalité simple

1 à 4



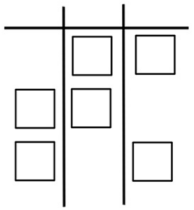
Comparaison de proportions

1 à 2



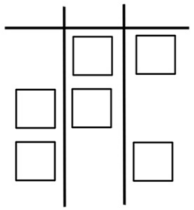
Proportionnalité simple composée

1 à 4



Double proportionnalité

1 à 4



L'auteur proposera tout au long de cette synthèse plusieurs documents d'aide pour aborder les problèmes multiplicatifs, non pas uniquement séquentiellement mais en additionnant peu à peu les différentes structures. Les comparaisons multiplicatives et la proportionnalité simples peuvent s'aborder très simplement dès le CP, avec des problèmes qui relèvent de la multiplication et d'autres de la division.

Le prochain document présente cette progression structurée globale du CP au CM2 avec étude progressive d'une portion des types de problèmes avec la nouvelle représentation symbolique préparée par le maître supplémentaire. La progression détaillée pour chaque niveau sera approfondie plus après dans les chapitres traitant les progressions inter et intra-cycle.

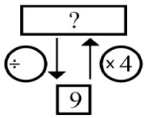
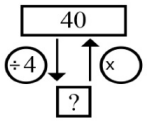
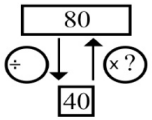
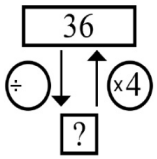
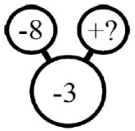
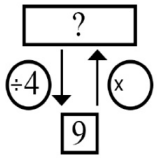
Tous les types multiplicatifs ne sont pas traités dans nos fichiers, ce qui n'implique pas qu'ils ne puissent pas être abordés en supplément par l'enseignant selon les modalités de son choix. Notre progression propose en quelque sorte les « incontournables ». Les types de problèmes les plus fréquemment rencontrés sont approfondis sur les cycles concernés

De part la structure différenciée de nos fichiers et la possibilité d'avancer à un rythme adapté à chacun (ce qui ne veut pas dire un rythme poussif car l'enseignant offre des rétroactions et des renforcements pour que chacun puisse avancer au meilleur rythme), certains types de problèmes seront abordés en avance par les élèves les plus performants (but : tutorat entre pairs par la suite). Certains types seront même revus plusieurs fois par eux. Une progression est un indicateur global et n'est jamais la représentation réelle de la diversité de nos élèves. Les élèves cheminent donc à leur rythme sur une progression établie qui permet de voir et revoir, de découvrir et d'approfondir.

Ce projet est donc conçu de manière spiralaire sur plusieurs années afin de permettre à toutes et tous de travailler efficacement les notions étudiées.

Précision : Quand nous indiquons « l'élève avance à son rythme » il n'est absolument pas question ici de « l'élève travaille en autonomie au rythme qu'il souhaite, sans lien avec ses capacités, sans gestion de l'enseignant ». Son rythme est celui qui découle de ses connaissances et compétences, des rétroactions proposées par l'enseignant. L'élève n'est pas laissé seul, au contraire. Le but est de l'amener à montrer le meilleur de ses capacités et si la finalité vise l'autonomie, elle n'en est pas le point de dé

Progression du CP au CM 2 pour les comparaisons multiplicatives :

Type	Exemple	Modélisation		Cp	Ce1	Ce2	Cm1	Cm2
1	Comparaison multiplicative : recherche du référé Pierre a 9 ans et son père est 4 fois plus âgé que lui. Quel est l'âge de son père ?		Comparaisons multiplicatives					
2	Comparaison multiplicative : recherche du référé Le père de Pierre a 36 ans et son fils 4 fois moins. Quel est l'age de Pierre ?							
3	Comparaison multiplicative : recherche du nombre de fois + J'ai 40 billes et Tom en a 80. Tom en a combien de fois plus que moi ?							
4	Comparaison multiplicative : recherche du nombre de fois - J'ai 80 billes et Tom en a 40. Tom en a combien de fois moins que moi ?							
5	Comparaison multiplicative : recherche du référant Le père de Pierre a 36 ans, il est 4 fois plus âgé que son fils. Quel est l'âge de Pierre ?							
6	Comparaison multiplicative : recherche du référant Pierre a 9 ans et il est 4 fois moins âgé que son père. Quel est l'age de son père ?							

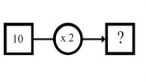
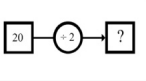
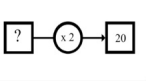
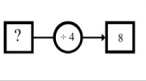
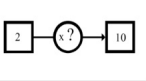
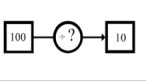
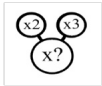
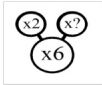
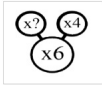
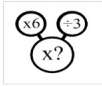
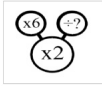
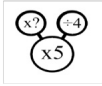
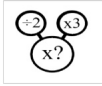
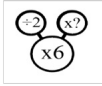
Progression du Cp au Cm2 pour le produit cartésien et les configurations multiples :

Type	Exemple	Modélisation		Cp	Ce1	Ce2	Cm1	Cm2
1	Produit Cartésien : recherche des possibilités Il y a 3 vestes et 4 pantalons. Combien de tenues puis-je former ? Il y a 4 colliers, 2 bracelets et 5 bagues. Combien y a-t-il d'ensembles ?	? 3 × 4	Produit cartésien					
2	Je peux former12 ensembles avec 3 vestes et des pantalons. Combien ai-je de pantalons Je peux former 40 parures avec 4 colliers, 2 bracelets et des bagues. Combien ai-je de bagues ?	12 3 × ?						
1	Configuration rectangulaire : recherche de l'aire Une feuille mesure 30 cm de Long et 21 cm de large. Quelle est son aire ?	21 ? X 30	Configuration rectangulaire					
2	Configuration rectangulaire : recherche d'une longueur Une feuille à une aire de 630 cm². Sa longueur est 30 cm. Quelle est sa longueur ?	? 630 X 30						
3	Configuration triangulaire : recherche de l'aire Un triangle rectangle a une base de 10 cm et une hauteur de 8 cm. Quelle est son aire ?	8 ? X 10	Configuration triangulaire					
4	Configuration triangulaire : recherche de la base / hauteur Un triangle rectangle a une aire de 40 cm² et une hauteur de 8 cm. Quelle est la longueur de sa base ?	8 40 X ?						
5	Un cube a une longueur de 10 cm, une largeur de 10 cm et une hauteur de 10 cm. Quel est son volume ?	Volume Hauteur X Longueur X Largeur	Configuration cubique					
6	Un cube a une longueur de 10 cm, une largeur de 10 cm et un volume de 1000 cm³. Quelle est sa hauteur ?	Volume Hauteur X Longueur X Largeur						

Progression du CP au CM 2 pour les problèmes de proportionnalité simple, composée et double :

Type	Exemple	Modélisation	Cp	Ce1	Ce2	Cm1	Cm2
1	Proportionnalité simple, multiplication : Recherche du nombre d'éléments 1 dictionnaire coûte 38 €. **Combien coûtent 8 dictionnaires ?**	1 | 38 8 | ?					
2	Proportionnalité simple, division/partition : Recherche du nombre d'éléments par part L'achat de 12 dictionnaires identiques a coûté 372 €. **Quel est le prix d'un seul dictionnaire ?**	1 | ? 12 | 372					
3	Proportionnalité simple, division/quotition : Recherche du nombre de parts Une fermière range 48 œufs dans des boîtes de 6 œufs. **Combien de boîtes d'œufs remplit-elle ?**	1 | 6 ? | 48					
4	Proportionnalité simple : Règle de 3 4 dictionnaires identiques pèsent 10 kg. **Combien pèseraient 14 dictionnaires ?**	4 | 10 14 | ?					

Type	Exemple	Modélisation		Cp	Ce1	Ce2	Cm1	Cm2
1	Proportionnalité simple composée Dans un sachet de gâteaux il y a 4 gâteaux et dans 1 paquet il y a 3 sachets. Dimitri achète 2 paquets de gâteaux. Combien y a-t-il de gâteaux ?	1 / 3 1 / 4 2 / ?	Proportionnalité simple composée					
2	Proportionnalité simple composée Dans 1 sachet de gâteaux il y a 4 gâteaux et dans 1 paquet il y a plusieurs sachets. Dimitri achète 2 paquets de gâteaux et obtiens donc 24 gâteaux. Combien v a-t-il de sachets ?	1 / ? 1 / 4 2 / 24						
3	Proportionnalité simple composée Dans un sachet de gâteaux il y a 4 gâteaux et dans 1 paquet il y a 3 sachets. Dimitri a 24 gâteaux. Combien y a-t-il de paquets de gâteaux ?	1 / 3 1 / 4 ? / 24						
4	Proportionnalité simple composée Dans 1 paquet de gâteaux il y a 3 sachets. Dimitri achète 2 paquets de gâteaux et obtiens 24 gâteaux. Combien y a-t-il de gâteaux dans 1 sachet ?	1 / 3 1 / ? 2 / 24						
1	Proportionnalité double Un café coûte 2 € par personne chaque jour, Combien 4 personnes paieront-elles en 5 jours ?	1 / 4 1 / 2 5 / ?	Proportionnalité double					
2	Proportionnalité double Un groupe de 4 personnes paye 40 € de café en 5 jours, Combien paiera 1 personne pour 1 café ?	1 / 4 1 / ? 5 / 40						
3	Proportionnalité double Un café coûte 2 € par personne chaque jour, Combien de personnes sont dans un groupe qui paye 40 € en 5 jours ?	1 / ? 1 / 2 5 / 40						
4	Proportionnalité double Un café coûte 2 € par personne chaque jour, Combien de jours sont nécessaires à 4 personnes pour payer 40 € ?	1 / 4 1 / 2 ? / 40						

Type	Exemple	Modélisation		CP	CE1	CE2	CM1	CM2
1	Comparaison multiplicative : recherche du référé Pierre a 9 ans et son père est 4 fois plus âgé que lui. **Quel est l'âge de son père ?**		Comparaison multiplicative			X	X	X
2	Comparaison multiplicative : recherche du référé Le père de Pierre a 36 ans et son fils 4 fois moins. **Quel est l'age de Pierre ?**					X	X	X
3	Comparaison multiplicative : recherche du nombre de fois + J'ai 40 billes et Tom en a 80. **Tom en a combien de fois plus que moi ?**					X	X	X
4	Comparaison multiplicative : recherche du nombre de fois - J'ai 80 billes et Tom en a 40. **Tom en a combien de fois moins que moi ?**					X	X	X
5	Comparaison multiplicative : recherche du référant Le père de Pierre a 36 ans, il est 4 fois plus âgé que son fils. **Quel est l'âge de Pierre ?**					X	X	X
6	Comparaison multiplicative : recherche du référant Pierre a 9 ans et il est 4 fois moins âgé que son père. **Quel est l'age de son père?**					X	X	X
1	Transformation de grandeurs : recherche de l'état final Une image mesure 10 cm de long. Je l'agrandis par un coefficient d'agrandissement de 2. **Quel est sa longueur actuelle ?**		Transformation de grandeurs					
2	Transformation de grandeurs : recherche de l'état final Une image mesurait 20 cm de long. Je la rétrécit par un coefficient de rétrécissement de 2. **Quel est sa longueur actuelle ?**							
3	Transformation de grandeurs : recherche de l'état initial Une image mesure maintenant 20 cm de long. Elle a été agrandie par un coefficient d'agrandissement de 2. **Quelle était sa longueur originelle ?**							
4	Transformation de grandeurs : recherche de l'état initial Un smartphone a une épaisseur de 8 mm. Son épaisseur à été divisée par 4 en 4 ans. **Quelle était son épaisseur originelle ?**							
5	Transformation de grandeurs : recherche de la transformation multiplicative Une pièce de monnaie mesure 2 cm de diamètre. A la loupe ce diamètre est de 10 cm. **Quel est l'agrandissement de la loupe ?**							
6	Transformation de grandeurs : recherche de la transformation divisive Sur une carte, une route mesure 10 cm. En réalité elle mesurait 1 m. **Quel est le rétrécissement de la carte ?**							
1	Composition de transformations de grandeurs : recherche de la composée Une image voit sa longueur multipliée par 2 puis par 3. **Quel est l'agrandissement total de la longueur de l'image ?**		Compositions de transformations de grandeurs					
2	Composition de transformations de grandeurs : recherche d'une composante Une image voit sa longueur multipliée par 2 puis encore multipliée par la suite. Globalement, sa longueur est multipliée par 6. **Quel est la valeur du second agrandissement ?**							
3	Composition de transformations de grandeurs : recherche d'une composante Je multiplie le prix d'un objet, puis je le multiplie encore par 4. Globalement son prix est multiplié par 20. **Quel est la valeur de la première multiplication ?**							
4	Composition de transformations de grandeurs : recherche de la composée Une image voit sa longueur multipliée par 6 et divisée par 3. **Quel est l'agrandissement total de la longueur de l'image ?**							
5	Composition de transformations de grandeurs : recherche d'une composante Une image voit sa longueur multipliée par 6 puis est divisée par la suite. Globalement, sa longueur est multipliée par 2. **Quel est la valeur de la réduction ?**							
6	Composition de transformations de grandeurs : recherche d'une composante Je multiplie le prix d'un objet, puis je divise ce prix par 4. Globalement son prix est multiplié par 5. **Quel est la valeur de la première multiplication ?**							
7	Composition de transformations de grandeurs : recherche de la composée Une image voit sa longueur divisée par 2 puis multipliée par 3. **Quel est l'agrandissement total de la longueur de l'image ?**							
8	Composition de transformations de grandeurs : recherche d'une composante Une image voit sa longueur divisée par 2 puis encore multipliée par la suite. Globalement, sa longueur est multipliée par 6. **Quel est la valeur du second agrandissement ?**							

Type	Exemple	Modélisation		CP	CE1	CE2	CM1	CM2
9	Composition de transformations de grandeurs : recherche d'une composante Je divise le prix d'un objet, puis je le multiplie encore par 4. Globalement son prix est multiplié par 2. **Quel est la valeur de la première division ?**	÷? x4 x2	Compositions de transformations de grandeurs					
10	Composition de transformations de grandeurs : recherche de la composée Une image voit sa longueur divisée par 4 puis multipliée par 2. **Quel est le facteur de réduction total de la longueur de l'image ?**	÷4 x2 ÷?						
11	Composition de transformations de grandeurs : recherche d'une composante Une image voit sa longueur divisée par 4 puis encore multipliée par la suite. Globalement, sa longueur est divisée par 2. **Quel est la valeur du second agrandissement ?**	÷4 x? ÷2						
12	Composition de transformations de grandeurs : recherche d'une composante Je divise le prix d'un objet, puis je le multiplie encore par 4. Globalement son prix est divisé par 2. **Quel est la valeur de la première division ?**	÷? x4 ÷2						
13	Composition de transformations de grandeurs : recherche de la composée Une image voit sa longueur multipliée par 3 et divisée par 6. **Quel est le facteur de réduction total de la longueur de l'image ?**	x3 ÷6 ÷?						
14	Composition de transformations de grandeurs : recherche d'une composante Une image voit sa longueur multipliée par 3 puis est divisée par la suite. Globalement, sa longueur est divisée par 2. **Quel est la valeur de la réduction ?**	x3 ÷? ÷2						
15	Composition de transformations de grandeurs : recherche d'une composante Je multiplie le prix d'un objet, puis je divise ce prix par 4. Globalement son prix n'a été divisé que par 2. **Quel est la valeur de la première multiplication ?**	x? ÷4 ÷2						
16	Composition de transformations de grandeurs : recherche de la composée Une image voit sa longueur divisée par 2 puis par 3. **Quel est le facteur de réduction total de la longueur de l'image ?**	÷2 ÷3 ÷?						
17	Composition de transformations de grandeurs : recherche d'une composante Une image voit sa longueur divisée par 2 puis encore divisée par la suite. Globalement, sa longueur est divisée par 6. **Quel est la valeur du second rétrécissement?**	÷2 ÷? ÷6						
18	Composition de transformations de grandeurs : recherche d'une composante Je divise le prix d'un objet, puis je le divise encore par 4. Globalement son prix est divisé par 20. **Quel est la valeur de la première division ?**	÷? ÷4 ÷20						
1	Produit Cartésien : recherche des possibilités Il y a 3 vestes et 4 pantalons. **Combien de tenues puis-je former ?** Il y a 4 colliers, 2 bracelets et 5 bagues. **Combien y a-t-il d'ensembles ?**	? 3 4	Produit cartésien			X	X	X
2	Produit Cartésien : recherche des possibilités Je peux former12 ensembles avec 3 vestes et des pantalons. **Combien ai-je de pantalons ?** Je peux former 40 parures avec 4 colliers, 2 bracelets et des bagues. Combien ai-je de bagues ?	12 3 ?				X	X	X
1	Configuration rectangulaire : recherche de l'aire Une feuille mesure 30 cm de Long et 21 cm de large. **Quelle est son aire ?**	21 ? X 30	Configuration rectangulaire			X	X	X
2	Configuration rectangulaire : recherche d'une longueur Une feuille à une aire de 630 cm². Sa longueur est 30 cm. **Quelle est sa longueur ?**	? 630 X 30				X	X	X
3	Configuration triangulaire : recherche de l'aire Un triangle rectangle a une base de 10 cm et une hauteur de 8 cm. **Quelle est son aire?**	8 ? X 10	Configuration Triangulaire					X
4	Configuration triangulaire : recherche de la base / hauteur Un triangle rectangle a une aire de 40 cm² et une hauteur de 8 cm. **Quelle est la longueur de sa base ?**	8 40 X ?						X
5	Configuration cubique : recherche d'un volume Un cube a une longueur de 10 cm, une largeur de 10 cm et une hauteur de 10 cm. **Quelle est son volume ?**	Volume X Longueur X Largeur	Configuration Cubique					X
6	Configuration cubique : recherche d'une hauteur / largeur / longueur Un cube a une longueur de 10 cm, une largeur de 10 cm et un volume de 1000 cm³. **Quelle est sa hauteur ?**	Volume Hauteur X Longueur X Largeur						X

Type	Exemple	Modélisation		CP	CE1	CE2	CM1	CM2
1	Proportionnalité simple, multiplication : Recherche du nombre d'éléments 1 dictionnaire coûte 38€. **Combien coûtent 8 dictionnaires ?**	1 | 38 8 | ?	Proportionnalité simple	X	X	X	X	X
2	Proportionnalité simple, division/partition : Recherche du nombre d'éléments par part L'achat de 12 dictionnaires identiques a coûté 372 €. **Quel est le prix d'un seul dictionnaire ?**	1 | ? 12 | 372		X	X	X	X	X
3	Proportionnalité simple, division/quotition : Recherche du nombre de parts Une fermière range 48 œufs dans des boîtes de 6 œufs. **Combien de boîtes d'œufs remplit-elle ?**	1 | 6 ? | 48			X	X	X	X
4	Proportionnalité simple : Règle de 3 4 dictionnaires identiques pèsent 10kg. **Combien pèseraient 14 dictionnaires ?**	4 | 10 14 | ?				X	X	X
1	Comparaisons de proportions : Abel mélange 12 cl de sirop et 16 cl d'eau. Chloé fait un mélange 1,5 fois plus concentré. **Quel est le rapport sirop/eau en cl du mélange de Chloé ?**	? ÷1,5 ↓ ↑ ×1,5 12/16	Comparaison de proportions					
2	Comparaisons de proportions : Abel mélange 12 cl de sirop et 16 cl d'eau. Chloé mélange 10 cl de sirop et 15 cl d'eau. **Qui à le mélange le plus concentré en sirop ? (combien de fois est-il plus concentré?)**	12/16 ÷ ? ↓ ↑ × ? 10/15						
1	Proportionnalité simple composée Dans un sachet de gâteaux il y a 4 gâteaux et dans 1 paquet il y a 3 sachets. Dimitri achète 2 paquets de gâteaux. **Combien y a-t-il de gâteaux ?**	1 | 4 1 | 3 2 | ?	Proportionnalité simple composé					X
2	Proportionnalité simple composée Dans 1 sachet de gâteaux il y a 4 gâteaux et dans 1 paquet il y a plusieurs sachets. Dimitri achète 2 paquets de gâteaux et obtiens donc 24 gâteaux . **Combien y a-t-il de sachets ?**	1 | 4 1 | ? 2 | 24						X
3	Proportionnalité simple composée Dans un sachet de gâteaux il y a 4 gâteaux et dans 1 paquet il y a 3 sachets. Dimitri a 24 gâteaux. **Combien y a-t-il de paquets de gâteaux ?**	1 | 4 1 | 3 ? | 24						X
4	Proportionnalité simple composée Dans 1 paquet de gâteaux il y a 3 sachets. Dimitri achète 2 paquets de gâteaux et obtiens 24 gâteaux. **Combien y a-t-il de gâteaux dans 1 sachet ?**	1 | ? 1 | 3 2 | 24						X
1	Proportionnalité double Un café coûte 2€ par personne chaque jour, **Combien 4 personnes paieront-elles en 5 jours?**	1 | 2 1 | 4 5 | ?	Proportionnalité double					X
2	Proportionnalité double Un groupe de 4 personnes paye 40€ de café en 5 jours, **Combien paiera 1 personne pour 1 café ?**	1 | ? 1 | 4 5 | 40						X
3	Proportionnalité double Un café coûte 2€ par personne chaque jour, **Combien de personnes sont dans un groupe qui paye 40 € en 5 jours ?**	1 | 2 1 | ? 5 | 40						X
4	Proportionnalité double Un café coûte 2€ par personne chaque jour, **Combien de jours sont nécessaires à 4 personnes pour payer 40 € ?**	1 | 2 1 | 4 ? | 40						X

Extensions des problèmes additifs, soustractifs, multiplicatifs et divisifs : Les problèmes complexes.

0	Combinaison de plusieurs types de problèmes simples : Concerne les problèmes avec des étapes multiples et l'utilisation de plusieurs modèles imbriqués et de plusieurs types de calculs.	Assemblage de modèles.		x	X	X	X	X

3 - 2 Problèmes ternaires

Définition : Problèmes dans lesquels il existe 3 termes sur lesquels portera l'opération, 2 connus et 1 inconnu. Plus simplement, trois données numériques sont en jeu. 2 données concernant un domaine commun (une grandeur) et 1 donnée qui est le rapport entre les 2. Les problèmes ternaires comprennent :

Ci-dessous sont listées les catégories de problèmes qui sont habituellement associées dans l'ensemble « ternaire ». Selon les auteurs, cet ensemble de catégories de problèmes est plus ou moins étoffé. Nous présentons ici une synthèse de ce qui est généralement proposé aux enseignants :

Les comparaisons multiplicatives : Combien de « fois plus » ou combien de « fois moins ». Le modèle schématique est le même que celui des comparaisons additives.

Le produit cartésien : C'est l'ensemble produit de 2 ensembles. Il permet de visualiser un ensemble de possibilités. C'est une catégorie ou il existe des relations de proportionnalité double. Les problèmes de produit cartésien peuvent se retrouver sous de multiples formes

– **La configuration rectangulaire :** C'est la recherche d'une longueur, d'une largeur ou de l'aire d'un rectangle ou d'un carré.
– **La configuration triangulaire :** C'est la recherche d'une base, d'une hauteur ou de l'aire d'un triangle.
– **La configuration cubique** : C'est la recherche d'un volume ou d'une des composantes de ce volume.

Les transformations de grandeurs : C'est la transformation multiplicative appliquée à un état (agrandissement ou réduction). Le modèle schématique est le même que la transformation additive.

Les compositions de transformations de grandeurs : C'est l'application de plusieurs transformations successives à un état défini. Le modèle schématique est le même que celui des compositions de transformations additives.

Les compositions de relations multiplicatives : c'est la réunion de plusieurs relations comparatives de nature multiplicative entre des états de référence. C'est la recherche de la comparaison multiplicative globale via ses parties. C'est le pendant multiplicatif de la composition de relations additives.

Les transformations de relations multiplicatives : c'est le passage temporel d'un état relatif à un autre via une transformation multiplicative. C'est donc la transformation d'une transformation en une autre transformation dans une logique temporelle. C'est le pendant multiplicatif de la transformation de relations additives.

Ces catégories se subdivisent elles aussi en plusieurs types de problèmes. Ces types de problèmes sont présentés dans le tableau de synthèse de la typologie des problèmes multiplicatifs. Ainsi, vous trouverez tous les types de problèmes multiplicatifs avec un exemple type, sa schématisation et une progression indicative allant du cycle 2 au cycle 3.

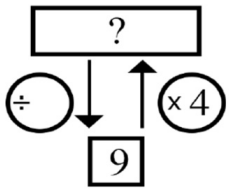
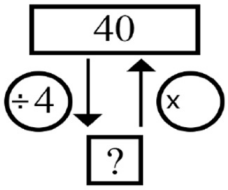
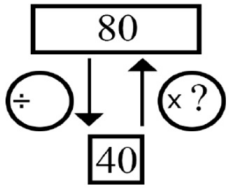
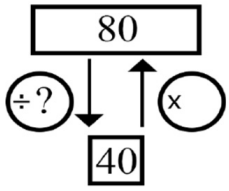
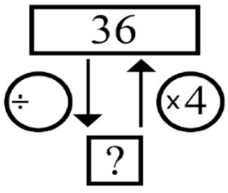
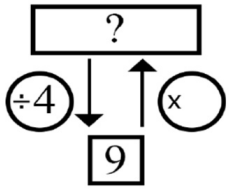
Pour chaque type une représentation schématique est proposée. Ces représentations permettent une structuration des données et des procédures pour les enseignants et les élèves. Chaque catégorie a sa représentation. Cette représentation s'est construite en se voulant explicite et efficace. Cette représentation est un support d'aide pour expliciter la structure du problème et comment le résoudre efficacement en ayant une connaissance fine de sa construction et donc des relations entre ses composantes.

3 - 2-1 Comparaisons multiplicatives

Les comparaisons multiplicatives ont la même structure que les comparaisons additives. Deux états sont liés par une relation de comparaisons multiplicative qui s'exprime par *« fois plus que »* et *« fois moins que »*. Comme pour la version additive, ce type de problème permet de montrer le lien entre la multiplication et la division en signifiant que si *« A est n fois plus grand que B »* alors *« B est n fois moins grand que A »*. Le schéma utilisé regroupe donc les 2 aspects de la comparaison « **plus que** » et « **moins que** », avec « **n fois plus que** » et « **n fois moins que** » afin de voir que le rapport entre 2 états est une valeur stable et que seul le signe change. « A est 3 fois plus riche que B » signifie aussi que « B est aussi 3 fois plus pauvre que A » ou « B est 3 fois moins riche que A. » 3 est fixe, c'est le rapport permettant de passer d'un élément à un autre. Seul le signe change. Pour résumer : $A = 3 \times B$ et donc $B = A \div 3$ et $A \div B = 3$

Les élèves peuvent aussi vérifier la justesse du calcul dans les 2 sens, car il y a un lien visuel clair entre la multiplication et la division. Il apparaît que les élèves peuvent donc être amenés à concevoir la multiplication comme la répétition de l'addition de grandeurs identiques et par corrélation la division comme une soustraction répétée de grandeurs identiques. Mais surtout, ils verront apparaître le parallélisme entre la multiplication et la division. Ce schéma est donc la prolongation du schéma correspondant aux « Comparaisons d'états » des problèmes additifs. L'intérêt est ici d'avoir les deux représentations en parallèle pour construire l'une avec l'autre et non l'une après l'autre. Les opérations se construisent ensemble, simultanément mais très progressivement. Le but est toujours d'éviter une vision unidirectionnelle du calcul mais de construire le nombre avec toutes les entrées calculatoires.

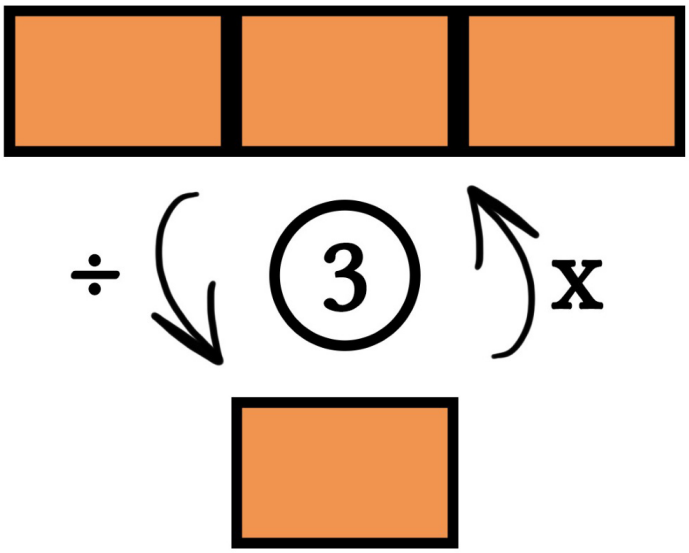
Tableau synthétique des problèmes type relevant des comparaisons multiplicatives :

Type	Exemple	Modélisation	
1	Comparaison multiplicative : recherche du référé Pierre a 9 ans et son père est 4 fois plus âgé que lui. **Quel est l'âge de son père ?**		Comparaisons multiplicatives
2	Comparaison multiplicative : recherche du référé Le père de Pierre a 36 ans et son fils 4 fois moins. **Quel est l'age de Pierre ?**		
3	Comparaison multiplicative : recherche du nombre de fois plus. J'ai 40 billes et Tom en a 80. **Tom en a combien de fois plus que moi ?**		
4	Comparaison multiplicative : recherche du nombre de fois moins. J'ai 80 billes et Tom en a 40. **Tom en a combien de fois moins que moi ?**		
5	Comparaison multiplicative : recherche du référant Le père de Pierre a 36 ans, il est 4 fois plus âgé que son fils. **Quel est l'âge de Pierre ?**		
6	Comparaison multiplicative : recherche du référant Pierre a 9 ans et il est 4 fois moins âgé que son père. **Quel est l'age de son père ?**		

Nous voyons l'avantage, en faisant modéliser systématiquement le sens de la division, de familiariser l'élève avec cette technique opératoire ainsi qu'avec son sens. Ainsi, avant l'apprentissage formel de la technique opératoire l'élève connaît déjà *« le sens »* de celle-ci, ce qu'elle représente, sa nature et même comment réaliser mentalement l'opération. Bien sur, l'élève a déjà rencontré des situations de partage (ou de quotition) mais nous amenons ici une formalisation de ce calcul en lien avec la multiplication, multiplication utilisée dans le calcul posé de la division.

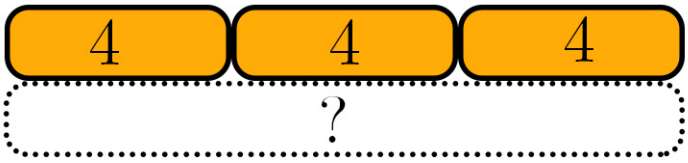
Nous appliquons donc ici le même principe que celui concernant l'addition et la soustraction et que nous avons préalablement détaillé. Une étude parallèle plutôt que séquentielle pour une construction du nombre plus solide et un développement certain des habiletés calculatoires.

Il faut néanmoins rester vigilant sur une hypothétique confusion entre les termes additifs et multiplicatifs. Une même situation peut impliquer la recherche de *« plus que »* et de *« fois plus que »*. Il faut donc que les élèves soient toujours vigilants quant aux indices lexicaux.

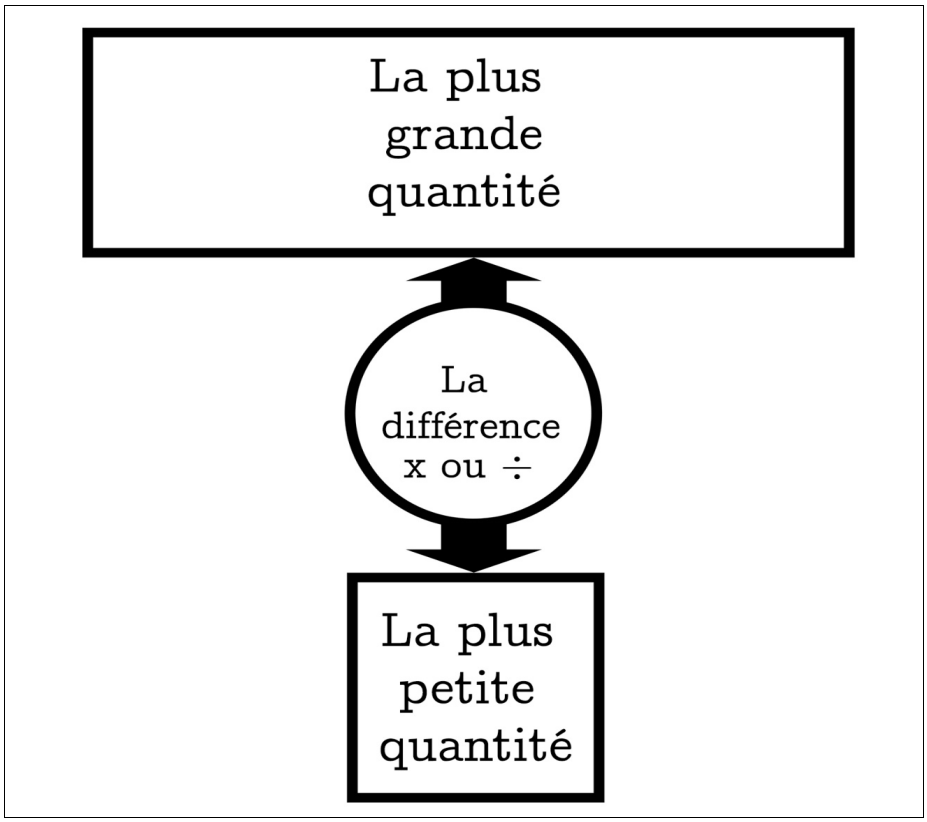


Le schéma utilise la même structure que les comparaisons additives aussi il est primordial de faire représenter ce que sont les 2 comparaisons afin d'en saisir les différences. Dans le cas de la comparaison multiplicative, la structure correspond à la reprise du même élément de base « n fois ». Le plus petit élément est réitéré plusieurs fois. Dans le cas d'une comparaison additive, le plus petit élément est maintenu mais avec l'adjonction d'une « différence ». La confusion entre les 2 signifie peut-être que l'élève ne différencie pas l'ajout d'un élément à une quantité connue et la répétition de la même quantité.

« Benoit a 4 billes et Carla en a 3 fois plus. Combien de billes a Carla ? »



Benoit possède la quantité « 4 ». Carla en possède 3 fois plus soit 3 fois la quantité « 4 ». Ce modèle fait apparaître l'itération de la quantité « 4 », faisant le lien entre l'addition et la multiplication. La comparaison multiplicative est de nature répétitive en faisant modéliser plusieurs fois la même quantité.

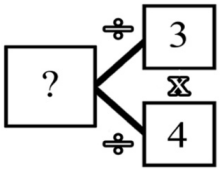
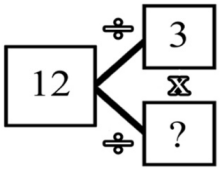


Cette modélisation est également possible dans le cas de la comparaison multiplicative. La structure est similaire à la comparaison additive ainsi nous pouvons représenter les états et la relation qui va les lier de manière identique, la différence se fera sur les signes en jeu.

3 - 2-2

Produit cartésien

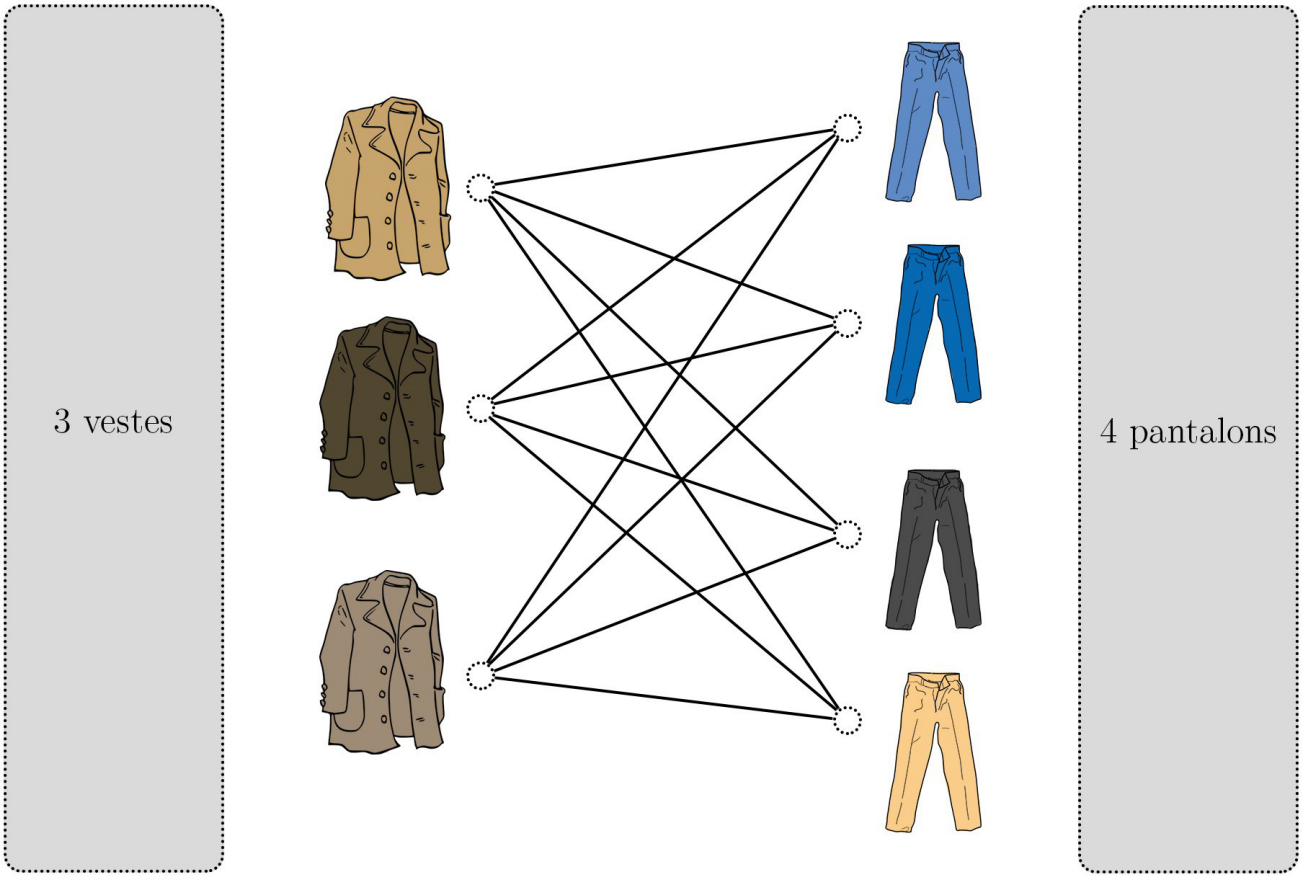
Tableau synthétique des problèmes type relevant du produit cartésien :

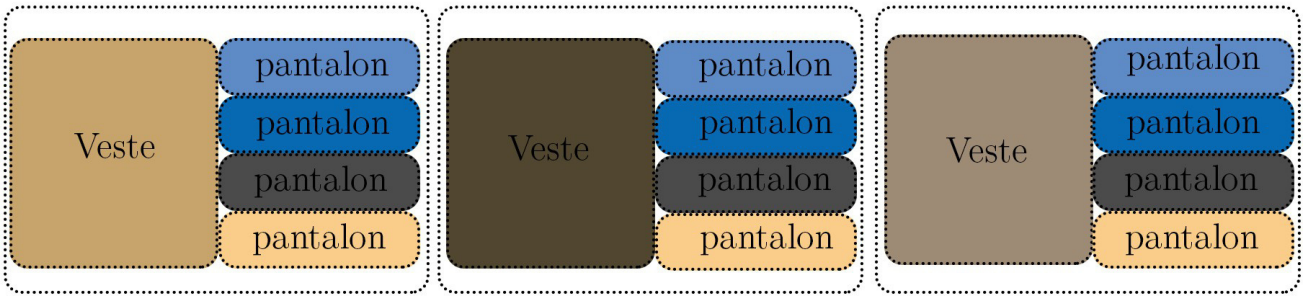
Type	Exemple	Modélisation	
1	Produit Cartésien : recherche de l'ensemble produit Il y a 3 vestes et 4 pantalons. **Combien de tenues puis-je former ?** Il y a 4 colliers, 2 bracelets et 5 bagues. **Combien y a-t-il d'ensembles ?**		Produit cartésien
2	Produit Cartésien : recherche d'un ensemble Je peux former12 ensembles avec 3 vestes et des pantalons. **Combien ai-je de pantalons ?** Je peux former 40 parures avec 4 colliers, 2 bracelets et des bagues. **Combien ai-je de bagues ?**		

Comme détaillé auparavant, le produit cartésien regroupe un ensemble de situations multiplicatives qui relèvent de la proportionnalité double avec une structure qui peut être ternaire ou quaternaire et qui peuvent être modélisées sous des formes légèrement différentes. Nous faisons le choix de détailler toutes ces variantes indépendamment pour expliciter toutes les situations qui peuvent en découler car d'une même structure abstraite, il y a une multitude de situations très caractéristiques qui se représentent très différemment. Ici, la structure interne est très ardue à percevoir, même pour l'enseignant expert. Nous sommes donc dans un cas où l'étude se fera sur une structure intermédiaire entre la structure abstraite et la structure de surface.

Définition : Pour tout ensemble A et tout ensemble B, il existe un ensemble dont les seuls éléments sont tous les couples dont la première composante appartient à A et la seconde à B . Le produit cartésien nous permet de concrétiser l'ensemble produit de plusieurs ensembles. Le produit cartésien est donc une composition multiplicative d'éléments au sein d'un ensemble produit. La représentation sous forme d'arbre avec toutes les combinaisons est très fréquemment utilisée. Chaque embranchement correspond à une nouvelle possibilité. C'est l'addition des embranchements qui donne l'ensemble des possibilités mais comme l'itération d'additions est un produit, nous obtenons naturellement une multiplication d'un élément par ceux qui vont s'y lier.

Représentation des possibilités :





Visualisation des ensembles :

Pour 1 veste j'ai 4 choix de pantalons. J'ai 3 vestes, donc 3 fois 4 choix. La création de la représentation sous forme d'arbre par les élèves permettra de faire ressortir dans un second temps la structure multiplicative sous-jacente.

Il est nécessaire de respecter l'évolution : **Manipulation, Modélisation, Abstraction** pour faire émerger la structure du calcul et les interactions entre les ensembles.

Manipulation : Je dessine toutes les possibilités. Je représente la situation en la verbalisant et en associant les éléments.

Modélisation : Je lie les éléments sous forme d'arbre comme sur le modèle ci-dessus pour concrétiser l'ensemble des relations. Je peux lister les ensembles/couples qui découlent de la phase de manipulation.

Abstraction : Je pose la structure multiplicative correspondante

Cas de la recherche d'un ensemble (B) lorsque l'ensemble (A) et l'ensemble produit ($A \times B$) sont connus. Nous sommes alors dans le cas d'une multiplication à trou qui se résout par une division. Dans le premier cas cela reviendrait à se poser la question suivante : « J'ai 3 fois combien de choix pour obtenir 12 ? » qui se résout aisément par calcul mental.

Non commutativité :

Le produit cartésien n'est pas commutatif, c'est-à-dire que A×B est différent de B×A. Le calcul peut paraître similaire et le résultat identique, il n'en reste pas moins que le sens même de la démarche est différent. Voyez l'exemple suivant :

Ensemble A ={rouge, vert, bleu}

Ensemble B ={collier, bague}

— Soit AB = { (rouge, collier), (rouge, bague), (vert, collier), (verte, bague), (bleu, collier), (bleu, bague) }

Donc AB = 3 × 2 = 6 couples.

— Soit BA = { (collier, rouge), (collier, vert), (collier, bleu), (bague, rouge), (bague, vert), (bague, bleu) }

Donc BA = 2 × 3 = 6 couples.

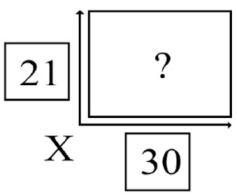
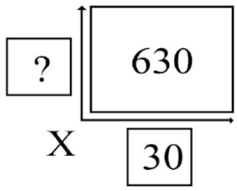
Le nombre de couples est identique mais les couples sont différents même s'ils sont constitués des mêmes éléments. Le schéma précédent est structurellement identique au schéma de composition du domaine additif. Le produit cartésien est représentatif d'un ensemble (le Tout) qui est le **produit** de ses sous-ensembles (les parties) quand la composition est, elle, la **somme** de ses parties. Ainsi la structure est identique et permet de modéliser les relations entre la multiplication et la division comme les relations entre addition et soustraction tout en faisant visualiser les liens Addition/Multiplication et Soustraction/Division. Cela permet ainsi de lier les affichages méthodologiques avec les relations suivantes :

Si $3 \times 4 = 12$
alors $12 \div 3 = 4$
et $12 \div 4 = 3$

Une multiplication à trou conduit à une division comme méthode de résolution sur la même base que la composition additive avec l'addition à trou. Les opérations sur les nombres ne sont pas vues comme des éléments disjoints, elles sont liées en permanence et la construction de ces familles d'opérations permet de à l'élève de construire sa représentation d'un nombre plus solidement.

3 - 2-3 Configuration rectangulaire

Tableau synthétique des problèmes type relevant de la configuration rectangulaire :

Type	Exemple	Modélisation	
1	Configuration rectangulaire : recherche de l' aire Une feuille mesure 30 cm de Long et 21 cm de large. **Quelle est son aire en cm² ?**		Configuration rectangulaire
2	Configuration rectangulaire : recherche d'une grandeur. Une feuille à une aire de 630 cm². Sa longueur est 30 cm. **Quelle est sa longueur en cm ?**		

La configuration rectangulaire obéit à la structure du produit cartésien (un ensemble AB est le produit des ensembles A et B). L'Aire est la grandeur produit de deux grandeurs (longueur et largeur) et la mesure de l'aire va dépendre proportionnellement de la mesure de la longueur « L » et de la mesure de la largeur « l ». L'aire est donc liée aux deux ensembles *Longueur* et *largeur* soit Aire $=f$ (L, l). Si l'une des variables est fixée et devient constante, l'aire va croître ou décroître de manière proportionnelle à l'autre variable. Cette constante fait office de coefficient de proportionnalité et cette structure est à proportionnalité double. Si « L » ne varie pas, « L » est coefficient de proportionnalité et Aire varie en fonction de « « l. Si « l » ne varie pas, « l » est coefficient de proportionnalité et Aire varie en fonction de « L ».

Comme dit précédemment, nous optons pour une étude séparée en deux catégories (produit cartésien et configuration rectangulaire) même si la configuration rectangulaire découle d'une composition multiplicative de plusieurs ensembles. Ce choix est fait dans le but d'approfondir par la suite le travail géométrique avec une modélisation pertinente et caractéristique. Il en est de même de la volonté de développer la modélisation pour aboutir aux problèmes de recherche d'un volume par adjonction d'une dimension supplémentaire.

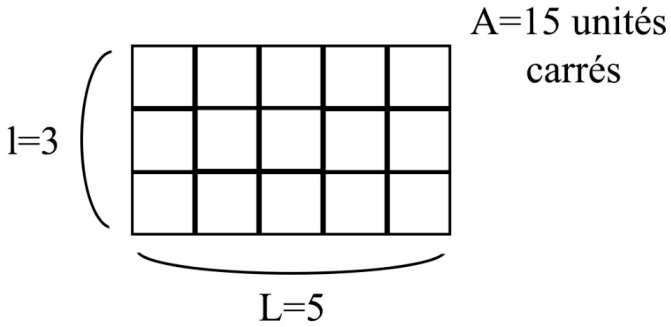
Ainsi nous partons d'une modélisation « source » qui sera légèrement modifiée visuellement mais pas structurellement ; la modélisation garde l'ensemble produit de deux ensembles. La première modélisation est un outil adaptable selon les situations relevant du produit cartésien.

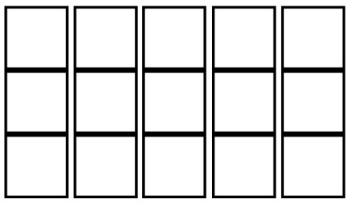
L x l = Aire et par réciprocité L = Aire / l et l = Aire / L

Les quadrillages sont d'excellents supports pour démarrer et présenter ce type de problème, tout comme pour étayer la résolution et expliciter les relations. Cela permet d'utiliser en parallèle multiplication et division.

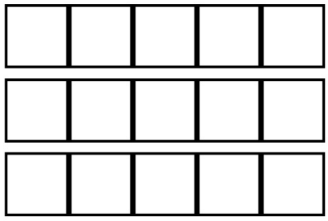
<u>Exemple de ce qui peut être fait pour débuter :</u>

Combien y a-t-il de carrés sur cette tablette de chocolat ?



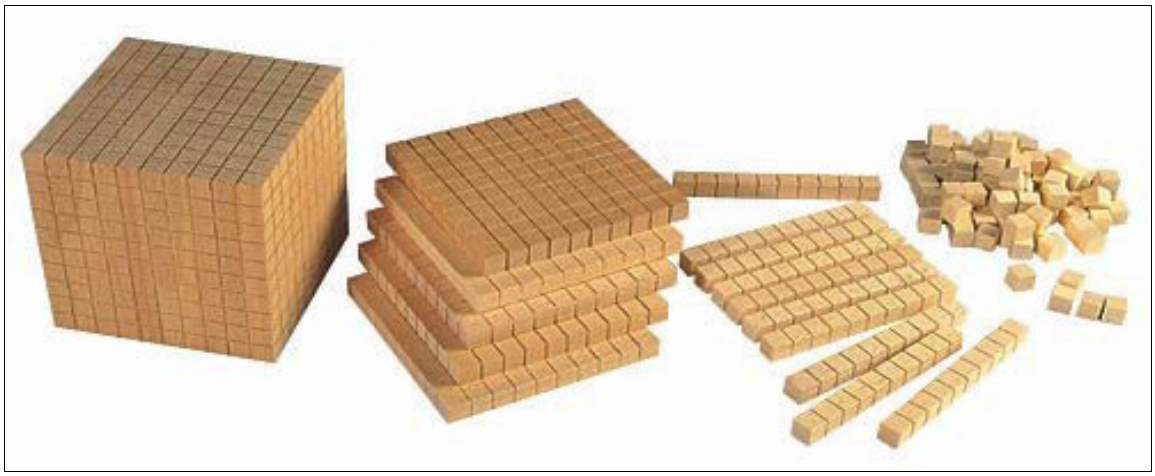


l = A / L



L = A / l

Autre matériel envisageable pour manipuler, les plaquettes et barres de numération :



Je connais la largeur et la Longueur, je trouve l'Aire.

- Il y a 3 lignes de 5 carrés, c'est 5+5+5 soit 3 × 5 donc 15 carrés.
- Il y a 5 colonnes de 3 carrés, c'est 3+3+3+3+3 soit 5 × 3 donc 15 carrés.

Je connais l'Aire et la Longueur, je trouve la largeur.

- Je prends 1 unité de Longueur et je regarde combien d'unités de largeur la composent. Je vois que sur 1 unité de Longueur il y a 3 unités de largeur.
- J'ai 5 unités de Longueur donc 5 fois 3 unités de largeur.
- Je vois aussi que 15 unités séparées en 5 morceaux donnent 3.
- Il en résulte 5 x… = 15 et donc 15 / 5 =…

Je connais l'Aire et la largeur, je trouve la Longueur.

- Je prends 1 unité de largeur et je regarde combien d'unités de longueur la composent. Je vois que sur 1 unité de largeur il y a 5 unités de Longueur.
- J'ai 3 unités de largeur donc 3 fois 5 unités de Longueur.
- Je vois aussi que 15 unités séparées en 3 morceaux donnent 5.
- Il en résulte 3 x… = 15 et donc 15 / 3 =…

Il est primordial de poser les 2 égalités pour encore une fois faire le lien entre multiplication et division et observer une fois de plus la réversibilité et la complémentarité des calculs.

De multiples activités sont envisageables pour aborder ce thème. Il ne faut pas oublier que, du fait de la structuration de notre projet, l'avancement de chaque élève est différent et un élève peut se retrouver confronté à ce type de problème en avance par rapport à la programmation globale de l'enseignant. Un atelier dédié à ce domaine peut être mis en place pour approfondir découverte et consolider l'enseignement de la notion avant que l'élève ne revienne vers la résolution du problème rencontré, pour revenir ensuite vers une leçon dédiée et de l'entraînement. L'élève est donc allé chercher l'outil nécessaire à la résolution du problème rencontré et l'enseignant a proposé ce qui était pertinent et nécessaire. La notion sera tout de même étudiée en classe le moment venu et l'enseignant pourra s'appuyer sur les élèves déjà familiers de cette notion.

La configuration rectangulaire s'applique aux parallélogrammes (cotés opposés parallèles deux à deux) particuliers dans lesquels on trouve les rectangles (parallélogrammes à angles droits), les losanges (parallélogrammes à côtés adjacents égaux) et les carrés (à la fois rectangles et losanges). Ce type de problème ne se limite pas qu'aux aires.

Exemple : « Dans une salle de classe il y a 4 rangées de chaises et il y a 6 chaises dans chaque rangée. **Quel est le nombre de chaises ?** »

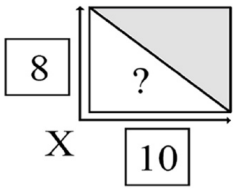
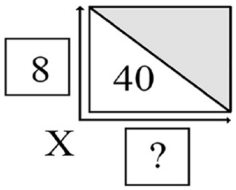
- On remarque immédiatement le caractère « proportionnel » de ce problème.
- Il y a deux ensembles « rangées » et « chaises ».
- L'ensemble produit est le nombre total de chaises sur toutes les rangées.

3 - 2-4 Configuration triangulaire

La configuration triangulaire est une représentation issue de l'extension de la catégorie « configuration rectangulaire » dans le cas particulier des triangles rectangles. Cette extension permet la modélisation de la situation particulière de recherche des aires ou longueurs de ces polygones particuliers. Le triangle rectangle a en effet la particularité d'avoir pour aire la demi-aire d'un quadrilatère dont tous les angles sont droits. Cela concerne donc tous les types de triangles rectangles.

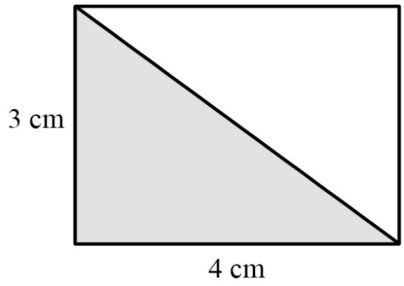
La formule de l'aire d'un triangle est la même quelle que soit la nature du triangle or il serait trompeur de calquer cette modélisation à tous les types de triangles, et donc à toutes les situations impliquant des triangles. Nous sommes ici dans un cas particulier qui a une modélisation particulière mais qui permet par la suite de faire le lien avec la relation « Aire triangle = Demi Aire du parallélogramme » (dont le rectangle est un cas particulier).

Tableau synthétique des problèmes type relevant de la configuration triangulaire :

Type	Exemple	Modélisation	
3	Configuration triangulaire : recherche de l'aire Un triangle rectangle a une base de 10 cm et une hauteur de 8 cm. **Quelle est son aire ?**		Configuration triangulaire
4	Configuration triangulaire : recherche de la base / hauteur Un triangle rectangle a une aire de 40 cm² et une hauteur de 8 cm. **Quelle est la longueur de sa base ?**		

Le calcul de l'aire d'un triangle peut s'aborder par manipulation, observation et déduction dans le cadre d'un problème de recherche seul ou en groupe. Il est également possible (mais plus rapide et plus efficace d'après nos observations) d'expliquer directement à l'élève la stratégie de résolution en faisant devant lui et avec lui avant de

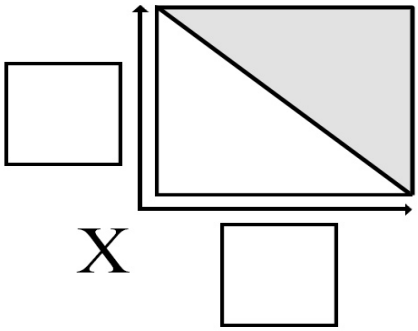
proposer d'autres activités pour travailler cette notion. Le cas le plus simple est celui du triangle rectangle inscrit dans un rectangle.



Quelle est l'aire du triangle gris ?

Il est possible de réaliser ce travail avec une base composée de cubes ou de carrés. La manipulation (par construction) permet de vérifier que le triangle gris a une aire égale à la moitié de celle du rectangle. Sans démontrer de manière formelle la formule de calcul, la phase concrète permet d'en saisir d'abord le principe et de proche en proche en déduire l'aire à partir de celle du rectangle (approche inductive). De manière similaire, si l'enseignant opte pour une démonstration directe de la notion par explicitation, la manipulation/ le dessin de la pratique guidée vont venir confirmer son explication. Il en va de même pour une base carrée et non rectangulaire (mais cela dépasse les attendus du primaire)

La superposition des formes permet de valider le fait que l'aire des deux triangles est identique et que la somme des aires de ces deux triangles rectangles est l'aire d'un rectangle. Cette approche « pratique » induit alors directement la modélisation permettant la résolution du problème :



L'aire du triangle rectangle est alors l'aire du rectangle associé (L x l) que je vais diviser par 2, car son Aire équivaut à la moitié de celle du rectangle, soit :

Aire triangle = (L x l) / 2

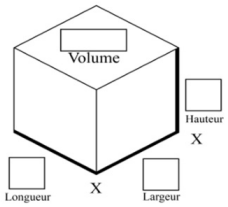
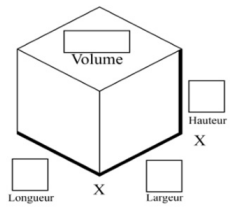
Ainsi, je peux également retrouver la base ou la hauteur selon les données connues.

Base du triangle = (Aire / hauteur) x 2 ou (2 x Aire) / hauteur

Hauteur du triangle = (Aire / base) x 2 ou (2 x Aire) / base

3 - 2-5 Configuration cubique

Tableau synthétique des problèmes type relevant de la configuration cubique :

Type	Exemple	Modélisation	
5	Configuration cubique : recherche d'un volume Un cube a une longueur de 10 cm, une largeur de 10 cm et une hauteur de 10 cm. **Quel est son volume ?**		Configuration cubique
6	Configuration cubique : recherche d'une hauteur / largeur / longueur Un cube a une longueur de 10 cm, une largeur de 10 cm et un volume de 1000 cm^3. **Quelle est sa hauteur ?**		

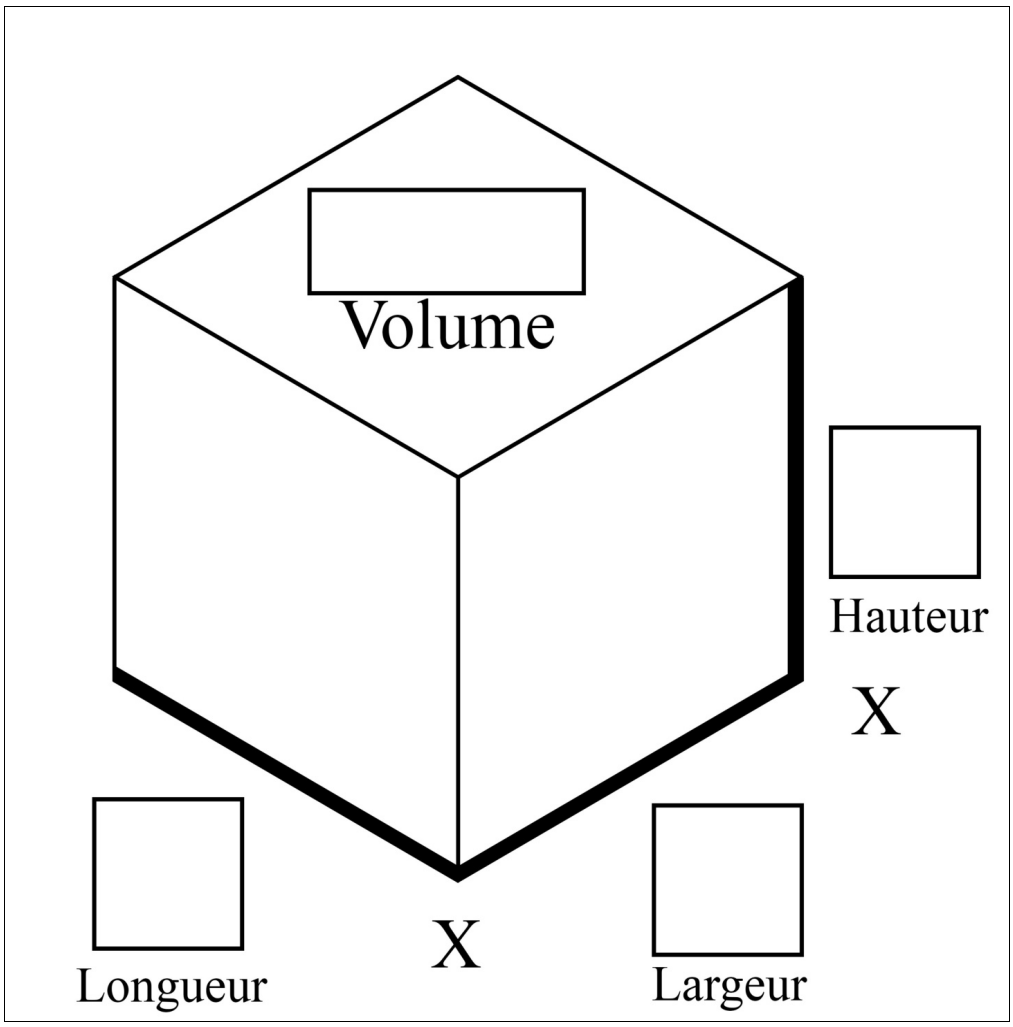
Les problèmes de recherche d'un volume sont intégrés dans notre typologie par dérivation des problèmes de configuration rectangulaire, qui sont eux-mêmes des dérivations du problème « base » de produit cartésien. La recherche d'un volume correspond à un problème de type « produit cartésien » de 3 ensembles ou l'ensemble produit est le volume. Les 3 ensembles sont les 3 dimensions en jeu. Puisque nous séparons produit cartésien et configuration rectangulaire, la configuration cubique apparaît donc par extension du précédent. La configuration cubique est donc également un problème relevant de la double proportionnalité.

La configuration cubique est une extension des problèmes de configuration rectangulaire par l'adjonction d'une dimension supplémentaire. Ces problèmes de recherche d'un volume ou d'une composante d'un volume sont présents dans le fichier de niveau 5. La mesure recherchée du volume est l'extension de la configuration rectangulaire des parallélogrammes particuliers. Il s'agit donc des volumes des cubes, pavés droits et parallélépipèdes rectangles.

La configuration cubique est une évolution visuelle du modèle « Partie-Tout » ou le volume est l'ensemble produit de 3 éléments (longueur, largeur et hauteur). Il est donc possible de reprendre le modèle originel et d'y adjoindre les 3 éléments. Mais dans un

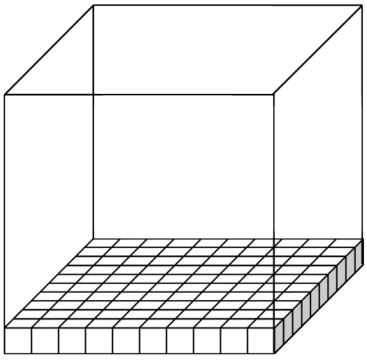
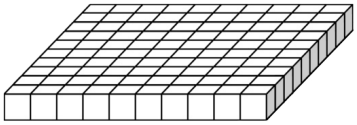
souci de représentation « parlante », nous optons pour une représentation isométrique.

Ce modèle permet de visualiser le lien « Longueur x Largeur x Hauteur » pour le cube afin de l'étendre aux autres volumes (pavés, parallélépipèdes rectangles.)



Les cubes et plaquettes du matériel **Lubienska** sont d'excellents supports pour le passage de la notion d'Aire à la notion de Volume en établissant la corrélation entre les 3 dimensions.

Le cube de 1000 unités se compose de plaquettes de 100 unités. La plaquette représente alors l'Aire et permettra par la suite d'accéder à la notion de volume. Il devient alors simple pour l'élève de voir et comprendre le lien entre le Cube d'unité et le Cube de 1000.

		
— Un mètre cube (1 m^3) — Le cube représente aussi 1000 cm^3	— Un dixième du mètre cube. — Une plaquette de 100 unités représente aussi 100 cm^2.	— Un millième du mètre cube. — L'unité peut représenter 1 cm^3 dans le cas du volume ou 1 cm^2 dans le cas d'une aire.

Les recherches d'un volume permettent encore une fois de travailler sur le lien « multiplication / division » selon que la mesure recherchée soit une composante (Largeur, longueur, hauteur) ou la composée (Volume).

Par similitude avec la modélisation des situations de « partie-partie-tout », le tout « Volume » est la résultante de la multiplication des parties. À l'inverse, une partie est la résultante de la division du Tout « Volume » par les parties connues. Cela nous permet de retravailler la notion de multiplication à trou et l'emploi de la division et encore une fois de travailler les liens suivants : Multiplication / Division, la relation Multiplication / Addition et Soustraction / Division.

<u>Exemple :</u>

Prenons un pavé de hauteur = 2 cm, largeur = 3 cm et longueur 4 cm.
Son volume est = h × l × L = 24 cm^3
Sa hauteur est = V / (l × L) = 24 / (3 × 4) = 2 cm
Sa Longueur est = V / (h × l) = 24 / (2 × 3) = 4 cm
Sa largeur est = V / (h × L) = 24 / (2 × 4) = 3 cm

Les problèmes de variation de volume (ou de hauteur) dans un aquarium/ piscine (ou tout autre volume dont l'aire à la base est fixe avec l et L fixes) permettent de cibler la variation proportionnelle du volume en fonction d'une seule variable. Nous pouvons donc travailler la représentation d'un volume donné en modifiant une seule variable (10 m^3 c'est 1×1×10 mais aussi 1×2×5).

Bien que la structure fasse apparaître 4 éléments (longueur, largeur, hauteur et leur produit : le volume) et qu'on puisse alors évoquer un aspect « quaternaire » avec 3

nombres connus et 1 nombre inconnu, il convient de préciser que la structure est pourtant fondamentalement ternaire. Dans un problème quaternaire il y a les 2 domaines connus ainsi que le rapport fonctionnel entre ces domaines. Ici il y a 3 domaines connues et il n'y a pas de rapport fonctionnel entre elles, mais entre elles et le domaine produit (le volume). C'est donc, selon nous, un problème « ternaire développé », dans le sens ou la structure basique est respectée mais en y ajoutant un domaine de grandeur.

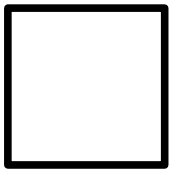
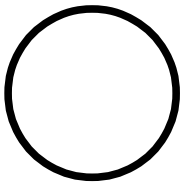
3 - 2-5 Transformation multiplicative de grandeurs

Les transformations de grandeurs impliquent la présence d'un domaine de grandeur dans un état stable (initial ou final) sur lequel opérera une transformation de nature multiplicative pour migrer vers un nouvel état stable. La structure de ce problème peut se percevoir comme les transformations additives. Ces transformations sont dans la majorité des cas des agrandissements (multiplication) ou des réductions (division) de mesures.

Ces problèmes sont typiques de l'usage d'un coefficient d'agrandissement ou de réduction (microscope, appareil photo, loupe, carte).

Exemple : Une mouche mesure 1 cm à l'œil nu. Je l'observe au microscope avec un coefficient d'agrandissement de 8. Quelle sera sa taille apparente au microscope.

Dans ce cas, la mouche mesure « en apparence » 8 fois sa taille initiale.

Modélisation	Exemple
	État initial, intermédiaire au final. Le carré représente une structure stable, un élément donné, un fait établi.
	Transformation appliquée à un état donné. La transformation peut être multiplicative ou additive. Le cercle représente une évolution, un changement qui se caractérise par l'écriture du nombre et d'un signe.

Les problèmes de transformations de grandeurs ne doivent pas être confondus avec les comparaisons multiplicatives. Ils ne présentent ici aucune comparaison entre les mesures mais ils signifient la nature de la transformation menant d'une mesure initiale à une mesure finale. (c'est le principe du zoom sur un appareil photo)

Tableau synthétique des problèmes type relevant des transformations multiplicatives de grandeurs :

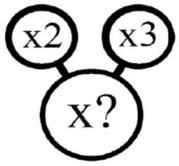
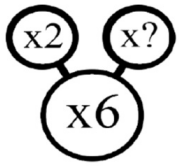
Type	Exemple	Modélisation	
1	Transformation de grandeurs : recherche de l'état final Une image mesure 10 cm de long. Je l'agrandis par un coefficient d'agrandissement de 2. **Quelle est sa longueur actuelle ?**	10 → x 2 → ?	Transformation de grandeurs
2	Transformation de grandeurs : recherche de l'état final Une image mesurait 20 cm de long. Je la rétrécis par un coefficient de rétrécissement de 2. **Quelle est sa longueur actuelle ?**	20 → ÷ 2 → ?	
3	Transformation de grandeurs : recherche de l'état initial Une image mesure maintenant 20 cm de long. Elle a été agrandie par un coefficient d'agrandissement de 2. **Quelle était sa longueur originelle ?**	? → x 2 → 20	
4	Transformation de grandeurs : recherche de l'état initial Un smartphone a une épaisseur de 8 mm. Son épaisseur à été divisée par 4 en 4 ans. **Quelle était son épaisseur originelle ?**	? → ÷ 4 → 8	
5	Transformation de grandeurs : recherche de la transformation multiplicative Une pièce de monnaie mesure 2 cm de diamètre. À la loupe ce diamètre est de 10 cm. **Quel est l'agrandissement de la loupe ?**	2 → x ? → 10	
6	Transformation de grandeurs : recherche de la transformation divisive Sur une carte, une route mesure 10 cm. En réalité elle mesurait 1 m. **Quel est le rétrécissement de la carte ?**	100 → ÷ ? → 10	

Précision : Une mesure est une itération de l'unité (5 cm, c'est 5 fois 1 cm) donc une transformation multiplicative de grandeurs est une multiplication (la transformation) d'une multiplication (la mesure).

Nous n'avons pas proposé ce type de problème dans les fichiers de résolution, car il est difficile d'inclure tous les types et de les étudier tous en ayant un temps d'approfondissement et d'entraînement suffisant. Par contre, comme ces problèmes sont des situations récurrentes pour la notion « d'échelles » avec agrandissement et réduction de cartes, de croquis ou d'objets observés, il apparaît qu'ils seront mobilisés dans le cadre des sciences ou de la géographie. Ainsi, ce type de problème multiplicatif relève-t-il peut-être plus du secondaire dans sa fréquence d'utilisation et dans son intégration au « quotidien » de l'élève même si la structure mathématique est abordable dès le primaire.

3 - 2-6 Composition de transformations de grandeurs

Nous ne représenterons pas l'ensemble des types (18) qui détaillent les compositions de transformations de grandeurs. Leur structure est similaire à celle des compositions de transformations additive ce qui implique un mode de résolution semblable.

Type	Exemple	Modélisation	
1	Une image voit sa longueur multipliée par 2 puis par 3. **Quel est l'agrandissement total de la longueur de l'image ?**		Configuration cubique
2	Une image voit sa longueur multipliée par 2 puis encore multipliée par la suite. Globalement, sa longueur est multipliée par 6. **Quelle est la valeur du second agrandissement ?**		

Ce type de problème permet également d'aborder les transformations d'une mesure par un coefficient qui est sous forme fractionnaire. La fraction est un condensé de transformations opérées par des entiers. Appliquer un agrandissement de $\frac{2}{3}$, c'est doubler les dimensions avant de les diviser par 3. C'est aussi diviser par 3 les dimensions avant de les doubler. Mais c'est surtout appliquer une réduction de $\frac{3}{2}$. Il faut garder à l'esprit qu'ici une réduction est une division et un agrandissement une multiplication et que dans le cas d'une fraction supérieur à 1, l'effet produit est à l'inverse du sens « supposé » de l'opération.

Exemple d'aides :

Je cherche la transformation globale :

– Deux transformations de même signe : Je multiplie obligatoirement les transformations, j'ajoute le signe après. (J'ai une réduction je place un ÷, j'ai un agrandissement je place un x)

– Une transformation multiplicative et une divisive : Je divise obligatoirement la transformation la plus importante par la plus petite, j'ajoute le signe de la plus grande Transformation après. (÷ ou x selon la grandeur qui l'emporte.)

Je cherche une transformation, je connais la globale :

– Deux transformations de même signe : Je divise la transformation globale par la composante, j'ajoute le signe de la globale après.

– Deux transformations de signes opposés : Je multiplie obligatoirement la transformation globale avec la composante, j'ajoute le signe de la globale après.

3 - 2-8 Composition de relations multiplicatives

Les compositions de relations multiplicatives ont la même structure dans le champ multiplicatif que les compositions de relations additives dans le champ additif. Il n'y a pas d'états, mais il y a deux relations : une de A vers B et une de ma B vers A. Les compositions de relations ont une structure proche des compositions de transformations ; la relation, où l'état relatif, étant codée dans notre grammaire par un cercle. La structure des compositions de relations est donc visuellement la synthèse des structures de composition d'états et de compositions de transformations (dans une approche multiplicative).

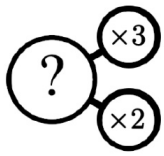
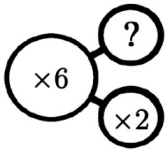
Nous utilisons ici des états relatifs (donc par rapport à un état normé qui peut être signifié ou non). Deux relations (ou plus) se composent pour donner un état relatif global.

Nous n'aborderons pas spécifiquement ce type de problème multiplicatif (avec étude structurelle), mais il peut être proposé par l'enseignant ou introduit pour aller plus loin lors d'un travail sur les comparaisons multiplicatives.

exemple :

« J'ai 3 fois plus de billes que Tom qui en a 2 fois plus que Paul. Paul a combien de fois moins de billes que moi ? Combien de fois plus de billes que Paul ai-je avec moi ? »

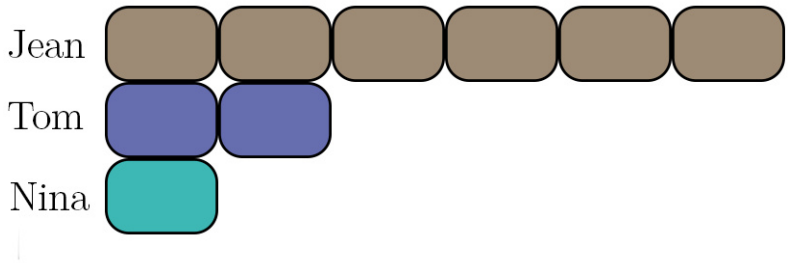
Nous sommes dans une situation de composition des relations de comparaison multiplicative entre 3 éléments avec une relation globale permettant de lier directement les éléments. Avoir 3 fois plus que Tom qui a 2 fois plus que Paul revient à avoir 6 fois plus que Paul. Ou alors, selon la référence choisie, Paul a 6 fois moins que moi.

Type	Exemple	Modélisation	
1	Recherche de la composition globale. Jean a 3 fois plus de billes que Tom et Tom a 2 fois plus de billes que Nina. **Jean a combien de fois plus de billes que Nina ?**		Composition de relations
2	Recherche d'une relation. Jean a 6 fois plus de billes que Nina et Tom a 2 fois plus de billes que Nina. **Jean a combien de fois plus de billes que Tom?**		

Type 1 :

Il y a ici composition de relations multiplicatives ou le « tout » est le produit des deux relations. Jean a 6 fois plus de billes que Nina, car il a 3 fois la quantité de Tom qui a 2 fois la quantité de Nina. Pour une quantité « 1 », Jean aura « 6 » .

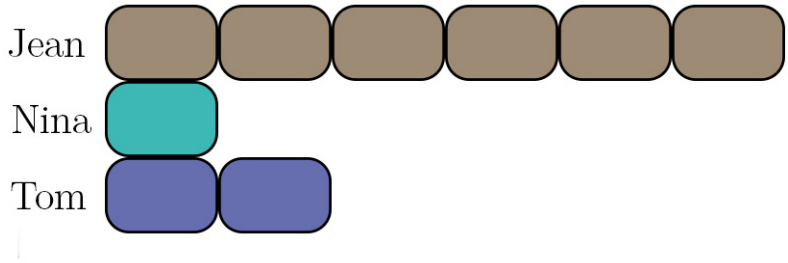
Modélisation possible :



Type 2 :

À l'inverse, nous connaissons le « tout », produit des deux relations de comparaison. Jean a 3 fois plus de billes que Tom car pour une quantité « 1 » chez Nina, Tom aura « 2 » et Jean aura « 6 ».La relation multiplicative entre Jean et Tom apparaît plus clairement et Jean dispose alors de 3 fois plus de billes que Tom.

Modélisation possible :



3 - 2-9 Transformation de relations multiplicatives (à détailler)

Cette catégorie est structurellement plausible selon le codage employé. Elle n'est présentée ici que dans le but de l'approfondir et la retravailler dès que possible. Ce n'est pour le moment qu'un ensemble hypothétique.

Les transformations de relations multiplicatives auraient la même structure dans le champ multiplicatif que les transformations de relations additives dans le champ additif. Il n'y a pas d'états, mais il y a deux relations : une de A vers B et une de B vers A. Les transformations de relations ont une structure proche des transformations de transformations ; la relation, où l'état relatif, étant codée dans notre grammaire par un cercle. La structure des transformations de relations est donc visuellement la synthèse des structures de transformations d'états et de compositions de transformations (dans une approche multiplicative).

Nous utilisons ici des états relatifs (donc par rapport à un état normé qui peut être signifié ou non). Deux relations (ou plus) se transforment pour donner un état relatif global.

Type	Exemple	Modélisation	
1	Recherche de la composition globale. Jean a 3 fois plus de billes que Tom et Tom a 2 fois plus de billes que Nina. **Jean a combien de fois plus de billes que Nina ?**	×2 → ? → ×10	Composition de relations
2	Recherche d'une relation. Jean a 6 fois plus de billes que Nina et Tom a 2 fois plus de billes que Nina. **Jean a combien de fois plus de billes que Tom?**	? → ÷2 → ×10	

3 - 3 Problèmes quaternaires

Définition : problèmes dans lesquels l'opération portera sur 4 termes, 3 connus et 1 inconnu. Plus simplement : ils se composent de 2 domaines de mesures de grandeurs (deux ensembles définis par une grandeur), le rapport entre les deux domaines de grandeurs (le lien qui fait passer de l'un vers l'autre) et l'inconnue. Il existe aussi une relation de proportion entre les valeurs des domaines de grandeurs d'où le terme de problèmes de proportionnalité. Par exemple, un problème de proportionnalité ou il existe un rapport permettant de lier un prix et une quantité sera un problème quaternaire.

Ci-dessous sont listées les catégories de problèmes qui sont habituellement associées dans l'ensemble « quaternaire ». Selon les auteurs, cet ensemble de catégories de problèmes est plus ou moins étoffé. Nous présentons ici une synthèse de ce qui est généralement proposé aux enseignants :

La proportionnalité simple :

– **Proportionnalité simple, multiplication :** Je connais une part et le nombre d'éléments dans chaque part. Je cherche le nombre total d'éléments dans plusieurs parts.

– **Proportionnalité simple, division/partition** : Je connais le nombre de parts et le nombre total d'éléments. Je cherche le nombre d'éléments pour une part.

– **Proportionnalité simple, division/quotition :** Je connais le nombre d'éléments pour une part et le nombre total d'éléments. Je cherche le nombre de parts.

– **Proportionnalité simple, Règle de 3 :** Pas une catégorie indépendante, la règle de 3 peut concerner les 3 catégories précédentes mais sans préciser la valeur de l'unité. Je connais le nombre de parts et le nombre d'éléments dans chaque part. Je cherche le nombre total d'éléments. La recherche de la valeur de l'unité est une étape possible.

– **Comparaison de rapports de proportionnalité :** structure ternaire de comparaison de rapports de structures quaternaires.

3 - 3-1 Proportionnalité simple

Tableau synthétique des problèmes type relevant de la proportionnalité simple :

Type	Exemple	Modélisation
1	Proportionnalité simple, multiplication : Recherche du nombre d'éléments 1 dictionnaire coûte 38 €. **Combien coûtent 8 dictionnaires ?**	1 | 38 8 | ?
2	Proportionnalité simple, division/partition : Recherche du nombre d'éléments par part L'achat de 12 dictionnaires identiques a coûté 372 €. **Quel est le prix d'un seul dictionnaire ?**	1 | ? 12 | 372
3	Proportionnalité simple, division/quotition : Recherche du nombre de parts Une fermière range 48 œufs dans des boîtes de 6 œufs. **Combien de boîtes d'œufs remplit-elle ?**	1 | 6 ? | 48
4	Proportionnalité simple : Règle de 3 4 dictionnaires identiques pèsent 10 kg. **Combien pèseraient 14 dictionnaires ?**	4 | 10 14 | ?

Proportionnalité simple

Type	Exemple	Modélisation	
2'	Proportionnalité simple, division/partition Règle de 3 : Recherche du nombre d'éléments par part 14 dictionnaires identiques pèsent 35 kg. **Combien pèseraient 4 dictionnaires ?**	$\frac{4 \mid ?}{14 \mid 35}$	Proportionnalité simple
3'	Proportionnalité simple, division/quotition Règle de 3 : Recherche du nombre de part 4 dictionnaires identiques pèsent 10 kg. **Combien de dictionnaires pèseront 35 kg ?**	$\frac{4 \mid 10}{? \mid 35}$	
3''	Proportionnalité simple, division/quotition Règle de 3 : Recherche du nombre de part 4 dictionnaires identiques pèsent 10 kg. **Combien de dictionnaires pèseront 35 kg ?**	$\frac{? \mid 10}{14 \mid 35}$	

Comme précisé auparavant, la règle de 3 peut se retrouver dans la configuration des types 1, 2 et 3. Les problèmes « 2' », « 3' » et « 3'' », sont des problèmes qui peuvent se résoudre par la règle de 3 mais qui ont des inconnues différentes. « 3' » et « 3'' » sont des recherches du nombre de part mais dans un cas nous cherchons un nombre inférieur de part, dans l'autre un nombre supérieur de part. Le type 4 représente une règle de 3 dans une structure multiplicative simple. La règle de 3 sera abordée plus après pour détailler le mode de résolution spécifique de cette structure.

Type 1) Proportionnalité simple, multiplication : Je connais une part et le nombre d'éléments dans chaque part. Je cherche le nombre total d'éléments dans plusieurs parts.

Type 2) Proportionnalité simple, division/partition : Je connais le nombre de parts et le nombre total d'éléments. Je cherche le nombre d'éléments pour une part.

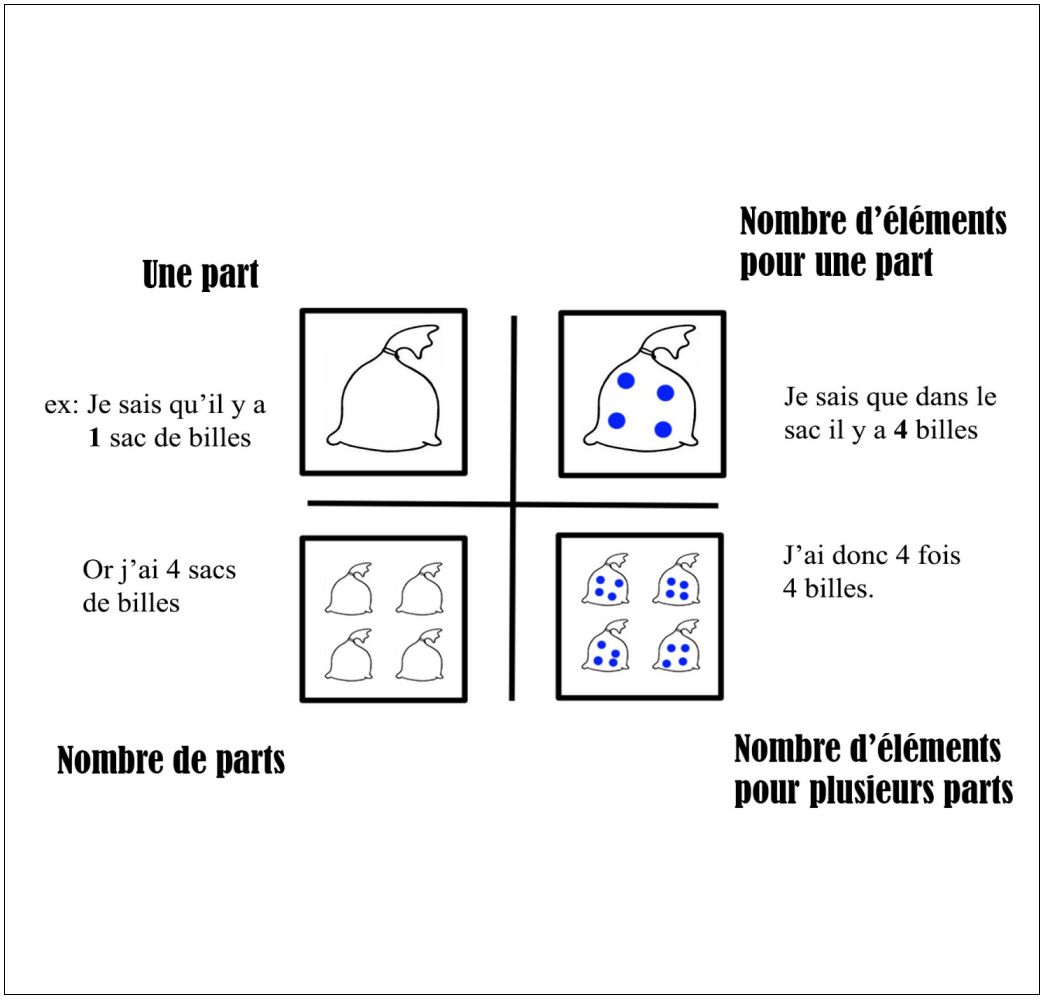
Type 3) Proportionnalité simple, division/quotition : Je connais le nombre d'éléments pour une part et le nombre total d'éléments. Je cherche le nombre de parts.

Type 4) Proportionnalité simple, Règle de 3 : Je connais le nombre de parts et le nombre d'éléments dans chaque part. Je cherche le nombre total d'éléments.

La modélisation des problèmes de proportionnalité découle bien sur d'une modélisation de **la règle de 3** encore appelée **« produit en croix »** même si cette appellation est largement abusive. Nous reviendrons en détail sur cette règle essentielle qui permet de

pratiquer une activité langagière d'explicitation qui clarifie les liens entre les éléments constitutifs du problème et rend visible le sens des calculs utilisés.

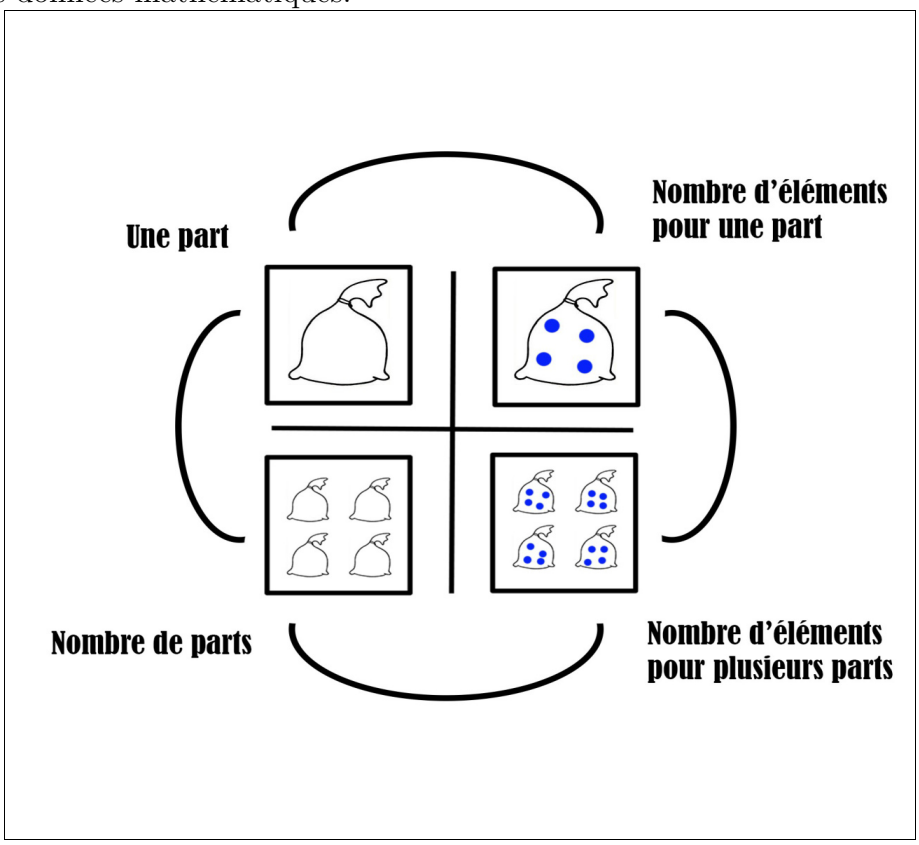
Nous proposons ce schéma pour se remettre en mémoire la démarche et les relations qui vont lier les éléments d'une situation de proportionnalité simple :



La proportionnalité simple est abordable dès le CP. Les recettes de cuisine à adapter pour 2 ou 3 quand les mesures sont pour 1 personne peuvent servir de bases pour les initier. Il en va de même pour n'importe quel problème de proportionnalité dont les grandeurs numériques ne font pas obstacle à la compréhension du problème (des quantités inférieures à 10 durant les premières périodes). La démarche experte n'est pas formalisée, mais cette pratique constitue une approche du phénomène mathématique qui se construira progressivement.

Le schéma présenté ci-dessous est un modèle donné aux élèves et **construit** avec eux durant les séances de résolution de problème. Encore une fois, le but est de modéliser une situation de façon explicite afin de maximiser la compréhension et la résolution et de permettre à posteriori une explicitation langagière. À partir d'éléments placés ou dessinés les uns par rapport aux autres (**manipulation**), le schéma émerge (**modélisation**) pour ne laisser subsister que l'écriture numérique (**abstraction**). Mais, par « dessus » tous ces

aspects, il y oralement l'explicitation de l'enseignant et la reformulation par les élèves des liens entre les données mathématiques.



Nous voyons ici le **rapport** entre les données, 1 part contient 4 éléments (x 4) ou que 4 éléments sont contenus dans une part (÷ 4) selon le sens de lecture. Ce rapport est stable dans la relation de proportionnalité et il est réemployé à mesure que le nombre de parts augmente afin de trouver tous les éléments.

Cela se résume ainsi : *« Pour une part j'ai… éléments, pour 2 parts j'ai… éléments, pour 3 parts j'ai… éléments, donc pour n parts j'ai… éléments ».*

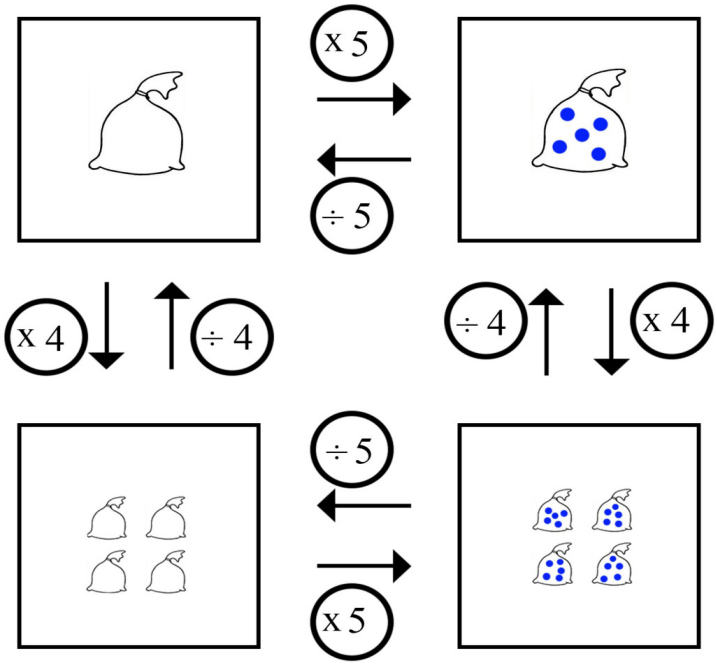
Nous allons donc multiplier ou diviser la donnée selon le sens de lecture. Le rapport reste constant des 2 cotés du schéma. Nous ne faisons que répéter parallèlement des opérations qui se vérifient l'une l'autre.

Il devient alors plus simple, en complétant systématiquement le modèle, de visualiser l'opération adéquate pour résoudre le problème proposé. De même, cette opération choisie est vérifiable, car la proportionnalité implique la constance d'un rapport entre les grandeurs et ce, de façon symétrique.

Il peut alors être observé ce que nous nommerons **« rapport horizontal »** qui est le lien entre **« Une part »** et **« les éléments d'une part ».** Ce rapport horizontal se retrouve à mesure que le tableau de proportionnalité se complète. Ce rapport permet de passer de gauche à droite dans le schéma par multiplication et de droite à gauche par division. De fait, un **« rapport vertical »** fait lien entre **« Une part »** et **« le nombre de parts ».** Ce rapport vertical se retrouve lui aussi à mesure que le tableau se complète.

Il permet de passer de haut en bas du tableau par multiplication et de bas en haut par division.

Ainsi, si un rapport est connu, il est possible de reproduire son effet par symétrie et compléter le schéma afin d'obtenir le support suivant :



<u>Stratégies observées :</u>

La proportionnalité simple ne pose pas de problème en termes de compréhension, seul la non maîtrise des tables de multiplication peut bloquer la résolution (ou d'addition pour une itération). Les élèves repèrent rapidement le rapport établi et le répercutent sans difficulté dans la mesure ou celui-ci est abordable mentalement. L'utilisation temporaire d'une table de Pythagore en parallèle permet d'aider ceux ne maîtrisant pas leurs tables. Néanmoins, il est essentiel que les élèves maîtrise dès que possible les faits numériques de base que sont les tables et les compléments afin que la difficulté issue de la technique n'entrave pas la compréhension de la situation. Les automatismes calculatoires sont primordiaux pour ne pas surcharger la mémoire de travail lors de la résolution de problèmes arithmétiques. La maîtrise prend du temps, plus la découverte est tardive, moins il y a de temps pour atteindre un haut degré de maîtrise. On pourrait nous opposer le fait que débuter trop précocement l'utilisation d'algorithmes serait préjudiciable aux élèves qui n'ont pas encore les bases nécessaires. Nous ne disons pas le contraire mais cela reviendrait à oublier la notion de progressivité sur le temps long. Un élève de Cp ou de

Ce1 est tout à fait capable d'utiliser très rapidement l'algorithme de la division pour un calcul du type 14 ÷ 2. Pourrait-il le faire mentalement ? Bien sur ! Mais là encore ce serait manquer l'opportunité de débuter la maîtrise de cet algorithme en s'appuyant sur le calcul mental de manière à l'automatiser tout en douceur. Le fait de « poser » ne vient pas à la place du calcul mental ou du calcul en ligne. Les deux doivent être pratiqués très régulièrement et sont majoritaires. La pratique du calcul mental va alors venir faciliter la mise en place de l'algorithme afin que dans le futur, celui-ci soit intégré pour s'attaquer à des opérations trop complexes mentalement. Le but est d'éviter la double complexité : numération et algorithme. Il s'agit donc d'une préparation à ce qui viendra après. Un élève pourrait tout à fait faire sans à ce niveau de son parcours scolaire, mais nous le préconisons de manière à faciliter l'avenir en donnant le maximum d'atouts aux élèves pour faire face aux situations sans les surcharger. Il s'agit toujours pour nous de mettre en place une progressivité ambitieuse pour les élèves qui n'en verront peut-être pas les fruits dans l'immédiat mais qui a pour but de faciliter les apprentissages futurs.

Face à un problème de division-partition, ou de division-quotition, plusieurs stratégies de calcul coexistent. La majorité des élèves va utiliser la multiplication réitérée pour parvenir au résultat si la technique opératoire de la division n'est pas acquise ou pas encore abordée (ce qui surcharge inévitablement, d'où l'anticipation). De même si la situation est du type « en 800 combien de fois 150 »,les élèves ne passent pas par la division mais plutôt par la multiplication avec une procédure du type essai-erreur. Par contre, dans une situation du type « en 800 combien de fois 3 » les élèves passent par la division posée, car il est plus simple de procéder à des partages successifs.

C'est cette répétition de la multiplication qui va nous guider vers le sens de la division (ce que cette opération représente) et qui va nous permettre d'aborder d'autres stratégies moins coûteuses par la suite (un algorithme efficace).

Le but, ici, est de guider l'élève vers la méthode experte (la division) en le confrontant à sa nécessité tout en lui donnant les outils nécessaires préalablement. Plus le nombre de multiplications de proche à proche est important plus la nécessité de la division paraît évidente. Ainsi, les enseignants ont pu être sollicités par les élèves qui demandent de façon explicite *« J'ai besoin de savoir poser une division »*. L'enseignement direct, dans des cas similaire, de la connaissance demandée est un choix assumé même si la programmation annuelle prévoit que « … » soit étudié durant la période « … ». Profitons d'avoir des élèves en demande !

La démarche progressive a amené le sens de l'opération à l'élève ainsi que son intérêt dans la démarche de résolution. Il ne reste alors que l'aspect méthodologique. La compréhension est déjà en place, le besoin est là et tout cela augmente la facilité d'imprégnation de la technique opératoire et l'acceptation de la nécessité de la pratique avant la maîtrise. (La maîtrise d'un domaine demande du temps, de la répétition et des efforts, que les élèves acceptent, car ils sont dans une démarche de progrès qui est explicitée)

De plus, nous insistons sur le fait qu'il faille régulièrement poser en parallèle (ou écrire

en ligne) les 2 opérations pour toujours avoir de façon claire le lien entre les 2 et pour vérifier la justesse de son travail. À ce propos nous avons pu voir des élèves fonctionner en binôme où l'un est le « **diviseur** » et l'autre le « **multiplicateur** ». Ils confrontent leurs résultats pour vérifier ou invalider leur démarche. Il apparaît ainsi que le « **multiplicateur** » tend à devenir de plus en plus « **diviseur** » à mesure de sa proximité avec la méthode.

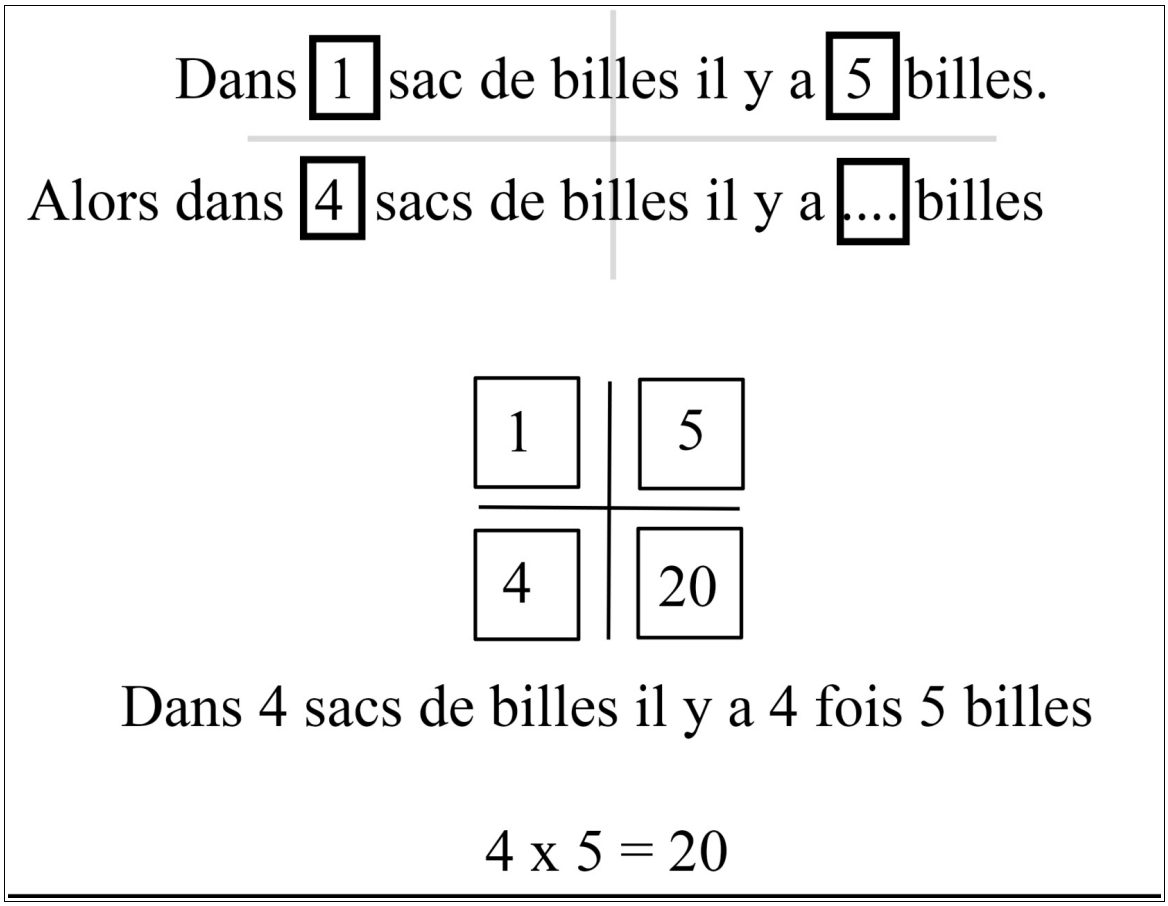
Construction du modèle schématique :

Les problèmes relevant de la proportionnalité et par la suite de la règle de 3 permettent la construction d'un modèle logique structuré. Cette construction débute par **la mise en mots du raisonnement** à appliquer lors de la résolution du problème. Ce raisonnement sera à remobiliser à chaque fois et à écrire de manière structurée et logique. Un des aspects de ce travail sera la nécessaire utilisation d'une rigueur d'expression et de structuration qui seront retravaillées de manière régulière.

Exemple :

« Un sac de billes contient 5 billes. Combien de billes vont contenir 4 sacs ? »

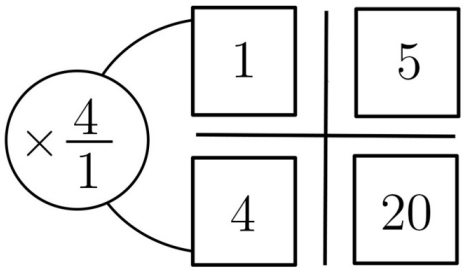
Je sais qu'1 sac de bille contient 5 billes. Alors 4 sacs de billes contiennent 4 fois plus de billes. Donc 4 sacs contiennent 20 billes.

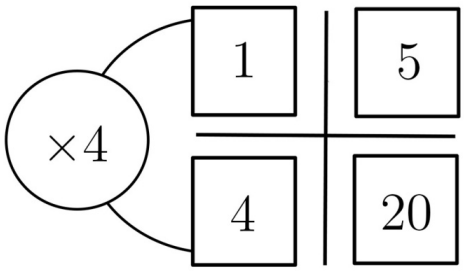


Le calcul n'est alors pas la simple utilisation d'un rapport sans grandeur réelle mais la représentation logique des liens unissant les données. Le sens se construit par l'utilisation des relations entre les éléments. Il est donc très important de dire, montrer, faire, justifier devant les élèves et avec les élèves pour veiller à ce que le sens et la technique soient toujours présents. Nous pensons qu'il faut donc l'enseigner explicitement pour gagner en efficacité et amener les élèves à de hauts taux de compréhension, de maîtrise et donc de réussite.

Le marquage du rapport peut être travaillé très spécifiquement en classe lors de séances classique de mathématiques (intégrées dans la progression hors résolution de problèmes) ou lors de séance dédiées aux problèmes de proportionnalité. L'intérêt est de faire noter aux élèves tous les rapports entre les données de différents problèmes pour différencier les rapports qui impliquent une multiplication et les rapports qui impliquent une division. Cela peut se traduire par le fait de proposer régulièrement une dizaine de problèmes dont les rapports sont à marquer par les élèves tout en utilisant le modèle schématique. D&ans ce cas, le but n'est pas la difficulté liée au calcul mais la recherche de la compréhension de la situation en augmentant progressivement la difficulté liée aux données numériques.

Exemple :





Le premier schéma indique le rapport sous forme fractionnaire pour anticiper la règle de 3. Dans le cas où la valeur pour l'unité n'est pas explicite, le passage par la fraction permettra d'expliciter progressivement le sens du raisonnement qui conduira au calcul expert.

<u>Cas de la règle de 3 :</u>

Il ne faut pas confondre produit en croix et règle de trois. Le produit en croix est un terme abusif au cycle 3, car il relève du programme du collège. La règle de 3 est la forme que prend le produit en croix dans un contexte. Le produit en croix est utilisé dans le cadre numérique (pas d'unité) alors que la règle de trois est utilisé dans le cadre des grandeurs (nombres avec unité), donc avec un sens ajouté et c'est là toute son importance. La règle de 3 peut se transformer en une pratique langagière d'expliciation.

<u>Prenons la définition suivante :</u> « Dans un tableau de proportionnalité à quatre cases, le produit des termes situés dans une diagonale est égal au produit des termes

situés dans l'autre diagonale », voici la définition du produit en croix, car les termes sont donnés hors contexte de grandeur. La règle de trois s'appliquera pour la résolution mais ne sera nommée comme telle que si des grandeurs sont associés explicitement aux termes numériques.

Règle : Trois nombres a, b, et c étant donnés, la règle de trois permet, à partir de l'égalité des produits en croix, de trouver le nombre d tel que (a, b) soit proportionnel à (c, d). Ce nombre d vaut : $d = \frac{b\,x\,c}{a}$

Nous préférerons, dans un souci évident de clarté et d'efficacité, la démonstration ci-dessous qui permet, avant les calculs, de poser par écrit la démarche de résolution en faisant apparaître le déroulement de la démonstration et sa structuration mathématique avec les grandeurs associées.

Cette démonstration est donc la règle de trois avec la démarche et le contexte numérique :

« 3 kilos de pommes coûtent 15 euros, combien coûteraient 5 kilos ? »
Si 3 kilos coûtent 15 euros,
alors 1 kilo coûte 3 fois moins = 15/3 (étape 1 avec écriture sous forme de fraction)
Donc 5 kilos coûteront 5 fois plus = 5 x (15/3) soit (5 × 15)/3 (étape 2)
Prix des 5 kilos = (5 × 15)/ 3 = 25 euros

Et l'on voit que l'écriture finale nous guide plutôt vers une multiplication avant la division même si le passage à l'unité est de prime abord nécessaire pour construire la démarche. C'est l'emploi de l'écriture fractionnaire qui permet d'aller au bout de la démonstration et de formaliser la chronologie des opérations. Cela implique donc une compréhension de la fraction comme écriture d'une division. Rappelons que dans un premier temps, les élèves effectuerons le passage par l'unité avant d'utiliser la technique experte.

Il est très simple de modéliser ce problème en utilisant le schéma proposé précédemment, mais il est essentiel de travailler la structuration de la recherche et de la proposition de solution. L'écriture de la démarche permet cette structuration logique et l'établissement de la compréhension de ce qui est en train de se passer. La validation d'une procédure est un dialogue permanent entre l'enseignant et l'élève / les élèves pour s'assurer régulièrement de la compréhension e toutes et tous.

Utiliser le modèle schématique de façon brute permet bien sur de résoudre mais revient a *« Alors je commence par multiplier 5 par 15 et après je divise par 3. Dans le schéma ça fait une croix, c'est un produit en croix… »* or le but est de comprendre le principe de la règle de trois avant de passer bien plus tard (collège) à l'écriture abstraite d'un produit en croix.

Le travail de compréhension de la démarche serait alors réduit à sa portion congrue, si

ce n'est au néant. Pourquoi multiplier d'abord ? Pourquoi diviser ensuite ? Quel est le lien entre les différentes grandeurs ? Le mot « pourquoi » risque de revenir bien souvent chez les élèves. Nous avons eu l'occasion, dans les chapitres des fichiers traitant des problèmes de proportionnalité, de vérifier les différentes approches.

Exemple de procédure :

Le problème a été rédigé au tableau en groupe restreint avec l'enseignant (et parfois rédigé à 2, élève et enseignant plusieurs fois dans une séance). Chaque étape a été écrite par les élèves avec utilisation de couleurs pour faciliter la visibilité du texte et des nombres afin de préparer la modélisation. Cette étape essentielle concrétise la démarche, elle essaye de rendre visible et explicite l'implicite de l'énoncé. Le fait de la dire, de la répéter comme une *« comptine »* en la rédigeant, la structure d'autant plus. Le modèle schématique vient apparaître en filigrane sur le texte, ne gardant que les données numériques. Cette modélisation est déjà l'abstraction, mais elle n'est profitable et opérante que si la démonstration écrite a été pratiquée avec rigueur de manière régulière. L'écriture de la démarche, non exigible sur le fichier est à demander sur un support parallèle pour consolider la modélisation. (Brouillon, ardoise, etc.) Cela est, par expérience, hautement bénéfique aux élèves.

Ainsi, le modèle permet de cibler les données utiles mais sans dévoiler la démarche finale, ce qui est potentiellement risqué s'il n'y a pas prise de conscience de la démarche progressive sous-jacente. Sa construction rigoureuse est extrêmement importante pour éviter une application machinale, quand bien même le résultat serait exact. La façon la plus sûre de garder la structure logique est encore de la dire à voix basse, ou mentalement, ou par écrit à mesure que l'on complète le modèle et que l'on effectue les calculs nécessaires à la résolution.

Division ou multiplication ?

La démarche avec plusieurs étapes peut pousser à poser et calculer la division permettant de passer par l'unité. Cela permet à l'élève d'avancer progressivement et d'approcher petit à petit du résultat. Néanmoins, l'écriture de la méthode de résolution, et donc sa mise en équation, nous conduit finalement à poser la multiplication avant la division.

Les 2 démarches ont été comparées par les élèves qui, voyant les résultats équivalents, pensaient que les 2 approches se valaient. Les élèves qui posaient la multiplication d'abord le faisait surtout (de prime abord) pour éviter une éventuelle division décimale. En montrant la non-difficulté de cette technique opératoire, ils ont alors rapidement opté pour la division permettant le passage à l'unité, pour effectuer la multiplication ensuite. Cela est resté valable jusqu'à l'introduction de cas particuliers.

<u>Cas particuliers :</u>

Le problème suivant est issu du fichier de résolution de problèmes.

« Avec 11 litres de carburant, je peux rouler sur une distance de 100 km. Avec 66 litres de carburant quelle distance puis-je parcourir ? »

(Cas où l'élève ne remarque pas « l'évidence » du rapport)

<u>1) L'élève passant par la division d'abord obtient alors pour cette première étape :</u>

$100 \div 11 = 9{,}0909090909\ldots$

Il lui faut donc arrondir à 9,1 ou 9,09 selon le degré de précision voulu.

Puis en multipliant nous obtenons :

$9{,}1 \times 66 = 600{,}6$ km soit 600 km et 600 m. Ou $9{,}09 \times 66 = 599{,}94$ soit 599 km et 940 m.

L'élève qui débute ainsi cherche toujours le passage par l'unité et l'enseignant retrouvera sûrement ceci :

11	100
1	9,09

L'élève cherche à incorporer une étape sous la forme d'un état stable à l'unité, alors que cette étape permet en fait la caractérisation du rapport entre les données du problème et est de ce fait sous forme d'écriture fractionnaire. L'habitude de rechercher la valeur de l'unité (car c'est le cas simple et fréquent) devient alors un automatisme à déconstruire, car il sera source d'erreur. L'objectif n'était pas de chercher la valeur pour l'unité, mais de chercher le rapport qui permet ce passage vers l'unité. Cela pourrait sembler anecdotique, mais cette mauvaise interprétation conduira à des erreurs de compréhension par la suite.

Il aurait fallu noter en face de l'unité, si vraiment l'enseignant le juge pertinent, l'écriture intermédiaire sous forme de fraction.

11	100
1	$\frac{100}{11}$

Cette écriture, la fraction, est d'autant plus importante que dans ce cas précis, elle ne peut être écrite sous forme d'un nombre décimal (100÷11=9,090 909…). C'est un passage intermédiaire, pas un état qui doit être notifié. La fraction permet d'éviter un début d'écriture qui conduira à une approximation.

1	9,09
66	599

L'élève poursuivant son raisonnement en recherchant la valeur pour l'unité se retrouve alors avec un modèle schématique erroné, car la valeur du résultat, pour l'unité, est approché alors que celui-ci devrait être un entier. Cela conduit inévitablement, à terme, à augmenter la marge d'erreur du calcul. L'élève n'a pas compris le principe de « rapport » qui se construit dans une règle de 3. L'élève caractérise alors une étape comme étant un fait établi alors qu'il est dans une phase de construction du rapport de proportionnalité.

$\times\frac{1}{11}$

11	100
1	$\frac{100}{11}$

$\div 11$

11	100
1	$\frac{100}{11}$

L'écriture simple, sans passage par l'unité, permet de noter les états, sans confusion avec un rapport intermédiaire qui aurait dû rester sous forme de fraction. Dans le cas de la règle de 3, le passage à l'unité est un début d'écriture du rapport et celui-ci n'est pas un état « normé ». Son écriture n'est donc pas souhaitable dans ce modèle schématique (et serait potentiellement source d'erreurs). Il peut s'écrire en dehors, pour signifier le passage d'un état à un autre. Ci-dessous un exemple possible d'écriture, ré-utilisable très simplement dans les cas de proportionnalité simple avec la valeur de l'unité connue.

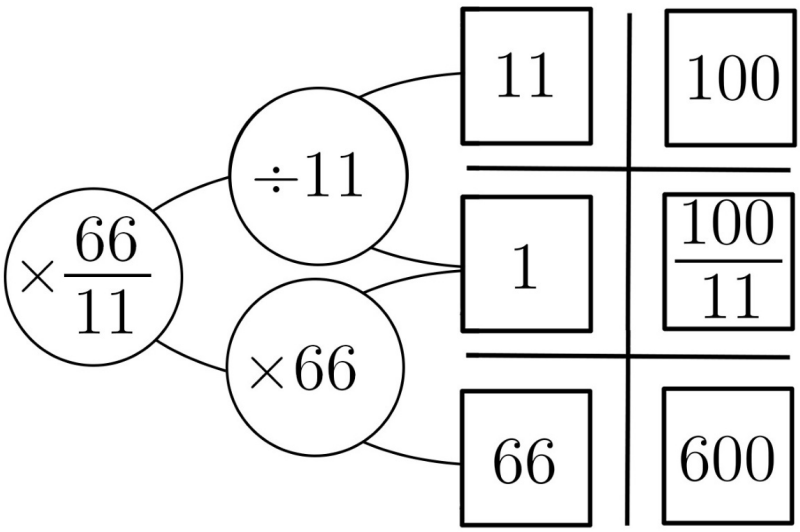
$\times\frac{66}{11}$

11	100
66	600

$\times 6$

11	100
66	600

Et voici un modèle schématique en reprenant toutes les étapes et en symbolisant les rapports de proportionnalité :



2) Passage par la rédaction ou par la « comptine » de résolution :

« Avec 11 litres je parcours 100 km donc avec 1 litre je parcours ***11 fois moins****, 100 ÷ 11. Alors avec 66 litres je parcours donc* ***66 fois plus*** *: 66 × 100 / 11 »*

66 × 100 = 6 600 et 6 600÷ 11 = 600 km et la valeur est exacte.

Le passage à l'unité apporte moins de précision que la règle de 3 *« directe »* où la multiplication est effectuée d'abord. La règle de 3 directe est l'aboutissement d'une démonstration logique et rigoureuse dont l'énonciation traduit la compréhension.

Autre exemple :

« 11 kilos de pommes coûtent 60 euros, combien coûteraient 44 kilos ? »

Si 11 kilos coûtent 60 euros

Alors 1 kilo coûte (60 € ÷ 11) soit 5,46 euros (avec arrondi au centième)

Donc 44 kilos coûtent 5,46 × 44 = 240,24 euros

Avec la règle directe :

Si 11 kilos coûtent 60 euros, alors 1 kilo coûte (60 ÷ 11) euros.

Donc 44 kilos coûtent (44 × 60) / 11. Ainsi (44 × 60) = 2640

et 2640 / 11 = 240 euros. La valeur est exacte.

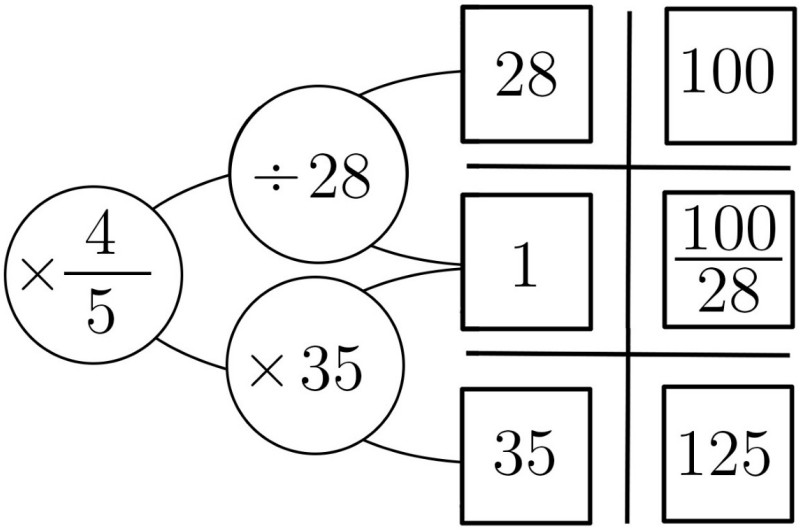
Encore une fois, ceci est envisageable dans le cas où l'élève ne voit pas le rapport entre 11 et 44 (ce qui arrive plus souvent qu'on ne peut le penser). Ajoutons que le non visibilité d'un rapport évident peut signifier qu'il faille travailler plus intensivement la construction des nombres dans une optique multiplicative.

Prenons le cas suivant : « 28 élèves mangeront 100 gâteaux. Combien mangeront 35 élèves ? »

procédure possible 1 : (100÷28) × 35=125

procédure possible 2 : (35 × 100) ÷ 28 = 125

procédure possible 3 : (100÷4) × 5 = 125 dans la mesure où l'élève est amené à être vigilant quant au fait que 28 et 35 sont des multiples de 7 et que le rapport entre 4 et 5 est le même qu'entre 28 et 35. ($\frac{4}{5} = \frac{28}{35}$)

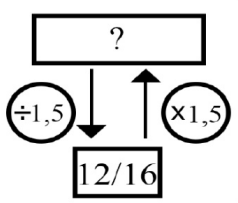
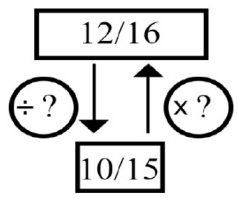


Il est primordial d'apprendre à résoudre efficacement, mais il est tout aussi important de découvrir qu'il y a des solutions qui sont plus élégantes que d'autres.

La modélisation est une aide structurante qui peut être pertinente selon la situation. Un problème de proportionnalité impliquant la règle de 3 peut très bien se résoudre sans elle selon le cas. Prenons par exemple le cas suivant : 2 bonbons coûtent 5 euros, combien coûteront 6 bonbons. Ce problème peut se résoudre en appliquant la démarche (6 × 5/2) mais la façon la plus efficace ici est de remarquer simplement que 2 × 3 = 6 alors 5 × 3 donnera 15. Le rapport est visible et ne nécessite pas la démarche entière. Ici l'application de la procédure devient alors non pertinente. Ces notions se construisent par la diversité des approches proposées où le but recherché est l'efficacité de la résolution de la manière la plus « astucieuse » possible. Il est donc très important pour les élèves de rencontrer tout l'éventail de ces possibilités et donc de ne pas forcément attendre qu'un élève découvre hypothétiquement une solution originale mais plutôt de leur montrer, de leur expliquer comment un problème aurait pu être résolu de manière plus astucieuse. Nous avons remarqué que c'est suite à cette approche que les élèves proposent beaucoup plus de solutions efficaces, créatives et originales, car ils disposent alors des connaissances pour le faire.

3 - 3-2 Comparaison de rapports de proportionnalité

Tableau synthétique des problèmes type relevant de la proportionnalité simple :

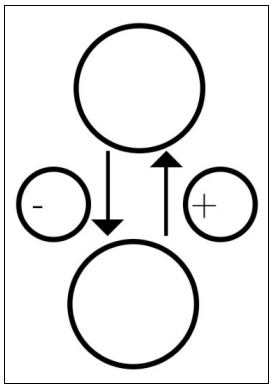
Type	Exemple	Modélisation	
1	Abel mélange 12 cl de sirop et 16 cl d'eau. Chloé fait un mélange 1,5 fois plus concentré. **Quel est le rapport sirop/eau en cl du mélange de Chloé ?**		Comparaison de rapports
2	Abel mélange 12 cl de sirop et 16 cl d'eau. Chloé mélange 10 cl de sirop et 15 cl d'eau. **Qui a le mélange le plus concentré en sirop ? (combien de fois est-il plus concentré ?)**		

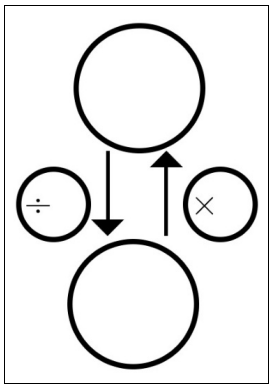
Problèmes issus de : « *Situations multiplicatives, problèmes de multiplication et de division*. Olivier Graff, Benoît Wozniak. Ed SCEREN. »

Initialement nous n'avions pas abordé ce type de problème arithmétique comme un ensemble défini, car ils apparaissent plutôt, à notre sens, comme des combinaisons de structures déjà connues. Les problèmes de comparaison de rapports de proportionnalité sont des problèmes **complexes** avec plusieurs éléments agencés dans leur structure. Ils sont composés de manière basique de 2 éléments qui correspondent à des situations de proportionnalité (même si cet élément a une structure complexe intrinsèque). La comparaison intervient entre ces 2 éléments et opère dès que les rapports sont identifiés. Une situation typique est la réalisation de mélanges (vinaigrette, sirops, comparaison des proportions garçons/filles de plusieurs classes, etc.) De prime abord ces problèmes ne sont pas destinés aux élèves de primaire <u>mais</u> rien n'empêche de les aborder lors de l'étude de l'écriture fractionnaire pour comparer d'abord de manière additive ($\frac{3}{4}$ c'est combien de plus que $\frac{1}{4}$?) avant de comparer de manière multiplicative ($\frac{3}{4}$ c'est combien de fois

plus que $\frac{1}{4}$?). La difficulté proposée va dépendre des registres en jeu et de la manière de l'aborder. Expliciter la représentation d'un rapport en la modélisant via un dessin, un schéma puis une fraction permet se focaliser sur la comparaison des rapports en ayant préalablement allégé les données. Les deux exemples proposés paraissent plus adaptés pour des collégiens mais si nous nous en tenons à la structure du problème, c'est abordable au CM2 dans la mesure où les connaissances et habiletés des élèves sont solides. Ainsi, la question sera : Puis-je l'aborder avec les élèves ? Si non, quel bagage est nécessaire pour cela ? Sans, bien sur, le faire aux dépens de tout ce qui relève des connaissances et compétences qui doivent être maîtrisées. Cette structure s'envisage plus, dans sa rencontre, comme un « bonus » si les conditions sont réunies.

Compte tenu de la configuration structurelle globale, nous estimons que les comparaisons de rapports appartiennent plutôt au registre des comparaisons multiplicatives (voir additive selon la comparaison proposée), ce qui nous placerait en désaccord avec les auteurs qui y voient un problème quaternaire. Toute la difficulté est de définir les domaines de grandeurs et les relations entre eux, car le domaine est ici un rapport entre deux grandeurs. Nous sommes alors en présence d'une comparaison de relations. La modélisation qui nous apparaîtrait alors comme la plus adaptée serait peut-être sous les formes suivantes :





Structurellement, ce type de problème à déjà été détaillé mais c'est ici le sens donné au « rapport », dans sa façon de l'aborder, qui va induire la structure. Mais nous pouvons aussi simplifier à l'extrême en signifiant qu'il s'agit, ici, de répondre à la question *« comme je passe de l'un à l'autre ? »*. C'est-à-dire que les enseignants peuvent, de leur côté, débattre et échanger sur la structure et les composantes pour modéliser de manière très abstraite et affiner la compréhension des interactions dans cette structure et d'un autre côté traduire ce discours dans un registre pour les élèves. Pour nos élèves, il s'agit de leur montrer/enseigner comment résoudre un problème de comparaison (additif ou multiplicatif). Il y a alors ici une nouvelle « apparence de surface » pour une structure interne inchangée : deux éléments comparés, liés par une relation additive ou multiplicative. C'est-à-dire que sous une apparence qui pourrait sembler différente, la structure même du problème est celle d'une simple comparaison multiplicative (ou additive). La difficulté de perception provient des éléments comparés, ici des rapports et

ces rapports sont des structures quaternaires. Il convient donc de traiter de manière explicite, modélisante, séquentielle et donc progressive ce type de problème en utilisant les structures schématiques pour expliciter les relations entre les éléments. C'est-à-dire : Identifier les rapports (les éléments comparés) puis la relation (multiplicative ou additive) qui va les lier. Nous avons donc dans ce type de problème une structure complexe (synthèse de plusieurs structures) globale ternaire (2 connus, 1 inconnue), pour la comparaison multiplicative, et non quaternaire car seuls les éléments comparés sont quaternaires.

Nous allons donc présenter succinctement ce type particulier, car il apparaît ici dans le traitement de situations complexes relatives à des situations de proportionnalité. Sa structure profonde (comparaison multiplicative) est ici au service d'une situation d'apparence inédite mais structurellement simple.

Type 1 : Comparaison de rapport avec un rapport liant les 2 parties : recherche d'un rapport.

Abel effectue un mélange avec les proportions suivantes : 12 pour 16, soit un rapport de $\frac{3}{4}$ qui se dira 3 cl de sirop pour 4 cl d'eau. Il peut se signifier aussi par $\frac{3}{4}$ de volume de sirop pour 1 volume d'eau. Le lien se fait entre les deux parties (eau et sirop) et non entre la partie et le tout (sirop et volume total du mélange).

Si Chloé fait un mélange 1,5 fois plus concentré alors le rapport sera 1,5 fois plus élevé. Cela indique que le volume de sirop par rapport au volume d'eau sera 1,5 fois plus grand pour un volume d'eau constant. (si la relation liait la partie au tout, le volume de sirop serait 1,5 fois plus grand par rapport au volume total du mélange)

Nous obtenons alors $\frac{3}{4}$ x 1,5 soit $\frac{3}{4}$ x $\frac{3}{2}$ = $\frac{9}{8}$ soit $\frac{18}{16}$. Le mélange de Chloé est donc composé de 18 cl de sirop pour 16 cl d'eau ou, en simplifiant, de 9 cl de sirop pour 8 cl d'eau et même 1,125 cl de sirop pour 1 cl d'eau.

Type 2 : Comparaison de rapport avec un rapport liant les 2 parties : recherche de la relation de comparaison.

Mélange d'Abel = 12 cl de sirop pour 16 cl d'eau soit un rapport de $\frac{12}{16}$ et donc $\frac{3}{4}$

Mélange de Chloé = 10 cl de sirop pour 15 cl d'eau soit un rapport de $\frac{10}{15}$ et donc $\frac{3}{5}$

Afin de comparer les 2 rapports il convient de les réduire au même dénominateur :

Abel = $\frac{15}{20}$ et Chloé = $\frac{12}{20}$ et donc $\frac{15}{20} > \frac{12}{20}$ alors Abel a le mélange le plus concentré.

Il est également remarquable que sans mise au dénominateur commun nous avons à volume de sirop égal (3 cl) 4 cl d'eau pour Abel et 5 cl d'eau pour Chloé. Chloé utilisant plus d'eau, son mélange est moins concentré. La question porte aussi sur la recherche du rapport multiplicatif entre les 2 rapports comparés. Comment passer de $\frac{3}{5}$ à $\frac{3}{4}$?

Nous avons ici une structure connue de multiplication à trou. Cette structure implique donc une division. Mais nous savons aussi que diviser par une fraction revient à multiplier par son inverse alors nous obtenons le calcul suivant :

$\frac{3}{5} \times \ldots = \frac{3}{4}$

donc $\frac{3}{4} \div \frac{3}{5} = \ldots$

conduit à $\frac{3}{4} \times \frac{5}{3} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4} = 1{,}25$

Le mélange d'Abel est 1,25 fois plus concentré que celui de Chloé.

<u>Abordons maintenant ces types de problèmes selon d'autres modalités de comparaison : Comparaison de rapport de proportionnalité avec un rapport liant un tout et une partie.</u>

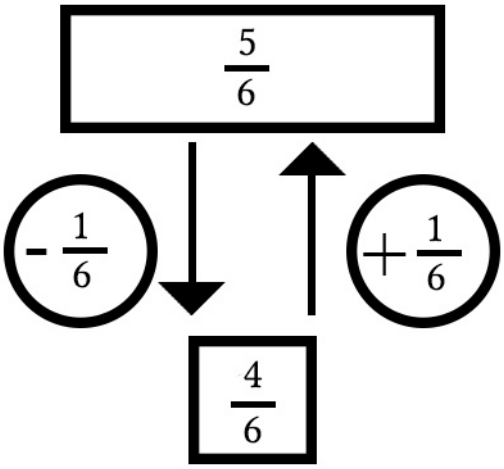
« Dans la boîte de billes d'Alban, il y a 24 billes (le tout) et 16 sont rouges (la partie). Dans la boîte de Basile il y a 30 billes et 25 sont rouges. »

Comparaison simple : Qui a la proportion de billes rouges la plus élevée ?

$\frac{16}{24}$ D'un côté et $\frac{25}{30}$ de l'autre. Soit $\frac{4}{6}$ et $\frac{5}{6}$ et donc $\frac{4}{6} < \frac{5}{6}$

Comparaison additive des proportions : Basile a combien de plus qu'Alban ?

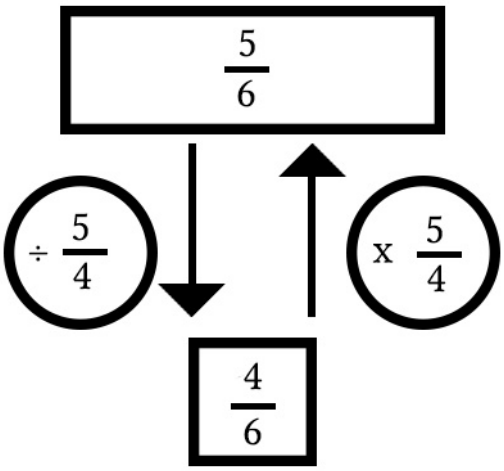
$\frac{16}{24}$ D'un côté et $\frac{25}{30}$ de l'autre. Soit $\frac{4}{6}$ et $\frac{5}{6}$ et donc :



Basile possède $\frac{1}{6}$ de plus qu'Alban. Ou Alban possède $\frac{1}{6}$ de billes de moins. Ce modèle peut aussi servir à rechercher une des proportions si la relation est donnée. Si Basile possède $\frac{5}{6}$ de billes rouges et Alban $\frac{1}{6}$ de moins, quelle est la proportion de billes rouges d'Alban ?

C**omparaison multiplicative des proportions :** Basile a combien de fois plus qu'Alban ?

$\frac{16}{24}$ D'un côté et $\frac{25}{30}$ de l'autre. Soit $\frac{4}{6}$ et $\frac{5}{6}$ et donc :



Basile possède $\frac{5}{4}$ fois plus qu'Alban. Ou Alban possède $\frac{5}{4}$ fois moins de billes. Ce modèle peut aussi servir à rechercher une des proportions si la relation est donnée. Si Basile possède $\frac{5}{6}$ de billes rouges et Alban $\frac{5}{4}$ fois moins, quelle est la proportion de billes rouges d'Alban ?

Ce type de problème est donc, selon notre approche, un problème complexe de structure globale comparative (ternaire si multiplicative et non additive) qui est la relation entre des éléments proportionnels obéissants à une structure de type quaternaire. Nous estimons que cette approche permet une explicitation plus simple de ces problèmes, car nous pouvons nous baser sur une structure connue simple (en différenciant la modélisation théorique et l'utilisation d'un modèle déjà connu qui ne va pas surcharger les élèves et induire une difficulté inutile). Encore une fois, la structure interne est celle qui est ciblée lors de la catégorisation, car elle permet une meilleure compréhension du problème, un transfert plus aisé et une résolution plus efficiente. La focalisation sur la structure superficielle risque de laisser penser à une difficulté plus élevée qu'elle ne l'est en réalité.

3 - 4 Proportionnalité composée

Les problèmes de proportionnalité composée regroupent les problèmes de proportionnalité simple composée et de proportionnalité double. **Ces problèmes arithmétiques sont donc généralement des problèmes quaternaires, mais il est également tout à fait possible d'avoir une structure ternaire et un rapport de proportionnalité entre les domaines du problème**. La proportionnalité est une caractéristique qui peut donc s'appliquer à des structures différentes (ternaire, quaternaire). Il s'agit donc ici des problèmes arithmétiques qui sont des combinaisons de problèmes de proportionnalité et qui vont être structurés par ces éléments. Les problèmes de proportionnalité simple qui composent ces deux catégories peuvent donc être des problèmes de partition, de quotition et de multiplication.

Voici un tableau d'aide pour différencier les deux types :

Proportionnalité simple composée	Proportionnalité double
— Trois domaines de grandeurs. — Deux relations de proportionnalité simple au sein des 3 domaines. — Une relation entre le domaine 1 et le domaine 2. — Une relation entre le domaine 2 et le domaine 3. — La composition implique que les deux relations inter-domaines se lient.	— Trois domaines de grandeurs — Les domaines 1 et 2 sont indépendants, sans lien. — Le domaine 3 est la grandeur-produit des domaines 1 et 2. — Il existe une relation qui associe une mesure du domaine 1 et une mesure du domaine 2 à une mesure du domaine 3.

Malgré ce tableau, il peut ne pas être simple de les différencier. Sans vouloir généraliser, il apparaît très fréquemment une hiérarchisation des relations dans les problèmes de proportionnalité simple composée, comme des éléments imbriqués (des problèmes « Matriochka », poupées russes). Néanmoins la modélisation est identique pour les situations qui la compose et cela permet de structurer les éléments connus pour entamer la procédure de résolution. La différenciation sera plus aisée avec la rencontre répétée de ces 2 types de problèmes et permettra de les aborder plus aisément.

Simplifions encore avec quelques exemples avant d'approfondir :

Proportionnalité simple : *« Dans un sachet de gâteaux il y a 4 gâteaux, combien y a-t-il de gâteaux dans 3 sachets ? »* Le nombre *N* de gâteaux dépend du nombre de sachets *S* soit *N=f(S)*. La quantité de gâteaux est proportionnelle au nombre de sachets, car la constante qu'est le ratio (gâteaux/sachets) permet de passer de l'un à l'autre. Ce problème est donc **quaternaire** (structure avec 3 données connues et 1 inconnue) et relève de la **proportionnalité**, car il y a un facteur permettant de lier *« gâteaux »* et *« sachets ».* Il y a un aspect structurel (quaternaire) et un aspect fonctionnel (proportionnalité).

Proportionnalité simple composée : *« Dans un paquet de gâteaux il y a 3 sachets de gâteaux et il y a 4 gâteaux dans un sachet, combien y a-t-il de gâteaux dans 3 sachets ? »* Le nombre *N* de gâteaux dépend du nombre de sachets *S* soit *N=f(S)* et le nombre S de sachets dépend du nombre *P* de paquets de gâteaux, soit *S=f(P)*. Les éléments sont imbriqués progressivement comme une arborescence. Ce problème est donc **composé** (plusieurs structures, nous pourrions dire « complexe »), **quaternaire** (structure avec 3 données connues et 1 inconnue pour chaque élément, mais de manière implicite) et relève de la **proportionnalité**, car il y a un facteur permettant de lier *« gâteaux », « sachets » et « paquets ».* Il y a un aspect structurel (**quaternaire composé**) et un aspect fonctionnel (**proportionnalité**).

Proportionnalité double :

– **«** *2 poules pondent 2 œufs en 2 jours, combien 4 poules pondront d'œufs en 4 jours ? »* Le nombre d'œufs *Nœ* pondus dépend proportionnellement du nombre *P* de poules et du nombre *J* de jours. Le nombre d'œufs est doublement lié à ces ensembles dont il dépend soit *Nœ=f (P, J)*. « Poules » et « jours » sont deux facteurs influençant les « œufs ». Ce problème est donc **composé** (plusieurs structures), **quaternaire** (structure avec 3 données connues et 1 inconnue pour chaque élément, mais de manière implicite) et relève de la **proportionnalité double**, car il y a un facteur qui lie *« œufs » à « jours » et « poules »* avec « jours » et « poules » indépendants. Il y a un aspect structurel (**quaternaire composé**) et un aspect fonctionnel (**proportionnalité**).

– *« Avec 3 vestes et 5 pantalons, combien d'ensembles puis-je porter ? »* Le nombre d'ensembles *Ne* dépend proportionnellement du nombre V de vestes et du nombre P de pantalons. Le nombre d'ensembles est donc lié aux deux domaines V et P soit Ne=*f* (*V*, *P*). Ce problème est donc **ternaire** (structure avec 2 données connues et 1 inconnue), est donc un problème de **produit cartésien (**AB est l'ensemble produit des ensembles A et B) et relève de la **proportionnalité double** car *« Ensemble »* est lié proportionnellement à *« Veste »* et *« Pantalons »* qui sont indépendants l'un de l'autre ; et avec des **variables discrètes (**nombre défini de valeurs réelles**).** Il y a un aspect structurel (**ternaire**) et un aspect fonctionnel (**proportionnalité**).

– *« Mon jardin a une longueur de 10 mètres et une largeur de 5 mètres. Quelle est son aire ? ».* L'aire dépend proportionnellement de la mesure de longueur « L » et de la mesure de la largeur « l ». L'aire est donc liée aux deux ensembles *Longueur* et *largeur*

soit Aire $=f$ (L, l). Si l'une des variables est fixée et devient constante (on décide par exemple que la longueur ne va pas varier), l'aire va croître ou décroître de manière proportionnelle à l'autre variable (la largeur, qui va donc être modulable). Cette constante fait office de coefficient de proportionnalité. Ce problème est donc **ternaire** (structure avec 2 données connues et 1 inconnue), est également un problème de **configuration rectangulaire** (structure dérivée de celle du produit cartésien où *AB est l'ensemble produit des ensembles A et B*) et relève de la **proportionnalité double** car « aire » est liée proportionnellement à « longueur » et « largeur » qui sont indépendants l'un de l'autre ; et avec des **variables continues (**nombre infini de valeurs réelles. La mesure d'une longueur est une variable continue, parce qu'elle peut être de 4,236982... mètres (m) selon le degré de précision voulu. 4,24 mètres n'est qu'un arrondi de la mesure initiale). Il y a un aspect structurel (**ternaire**) et un aspect fonctionnel (**proportionnalité**).

Nous voyons donc ici que la proportionnalité double concerne des types de problèmes qui sont très dissemblables pour les élèves bien que la structure abstraite soit identique. Plusieurs classes de problèmes (ternaires et quaternaires) peuvent être des situations ou s'exprime un rapport de proportionnalité. Ainsi, la proportionnalité composée est peut-être plus à voir, à notre sens, comme une caractéristique commune à plusieurs structures organisationnelles qu'une classe de problèmes en soi. Il n'est peut-être pas pertinent de les placer sur le même plan que les problèmes ternaires et quaternaires (en créant 3 classes distinctes) car cela signifierait que ces 3 catégories sont excluantes. C'est-à-dire qu'un problème est dans l'une où l'autre des catégories (ternaire, quaternaire, composition de grandeurs proportionnelles) alors que nous voyons que la proportionnalité double est transcatégorielle. Peut-être est-il plus simple de considérer deux grandes catégories (ternaires et quaternaires), ce qui est structurellement plus simple, a priori, à aborder avec les élèves et à organiser dans une progression intra et inter-cycles, tout en signifiant l'aspect transcatégoriel de la proportionnalité (commun aux deux autres catégories) ? Nous avons proposé deux modes de classement (en 3 ou 4 classes de problèmes) afin de permettre aux enseignants d'aborder selon leurs choix l'étude de ces problèmes en ayant une vision la plus claire possible des caractéristiques de ces structures. Le caractère « double proportionnalité » des problèmes de produit cartésien est un exemple assez parlant de tout l'implicite des structures arithmétiques.

3 - 4-1 Proportionnalité simple composée

Tableau synthétique des problèmes type relevant de la proportionnalité simple composée :

Type	Exemple	Modélisation	
1	Proportionnalité simple composée Dans un sachet de gâteaux il y a 4 gâteaux et dans 1 paquet il y a 3 sachets. Dimitri achète 2 paquets de gâteaux.**Combien y a-t-il de gâteaux ?**	1 / 1 / 2 1 / 3 / 4 ?	Proportionnalité simple composée
2	Proportionnalité simple composée Dans 1 sachet de gâteaux il y a 4 gâteaux et dans 1 paquet il y a plusieurs sachets. Dimitri achète 2 paquets de gâteaux et obtiens donc 24 gâteaux. **Combien y a-t-il de sachets ?**	1 / 1 / 2 1 / ? / 4 24	
3	Proportionnalité simple composée Dans un sachet de gâteaux il y a 4 gâteaux et dans 1 paquet il y a 3 sachets. Dimitri a 24 gâteaux. **Combien y a-t-il de paquets de gâteaux ?**	1 / 1 / ? 1 / 3 / 4 24	
4	Proportionnalité simple composée Dans 1 paquet de gâteaux il y a 3 sachets. Dimitri achète 2 paquets de gâteaux et obtiens 24 gâteaux. **Combien y a-t-il de gâteaux dans 1 sachet ?**	1 / 1 / 2 1 / 3 / ? 24	

La proportionnalité simple composée correspond à la réunion de deux ou plusieurs situations de proportionnalité simple. Dans un cas où 2 situations sont imbriquées, un domaine est commun aux 2 situations, il est lié proportionnellement aux deux autres et permet l'articulation des différents domaines. Ces situations sont alors imbriquées et une relation de proportionnalité va lier structurellement le domaine 1 et le domaine 2, puis le

domaine 2 avec le domaine 3. Le domaine 3 dépend indirectement du domaine 1 mais n'influence pas le domaine 1 (Voir exemples). Ceci est donc parfaitement abordable pour les élèves familiarisés avec les situations de proportionnalité simple, même au cycle 2 dans la mesure ou l'enseignant place les élèves face à un problème dont l'envergure du champ numérique n'est pas un frein à la compréhension globale du problème, et permet donc une procédure de résolution non-experte.

Exemple : « *Dans un tiroir il y a 2 sacs et dans chaque sac il y a 3 billes. Combien de billes y a-t-il dans 2 tiroirs ?* »

La difficulté résidera plutôt dans le fait de pouvoir montrer les liens progressifs entre les domaines de grandeurs mais la réduction de la grandeur du champ numérique permettra de dessiner puis modéliser très rapidement la situation. Encore une fois, la modélisation progressive comme support d'explicitation se prête à cet exercice, car elle permet de structurer les procédures et de donner une base à la démonstration, à la correction, à la discussion, etc. Il ne s'agit ici que de l'itération d'une situation et d'une procédure de résolution connue mais c'est alors l'articulation hiérarchisée des éléments qui rend sa compréhension de prime abord plus ardue.

La situation de proportionnalité simple composée peut alors être considérée comme une situation complexe (au sens premier), car la tâche est multiple et doit être partagée en sous-tâches. Chaque sous-tâche est une situation de proportionnalité liée à la précédente. Le résultat obtenu lors de la première étape est réutilisé dans la deuxième puis la suivante, etc. La mise en place d'une stratégie de compréhension efficace dès la première étape est alors essentielle, car de celle-ci découle la résolution des étapes suivantes et les implicites non perçus peuvent s'accumuler. Comme tous les problèmes à plusieurs étapes, les identifier clairement ainsi que les liens entre elles (la hiérarchisation des étapes) permet de résoudre plus efficacement dans la mesure où ceci est un objet d'apprentissage.

Exemple du type 1 :

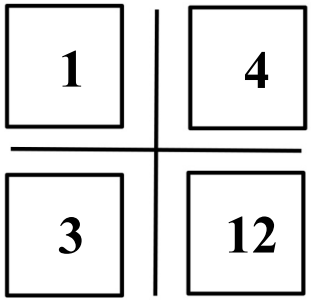
*« Dans un sachet de gâteaux il y a 4 gâteaux et dans 1 paquet il y a 3 sachets. Dimitri achète 2 paquets de gâteaux. C**ombien y a-t-il de gâteaux ? »***

<u>Ce problème cible :</u>

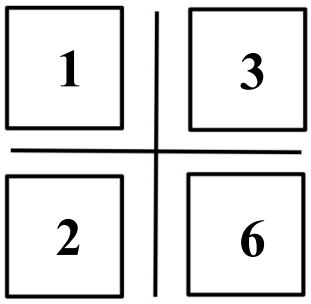
— 3 domaines de grandeurs : des quantités de gâteaux, des quantités de sachets et des quantités de paquets de gâteaux.

— une relation de **proportionnalité simple composée** entre ces trois sortes de grandeurs que l'on peut modéliser sous la forme de 2 schémas de proportionnalité simple, l'un concernant les domaines « quantité de gâteaux » et « quantité de sachets », l'autre qui associe « quantité de sachets » et « quantité de paquets ».

<u>1ère situation :</u> Pour 1 sachet, il y a 4 gâteaux. Il y a 3 sachets donc 3×4 gâteaux. Il y a un total de 12 gâteaux.



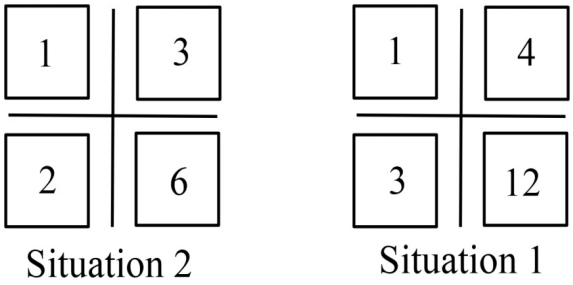
<u>2e situation :</u> 1 paquet contient 3 sachets donc 2 paquets contiennent 6 sachets.



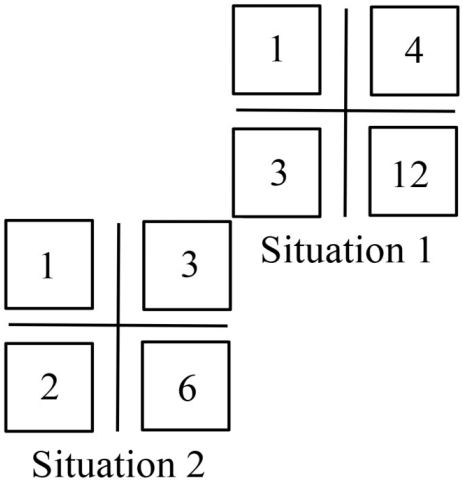
Il est possible de combiner les 2 schémas intermédiaires en un ensemble indiquant les domaines de grandeur comme signifié dans la typologie, tout comme il est possible de proposer une résolution séquentielle en ajoutant l'un après l'autre les modèles de résolution de la proportionnalité simple.

La proportionnalité simple composée n'est que, comme son nom l'indique, la composition de problèmes de proportionnalité simple. C'est alors un problème complexe (sens premier) car proposant une possibilité de résolution séquentielle à plusieurs étapes.

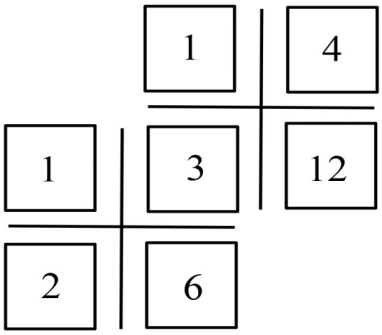
Voici une démarche détaillée de modélisation et de résolution :

Étape 1 : modéliser les 2 domaines.


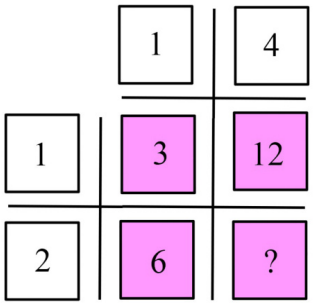
Étape 2 : chercher la liaison des 2 domaines.



Étape 3 : lier les 2 domaines.

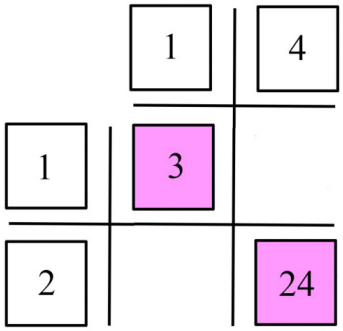


Étape 4 : Faire émerger la proportion composée

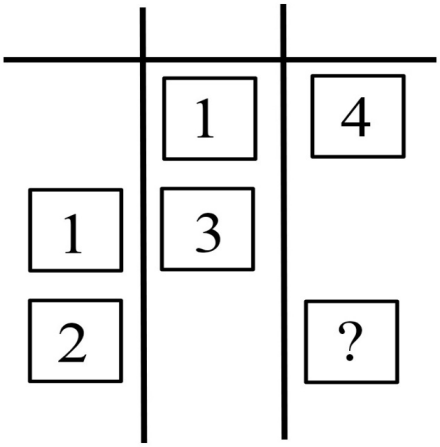


Et l'on fait apparaître les liens : 1 paquet contient 3 sachets donc 12 gâteaux puis 2 paquets contiennent 6 sachets donc … gâteaux.

Étape 5 : Résoudre le problème proposé.



Étape 6 : Support final de modélisation.



Il n'est pas toujours aisé, face à ce type de problème d'avoir une vision globale structurée de la situation avec les liens entre les domaines. La modélisation de chaque domaine et la matérialisation progressive des liens permet de s'approcher peu à peu de cette vision globale. Le modèle final n'est que le bilan de la démarche qu'il conviendra de détailler et d'expliciter à chacune des étapes de la résolution.

Ce modèle épuré n'est qu'un « squelette » de ce que peut proposer l'enseignant comme support théorique pour résoudre, pour guider et expliciter, il s'agit plutôt d'une structure organisationnelle que l'enseignant enrichira d'informations pertinentes pour les élèves. Ce n'est pas un modèle que nous considérons comme exigible pour les élèves, il est ici très abstrait et minimaliste et s'adresse en l'état à des personnes qui peuvent le lire, donc qui

perçoivent la structure interne organisationnelle. Ce n'est pas le cas des élèves (en général, mais des élèves de cycle 3 ont déjà produit des structures similaires), néanmoins l'explicitation et la pratique tendent à amener les élèves vers une perception de plus en plus fine de cette structure. Par contre, une présentation allégée qui aura pour structure ce modèle peut être enseignée et proposée aux élèves comme référence.

Le tableau suivant est construit sur ce modèle. Un dessin des éléments peut servir de point de départ.

Paquet	relation	Sachet	relation	Gâteaux
		1 sachet	$\times 4$	4 gâteaux
1 paquet	$\times 3$	3 sachets	$\times 4$	12 gâteaux
2 paquets	$\times 3$	6 sachets	$\times 4$	24 gâteaux
3 paquets	$\times 3$	9 sachets	$\times 4$	36 gâteaux

De même, les phrases suivantes respectent la structure du modèle abstrait :
« Si dans un paquet il y a 3 sachets, alors 2 paquets contiendront 6 sachets. Et si 1 sachet contient 4 gâteaux, alors 6 sachets contiendront 24 gâteaux. »

La modélisation dévoile une structure qui a un degré d'abstraction dépendant de la perception de celui qui s'y confronte (novice, intermédiaire ou expert). Ainsi le but est d'amener l'élève à percevoir cette structure, par des organisations de données (tableau, dessin, arborescences, phrases), sans en exiger la modélisation formelle experte (au primaire) qui elle, pourra servir de guide pour l'enseignant qui aura plus de facilité à produire une structure allégée cognitivement.

3 - 4-2 Proportionnalité double

Tableau synthétique des problèmes type relevant de la proportionnalité double :

Type	Exemple	Modélisation
1	Un café coûte 2 € par personne chaque jour, **Combien 4 personnes paieront-elles en 5 jours ?**	1 → 2 1 → 4 5 → ?
2	Un groupe de 4 personnes paye 40 € de café en 5 jours, **Combien paiera 1 personne pour 1 café par jour ?**	1 → ? 1 → 4 5 → 40
3	Un café coûte 2 € par personne chaque jour, **Combien de personnes sont dans un groupe qui paye 40 € en 5 jours ?**	1 → 2 1 → ? 5 → 40
4	Un café coûte 2 € par personne chaque jour, **Combien de jours sont nécessaires à 4 personnes pour payer 40 € ?**	1 → 2 1 → 4 ? → 40

Proportionnalité double

Reprenons la définition de la double proportionnalité :

— Trois domaines de grandeurs

— Les domaines 1 et 2 sont indépendants, sans lien.

— Le domaine 3 est la grandeur-produit des domaines 1 et 2.

— Il existe une relation qui associe une mesure du domaine 1 et une mesure du domaine 2 à une mesure du domaine 3.

Nous avons déjà abordé le fait que la double proportionnalité concerne des types de problèmes qui sont très dissemblables en surface (ternaires ou quaternaires) bien que la structure abstraite soit identique (la relation de double proportion entre les domaines). Le produit cartésien et ses dérivés (configuration rectangulaire) et la double proportionnalité liant des structures de proportionnalité simple (comme dans ce chapitre) sont des problèmes dans lesquels existe une relation de double proportionnalité. En tenant compte de la difficulté de perception de cette structure abstraite par les élèves, nous proposons donc des modélisations différentes selon les catégories. Ces modélisations sont néanmoins cohérentes avec la structure du problème arithmétique et aident à matérialiser la relation de double proportion en tenant également compte de la structure de surface.

Prenons le cas du type 1 :

Dans les cas de proportionnalité double il existe trois domaines de grandeurs. Les domaines 1 et 2 sont indépendants (le nombre de personnes et le nombre de jours) Le domaine 3 est le prix du café par jour et par personne. Le domaine 3 est donc le produit des domaines 1 et 2. Le « Prix » est donc dépendant du nombre de jours et du nombre de personnes, ce que nous pouvons résumer ainsi : *Prix=f* (*Jours*, *Personnes*). Stricto-sensu, ce problème de double proportionnalité reprend la structure du Produit Cartésien (l'ensemble AB est le produit des ensembles A et B). Vous pouvez relire, au besoin, les explications en début de chapitre. Les exemples proposés sont ici des **compositions** de **problèmes quaternaires** relevant de la **proportionnalité double.** Il existe donc une relation qui associe une mesure du domaine 1 et une mesure du domaine 2 à une mesure du domaine 3. Nous avons donc une situation de double proportionnalité car une relation de proportionnalité lie les 3 domaines 1 à 1.

Exemple du type 1 :

« Un café coûte 2 € par personne chaque jour, ***Combien 4 personnes paieront-elles en 5 jours ? »***

Ce problème est structuré avec :

— 3 domaines de grandeurs : des quantités de personnes, des quantités de jours et des prix.

— une relation de **proportionnalité double** entre ces trois sortes de grandeurs. Ici le coût est fonction du nombre de personnes et du nombre de jours. Chaque domaine est lié aux 2 autres.

Vous trouverez à suivre les exemples proposés ci-dessus agrémentés d'une méthode de résolution progressive et détaillée pour vous familiariser avec ces types de problèmes. De plus, il sera proposé divers exemples pour mobiliser les méthodes testées.

Exemple (type 1) et méthode de résolution :

1) Nous allons construire un tableau regroupant les 3 grandes informations : Le nombre de personnes, les jours, le prix.

Jours	Personnes	Prix
1	1	2

2) Nous allons dans un second temps chercher le prix pour les 5 jours d'une personne.

Jours	Personnes	Prix
1		2
5		10

Les cases grisées indiquent les éléments qui interviennent dans cette étape. Nous sommes donc ici dans une situation de proportionnalité simple qui est aisément abordable. Nous rappelons que la proportionnalité double est une **composition de situations de proportionnalité**. La difficulté apparente de résolution, quand on regarde globalement le problème, disparaît si la résolution est méthodique et séquentielle, car le problème est alors découpé en unités structurelles simples.

Opération : $5 \times 2 = 10$

3) Nous allons maintenant chercher le prix pour les 4 personnes puisque nous connaissons le prix pour les 5 jours d'une seule.

Jours	Personnes	Prix
1	1	2
5	1	10
5	4	40

Nous sommes ici dans la seconde situation de proportionnalité simple. Nous obtenons de façon très simple le prix total.

Opération : $4 \times 10 = 40$

Réponse : Le prix du café pour 4 personnes en 5 jours est de 40 €

Exemple (type 2) et méthode de résolution :

1) Nous allons construire un tableau regroupant les 3 grandes informations : Le nombre de personnes, les jours, le prix.

Jours	Personnes	Prix
5	**4**	**40**

2) Nous connaissons le prix pour 4 personnes et pour 5 jours. Nous cherchons alors le prix pour 1 personne en 5 jours.

Jours	Personnes	Prix
5	**1**	**10**
5	**4**	**40**

Opération : $40 \div 4 = 10$

3) Nous allons maintenant chercher le prix pour 1 journée comme nous connaissons déjà le prix pour 1 personne. Nous nous retrouvons donc encore dans une situation de proportionnalité simple.

Jours	Personnes	Prix
1	**1**	**2**
5	**1**	**10**
5	**4**	**40**

Opération : $10 \div 5 = 2$

Réponse : Le prix d'un café par personne et par jour est de 2 €

Exemple (type 3) et méthode de résolution :

1) Nous allons construire un tableau regroupant les 3 grandes informations : Le nombre de personnes, les jours, le prix.

Jours	Personnes	Prix
1	1	2

2) Nous connaissons le prix total pour 5 jours. Nous cherchons le prix pour 1 personne.

Jours	Personnes	Prix
1	1	2
5	1	10
5		40

Opération : $5 \times 2 = 10$

3) Maintenant que nous connaissons le prix des 5 jours pour 1 personne, nous cherchons le prix des 5 jours pour 4 personnes. Nous nous retrouvons donc encore dans une situation de proportionnalité simple.

Jours	Personnes	Prix
1	1	2
5	1	10
5	4	40

Opération : $40 \div 10 = 4$

Réponse : Il y a 4 personnes dans le groupe qui paye 40 € en 5 jours.

Exemple (type 4) et méthode de résolution :

1) Nous allons construire un tableau regroupant les 3 grandes informations : Le nombre de personnes, les jours, le prix.

Jours	Personnes	Prix
1	1	2
	4	40

2) Nous connaissons le prix total pour 4 personnes. Nous cherchons le prix pour 1 personne.

Jours	Personnes	Prix
1	1	2
	1	10
	4	40

Opération : $40 \div 4 = 10$

3) Maintenant que nous connaissons le prix pour 1 personne, nous cherchons combien de jours sont nécessaires pour l'obtenir. Nous nous retrouvons donc encore dans une situation de proportionnalité simple.

Jours	Personnes	Prix
1	1	2
5	1	10
	4	40

Opération : $10 \div 2 = 5$

Réponse : 5 jours sont nécessaires à 4 personnes pour payer 40 €

Exemple :

« 3 bûcherons abattent 10 arbres en 4 jours. **Combien de bûcherons sont nécessaires pour abattre 20 arbres en 12 jours ?** »

1ère étape :

Liaisons des domaines « Bûcherons » et « Jours ». 3 bûcherons abattent 10 arbres en 4 jours donc 1 bûcheron abat 10 arbres en 12 jours. 1 seul bûcheron aura besoin de 3 fois plus de temps, car le nombre de bûcherons est « 3 fois moins important. »

Bûcherons	Arbres	Jours
3	10	4
1	10	12

2e étape :

Liaisons des domaines « Bûcherons » et « Arbres ». 1 Bûcherons abat 10 arbres en 12 jours donc 2 bûcherons abattent 20 arbres en 12 jours. Le domaine « Jours » reste inchangé.

Bûcherons	Arbres	Jours
1	10	12
2	20	12

Résultat :

Il faudra 2 bûcherons pour abattre 20 arbres en 12 jours.

Il faut bien remarquer que les catégories sont bien liées proportionnellement deux à deux mais que les catégories non-liées (bûcherons et jours) le sont, elles, d'une manière inverse.

La croissance de l'une implique une décroissance proportionnellement inverse à l'autre et la décroissance de l'une implique une croissance proportionnellement inverse de l'autre.

3 fois moins de bûcherons se traduit par 3 fois plus de jours selon ce principe.

Exemples pour s'entraîner issus du site « histoire de chiffres »[1] :

Énoncé 1 : (*proposé par le mathématicien italien du XVIe siècle Tartaglia)*

Si 12 bœufs mangent 3 cents de foin en 15 jours, combien faudra-t-il de bœufs pour manger 5 cents de foin en 10 jours ?

Énoncé 2 : (*proposé par le mathématicien italien du XVIe siècle Tartaglia)*

Si 9 artisans boivent 12 brocs de vin en 8 jours, combien 24 artisans boiront-ils de vin en 30 jours ?

Énoncé 3 :

Sachant que 6 poules pondent 6 œufs en 6 jours, combien 12 poules pondent-elles d'œufs en 12 jours ?

Énoncé 4 : *Énoncé d'un vieux problème*

Un jardinier met 2 heures pour bêcher un jardin. Son voisin, qui a moins l'habitude, met 3 heures. Ils décident de travailler ensemble. Combien vont-ils mettre de temps pour bêcher ce jardin ?

Énoncé 5 :

12 poules naines mangent 36 kg de grains en 18 jours. 9 poules naines pondent 12 œufs en 8 jours. Combien faut-il de kg grains pour pondre 1999 œufs ?

Réponses : 1) 30, 2) 120, 3) 24, 4) 1h12min, 5) 1999.

1 http://histoiredechiffres.free.fr/tests%20de%20logique/9%20double%20prop.htm

Énoncé 1 : *Si 12 bœufs mangent 3 cents de foin en 15 jours, combien faudra-t-il de bœufs pour manger 5 cents de foin en 10 jours ?*

Première étape :

Les 12 bœufs mangeront 3 fois moins de foin en 3 fois moins de jours. Réduction des domaines foin et jours.

boeufs	foin	jours
12	3	15
12	1	5

Deuxième étape :

À quantité égale de foin, il y aura moitié moins de bœufs pour le double du temps.

boeufs	foin	jours
12	3	15
12	1	5
6	1	10

Troisième étape :

Liaison entre les domaines bœufs et foin. Pour manger 5 fois plus de foin dans un temps donné, il y aura 5 fois plus de bœufs.

boeufs	foin	jours
12	3	15
12	1	5
6	1	10
30	5	10

Énoncé 3 : *Sachant que 6 poules pondent 6 œufs en 6 jours, combien 12 poules pondent-elles d'œufs en 12 jours ?*

Première étape :

Les 6 poules pondront le double d'œufs dans le double de temps. Lien entre œufs et jours.

poules	oeufs	jours
6	6	6
6	12	12

Deuxième étape :

Pour un temps donné et fixe, le double de poules pondra le double d'œufs. Lien entre poules et œufs.

poules	oeufs	jours
6	6	6
6	12	12
12	24	12

Énoncé 4 : *Un jardinier met 2 heures pour bêcher un jardin. Son voisin, qui a moins l'habitude, met 3 heures. Ils décident de travailler ensemble. Combien vont-ils mettre de temps pour bêcher ce jardin ?*

Première étape : organiser les données pour chaque jardinier.

jardinier	temps	jardin	jardinier	temps	jardin
1	2	1	1	3	1

Deuxième étape : À temps identique, combien de jardin sont bêchés ?

jardinier	temps	jardin	jardinier	temps	jardin
1	6	3	1	6	2

Troisième étape : Mise en commun des données. En 6 heures de travail, 5 jardins seraient bêchés.

jardinier	temps	jardin
2	6	5

Quatrième étape : Temps nécessaire pour bêcher 1 jardin pour les 2 jardiniers ?

jardinier	temps	jardin
2	1h12	1

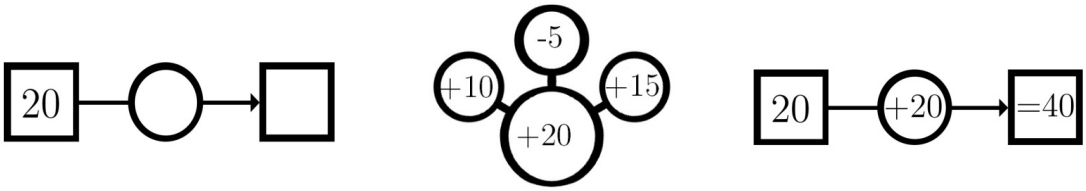
4 - 1 Problèmes complexes arithmétiques.

Il ne faut pas confondre complexité et difficulté. Un problème simple du point de vu structurel peut être facile ou compliqué selon les domaines abordés (décimaux, fractions, etc.) tout comme un problème complexe strcucturellement peut être lui aussi facile ou compliqué. « Simple » et « complexe », au sens premier de ces termes, déterminent la structure du problème et non son degré de difficulté. Une proposition de travail sur les tâches complexes est proposée sur le site de l'académie de Grenoble [1]

Les problèmes complexes sont alors des problèmes pour lesquels la tâche est multiple et doit être partagée en sous-tâches faisant appel à des connaissances et à des habiletés différentes. Dans notre projet, le problème complexe est donc un agglomérat de problèmes structurellement simples qui s'imbriquent dans un ensemble cohérent. La tâche complexe est alors la finalité ultime du projet, pas son commencement. La tâche complexe est le but final des apprentissages et pas le moyen d'apprentissage. C'est-à-dire que nous optons pour une préparation très progressive des élèves, sur du long terme, en allant du simple vers le complexe, pour les amener à pouvoir résoudre efficacement des problèmes complexes, car ils auront un socle de connaissances et compétences plus développé et donc des automatismes qui évitent les surcharges cognitives nuisibles à la compréhension. C'est par la suite, une fois que l'élève disposera de ces connaissances et compétences nécessaires que cet objectif pourra devenir un moyen d'apprentissage. D'après nos observations empiriques, une tâche complexe permet un réel apprentissage quand l'élève à déjà une base de connaissances et compétences solides qui seront utiles pour cette tâche. Il faut donc proposer une tâche adaptée où les élèves auront le bagage nécessaire pour entamer la résolution. Si ce n'est pas le cas, avec une tâche complexe trop difficile, qui arrive trop tôt compte tenu des connaissances et compétences des élèves (qui sont en plus très hétérogènes), la surcharge cognitive sera trop importante et il n'y aura pas apprentissage (sauf peut-être pour une minorité d'élèves). Ajoutons qu'un « problème complexe » peut revêtir plusieurs formes selon le niveau de classe, en fonction du nombre d'étapes, des données, des opérations en jeu, des relations évoquées. Le problème suivant peut être un problème complexe pour des CE1. Il y a deux structures, une additive et une multiplicative.

1 http://www.ac-grenoble.fr/ien.g3/IMG/pdf_Complexe_dernier.pdf

Exemple : *« J'avais 20 euros dans ma tirelire. J'y dépose 10 euros lundi, en dépense 5 mardi et rajoute 15 euros mercredi.* ***Quelle somme ai-je dans ma tirelire ?*** *»*



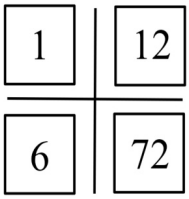
Je connais la quantité initiale et je la représente. Je connais les transformations et je les groupes pour obtenir la transformation globale. Je reprends mon modèle initial.

Ou alors en modifiant le schéma des transformations on agissant de manière séquentielle (les ajouts et retraits s'enchaînent) sans porter attention à la transformation globale. Les questions vont induire l'utilisation totale ou partielle de ces modèles selon que la transformation globale sera ou non demandée.

Exemple : *« 1 livre coûte 12 euros, j'en achète 6. Je paye et il me reste 28 euros dans mon porte-monnaie.* ***Combien ai-je payé et combien d'argent avais-je avant de payer ? »***

<u>1ère étape : proportionnalité simple.</u>

1 livre coûte 12 euros donc 6 livres coûteront : $6 \times 12 = 72$ euros.



<u>2e étape : Transformation d'état.</u>

…… $- 72 = 28$ soit $72 + 28 = 100$

Réponse : « J'ai payé 72 euros, j'avais 100 euros avant de payer. »

Ce problème est donc résolu par la reprise des stratégies connues pour résoudre les problèmes simples. Il y a 2 étapes lors de la résolution, d'où la notion de « complexe ». En l'état, ces situations simples ne sont pas compliquées mais c'est, a priori, le traitement séquentiel de la résolution qui pourrait l'être. Néanmoins, cette « difficulté » est relative selon le degré de familiarisation des élèves avec une méthodologie de résolution de ce type de problèmes.

Nous avons modélisé chaque étape du problème afin de faire ressortir la structure globale du problème complexe. Il faut conduire les élèves à porter une attention toute particulière à l'articulation temporelle du problème et à la logique sous-jacente. La démarche utilisée lors de la résolution de problèmes simples est ici remobilisée plusieurs fois à la suite. La structure globale va alors émerger lors de la phase de modélisation.

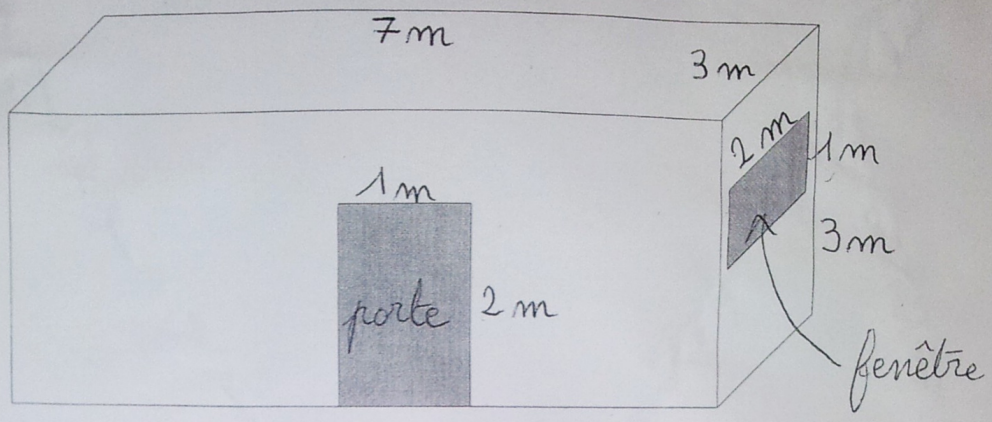
Tous les modèles peuvent s'articuler entre-eux comme les pièces d'un jeu de construction. Le nombre de pièces peut varier mais les emboîtements conservent toujours une structure logique. Il s'agit de percevoir ces pièces qui s'emboîtent en créant une structure logique et d'en analyser les éléments. L'analyse de ces éléments n'est que plus efficace si l'élève connaît les éléments. Il doit au préalable avoir solidement en mémoire les structures primaires avant de passer à la phase de complexification. La modélisation et la mise en équation sont alors construites à partir du sens du problème et de l'articulation des données et non sur la nature du calcul. Celui-ci découle de la compréhension structurelle.

Il s'agit alors de faire preuve de rigueur et de logique dans le traitement des données en faisant préalablement émerger les structures sous-jacente du problème rencontré afin d'ordonner et d'articuler les procédures de résolution. L'émergence des structures nécessite une mémoire de celles-ci et donc un entraînement répété et approfondi pour les reconnaître et les comparer. Dès que la reconnaissance devient un automatisme, la mémoire de travail est alors déchargée des processus de reconnaissance et devient disponible pour traiter l'agencement des structures et donc se focaliser sur la compréhension de celles-ci, le fameux « sens »

Le « Niveau 5 »ne propose que des problèmes complexes où toutes les structures étudiées depuis le CP peuvent s'imbriquer pour créer de nouveaux ensembles. Ces ensembles peuvent se composer de 2 à plusieurs sous-structures mathématiques. L'objectif est d'approfondir toutes les notions abordées pour les consolider en devant les traiter dans des contextes variés. Le but est d'aller au-delà d'un traitement de surface. Toutes les catégories de problèmes sont concernées ainsi que tous les registres (additif, multiplicatif).

Vous trouverez ci-après un exemple de problème complexe qui a nécessité un travail coopératif des élèves de CM2. L'ensemble du problème à été modélisé, organisé et résolu par les élèves qui se sont appuyés sur les structures étudiées. Chaque étape a donc pu être détaillée et explicité tant au niveau de la technique que du sens. Un affichage final à été produit.

Peinture à la maison.

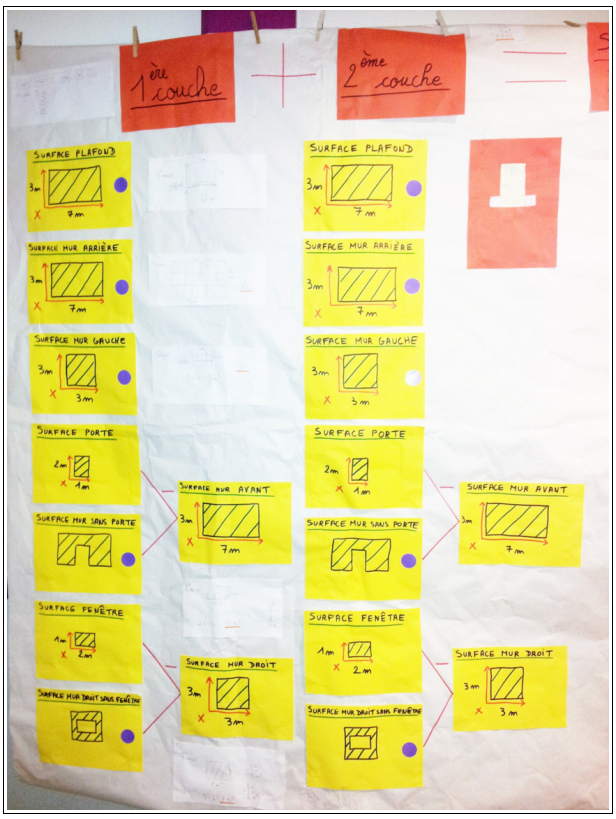


M. Dupont décide de repeindre son salon. Celui-ci a la forme d'un parallélépipède rectangle. Il peint les quatre murs et le plafond en blanc et sa porte en bleu. Il est perfectionniste et décide de faire 2 couches.
Combien dépensera-t-il d'argent pour acheter la peinture nécessaire à ses travaux ? Lui restera-t-il de la peinture ? Devra-t-il louer un camion pour transporter la peinture achetée ?

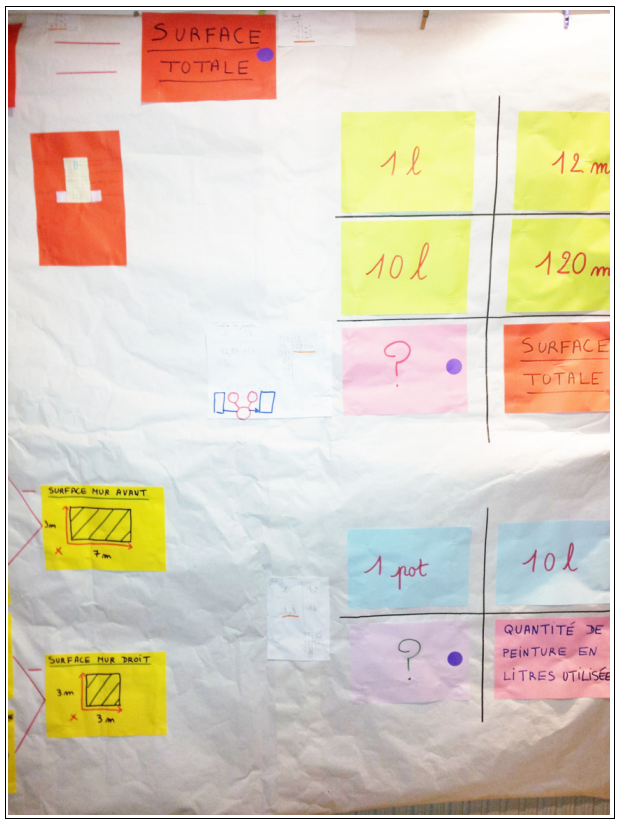
Peinture Dulux Valentine murs et plafonds 10 L Blanc mat.
En construction ou rénovation, le choix d'une peinture blanche pour murs et plafonds est important. Avec ce blanc mat de Dulux Valentine, vous avez l'assurance de travailler avec un produit de qualité qui masquera toutes les petites imperfections. Vendu en pot de 10 litres, il couvrira jusqu'à 120 m².

- Usage : Peinture
- Pièce destination : Grande pièce sèche
- Type support : Murs et plafonds
- Aspect : Mat
- Dilution :Acrylique
- Rendement : 12 m²/l
- Lessivable/Lavable : lavable
- Coloris : Blanc mat
- Prix : 60,95 €
- Poids : 16.56 kg

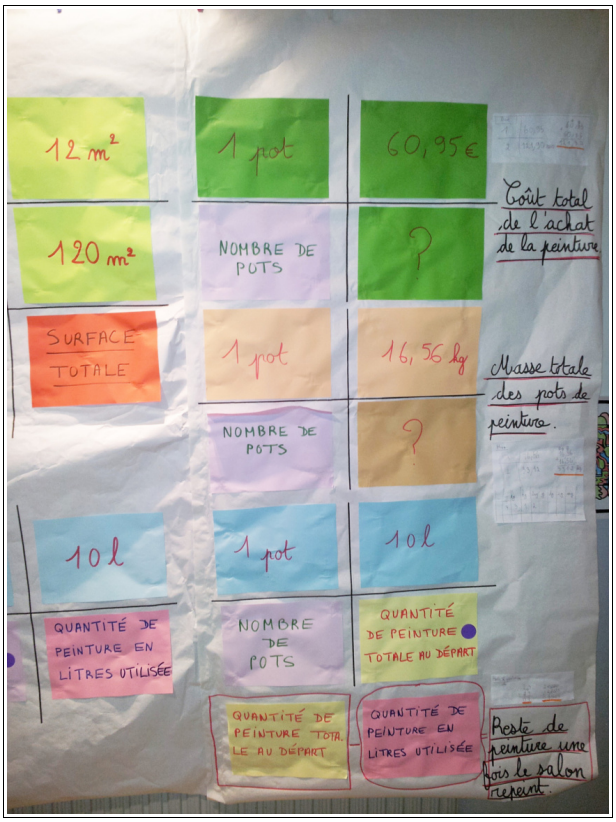
Problème proposé à des CM2.



Aires et compositions



Proportionnalité



Proportionnalité composée

Affiche bilan des élèves

L'un des objectifs était de mettre en commun les compétences et connaissances des élèves dans la réalisation d'une tâche complexe. La résolution de problèmes peut être une œuvre coopérative tout en mettant en œuvre une pédagogie qui guide et modélise. Cette tâche complexe coopérative est l'aboutissement d'un processus de modélisation et de guidage entamé plusieurs années auparavant.

Il s'agissait également de s'entraîner à modéliser toutes les étapes structurelles pour pouvoir revenir en détail sur chaque élément constitutif du problème. Cela permettait de retravailler les structures, d'expliciter, et donner un retour précis aux élèves.

Ainsi, ce travail va bien au-delà d'une simple résolution mais n'est accessible et réellement profitable qu'à la fin du processus.

4 - 2 Problèmes ouverts.

Les problèmes ouverts ou problèmes pour chercher peuvent être abordés en parallèle de notre projet ou même en complément. Afin de détailler leur nature, nous citons Dominique Pernoux[1] :

1°) Définition[2]

Un « problème ouvert » est un problème dont la résolution n'a pas pour but d'introduire une notion nouvelle ou uniquement d'appliquer ou réinvestir des connaissances, mais de **développer chez les élèves le goût de la recherche et les capacités à chercher**.

Caractéristiques d'un « problème ouvert » (adapté d'une définition donnée par l'IREM de Lyon) :

– l'énoncé est court et concerne un domaine (numérique, géométrique ou logique) avec lequel l'élève a assez de familiarité pour prendre facilement "possession" de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, etc. (la difficulté ne doit pas se situer dans la compréhension de la situation, mais dans les moyens de répondre à la question posée)

– l'énoncé n'induit ni la méthode ni la solution et celle-ci ne doit pas se réduire à l'utilisation ou l'application immédiate des résultats vus en cours

2°) Pourquoi donner des « problèmes ouverts" ? (d'après le document d'accompagnement des programmes « Les problèmes pour chercher » et un article de la revue N)

– pour **développer la capacité de l'élève à faire face à des situations inédites** (le « problème ouvert » permet de proposer à l'élève une activité comparable à celle du mathématicien confronté à des problèmes qu'il n'a pas appris à résoudre)

Note de l'auteur : Ne jamais négliger le fait que le mathématicien **est déjà spécialiste** de sa matière et travaille avec des connaissances nombreuses, ramifiées en un réseau de connaissances et concepts, des analogies, des similitudes et a une vision globale d'une

1 : ex-formateur en mathématiques (1er degré) à l'IUFM d'Alsace (Université de Strasbourg)

2 : http://pernoux.pagesperso-orange.fr/Problemes/doc10.pdf

situation (par analyse et synthèse).

La mésinterprétation est le fait de penser que mettre le novice dans les conditions de l'expert, d'imiter son action, permettrait de développer des compétences d'expert pour faire face à des situations nouvelles sans avoir créé une parfaite adéquation entre les acquis du novice et les nécessités du problème proposé. C'est-à-dire espérer que l'élève va directement apprendre en résolvant (par induction et analogie) et en découvrant les concepts. Nous citons ici le commentaire d'un collègue enseignant lors d'une discussion sur ce sujet : *« Dans la plupart des cas ça revient à demander à un élève d'assurer un concert comme un professionnel sans lui avoir appris à jouer d'un instrument. Vous imaginez le sentiment d'échec de l'élève ? ».* L'enseignement par situation problème (problem-based learning, taille d'effet 0,12) est une approche qui à de l'intérêt pour les experts (un élève peut être expert) avec un solide bagage notionnel, pas aux débutants qui ne peuvent en tirer profit contrairement a un apprentissage guidé des stratégies de résolution (Problem-solving teaching, taille d'effet 0,63)[3]

De plus, le mathématicien a en mémoire une masse de connaissances disciplinaires, d'automatismes et de stratégies qui font que bien que face à une situation mathématique nouvelle, celle-ci n'est pas inédite au point qu'aucun lien ne puisse être établi avec ses connaissances initiales. L'expert a aussi une capacité cognitive propre aux experts, développée sur un temps long, capacité que n'a pas le débutant. Il est donc très abusif, à notre sens, de comparer le travail de l'élève à celui du mathématicien et de penser qu'en faisant cela il développera les mêmes habiletés qu'un expert qui lui, a des dizaines d'années d'expérience. Le débutant a donc besoin d'un bagage notionnel et réflexif avant de pouvoir entamer une démarche efficace face à ce type de problèmes. Là ou le spécialiste voit la structure profonde en faisant abstraction de sa structure superficielle. Le spécialiste fait des liens et construit une représentation globale structurée là où le débutant se focalisera sur la structure superficielle. Ainsi, la tâche complexe est une finalité dans notre projet, non un point de départ. Nous pensons alors que ce n'est pas la seule rencontre de situations inédites qui développe la capacité à faire face aux situations inédites, mais que c'est surtout l'apprentissage de stratégies efficaces pour les situations inédites qui sera plus utile. En quelque sorte nous prenons les devants avec les élèves en tentant autant que possible de les outiller avec des postures, des stratégies, des exemples qui marchent et d'autres qui ne marchent pas pour qu'ils puissent à terme gérer de manière autonome une situation nouvelle.

– pour permettre à l'élève de **prendre conscience de la puissance de ses connaissances** même si celles-ci sont modestes – pour permettre, au niveau méthodologique, de valoriser des comportements et des méthodes essentiels : prendre des initiatives, être critique vis-à-vis de son travail, s'organiser, être méthodique, communiquer…

3 https://visible-learning.org/nvd3/visualize/hattie-ranking-interactive-2009-2011-2015.html

Note de l'auteur : face à des élèves avec des difficultés scolaires importantes, le risque est qu'ils prennent plutôt conscience de la non-puissance de leurs connaissances, car elles sont trop fragiles dans cette situation. Et que ces élèves ne soient donc pas en mesure de prendre la moindre initiative car ils seraient trop éloignées de la tâche proposée. Attention à bien géré « l'espace » entre la tâche proposée et les prérequis de l'élève. Être critique vis-à-vis de son travail est une compétence de haut niveau, il faut pouvoir observer avec recul et objectivité sa pratique et donc avoir une base de connaissances et compétences très solide pour revenir en arrière, reprendre, réessayer en ciblant les charnières d'un problème. Il faut donc être vigilant sur la nature des problèmes proposés, sur la capacité des élèves à aborder ces problèmes en équilibrant la difficulté de manière à proposer une « résistance » mais pas une inaccessibilité. Le risque est de proposer une activité pour « bons élèves » qui, à l'inverse des objectifs visés, va éloigner encore plus les plus fragiles.

– pour développer les capacités d'argumentation – pour offrir une occasion de prendre en compte et même de valoriser les différences entre élèves (c'est la diversité des stratégies qui permet l'échange, la confrontation et le débat) – pour contribuer à l'éducation civique des élèves (entraide, écoute, prise en compte et respect de l'autre…)

Note de l'auteur : Est-ce le fait de pratiquer la résolution de problèmes ouverts qui développe la capacité d'argumentation ou est-ce le fait d'enseigner comment argumenter pour la résolution de problèmes ouverts qui permet de développer ces capacités ? Autrement dit, est-ce que faire est suffisant pour finalement bien faire, ou fait-il apprendre à faire pour faire mieux ? Débat possible sur la pratique qui se suffirait à elle-même pour faire émerger l'expertise ou sur la nécessité de l'apprentissage en montrant l'expertise d'une pratique pour que l'élève l'atteigne plus rapidement. Il semble que pour que la confrontation soit féconde entre les élèves, il faut pouvoir opposer des arguments, des stratégies, des faits rationnels de manière à ce qu'ils puissent s'extraire de l'avis ou de l'opinion pour rester dans le champ de la rationalité. Beaucoup d'enseignants ont déjà constaté qu'il est extrêmement difficile pour un élève de changer d'avis face à un camarade, quand bien même sa solution aurait été « rationnellement » rejetée car non opérationnelle. L'enseignant doit valider et est alors l'arbitre des débats mais pourquoi l'enseignant ne serait-il pas incorporé au débat ? Rien n'empêche l'enseignant de donner, de transmettre, quand cela ne vient pas des élèves. L'enseignant reste l'expert dans la classe. Le risque serait immense de laisser s'installer des conceptions fausses ou bancales, des stratégies lourdes, non rationnelles en espérant qu'un élève trouve pour partager avec les autres. Même avec un public d'adulte, le schéma se reproduit, avec une persistance des solutions objectivement fausses malgré la solution donnée. Nous y reviendrons dans un chapitre de « questions/réponses ».

Pour que le débat soit « productif » pour les élèves (mais est-ce possible pour tous les élèves d'une classe ? C'est à dire que chacun puisse proposer un avis, une démarche, un concept, de manière objective et rationnelle. Pour qu'ils se saisissent des stratégies et

qu'ils puissent les réfuter il est alors nécessaire de travailler explicitement ce qui va permettre de débattre sereinement et d'apprendre en le pratiquant. Cela nécessite à nos yeux un temps long et une pratique maîtrisée par l'enseignant qui indique clairement les critères de validité pour aider les élèves à argumenter tout en proposant des activités qui visent à tester les stratégies. Il nous semble essentiel d'inscrire cette activité d'argumentation dans un temps long tout en l'adossant à un enseignement structuré de connaissances et compétences pour consolider cette argumentation car sans arguments, comment débattre autrement qu'avec une trop forte dose d'affectif ? Il faut donc dans ce cas assurer une continuité et une cohérence sur ce sujet avec ses collègues pour avoir le temps de développer sur plusieurs années ces compétences spécifiques.

– permettre à l'enseignant de faire connaître aux élèves quelles sont ses attentes en matière de résolution de problèmes (ce n'est pas facile, il s'agit de chercher, de prendre des initiatives, on peut essayer pour voir, l'originalité est encouragée et retenue… et on peut se tromper…)

Note de l'auteur : À titre personnel, je n'annonce jamais qu'un problème est facile ou difficile. C'est beaucoup trop dépendant des élèves et des enseignants, la difficulté pour l'un est une facilité pour l'autre. Échouer à un problème annoncé comme facile n'est peut-être pas le mieux pour l'estime de soi, surtout si c'est fréquent. Échouer à un problème annoncé comme difficile pourrait justifier d'avance l'échec ou le non-travail. Nous en revenons à « résistance » mais pas « inaccessibilité » quant à la difficulté proposée, et cette difficulté est forcément relative. Nous présentons plutôt un problème en fonction des connaissances et compétences nécessaires pour l'aborder en informant l'élève de ce qu'il sait et de ce qu'il peut mobiliser. C'est la mise en situation. Cela ne l'empêchera pas, éventuellement, de se tromper, mais il sait qu'il a les outils nécessaires. Les raisons de l'échec seront donc dues à une ou plusieurs lacunes dans des domaines que l'élève peut travailler et à une maîtrise encore fragile des outils dont il dispose. Ce n'est pas lui, personnellement, intellectuellement, qui est défaillant, mais ce sont les manques qu'il peut avoir qui causent cette défaillance. La réussite est donc accessible pour l'élève, <u>mais</u> elle va nécessiter du travail personnel, de l'entraînement, des erreurs, etc et il n'y a rien de plus normal. Ces prérequis doivent être très explicitement annoncés aux élèves. Il ne faut pas leur mentir sur ce qui est nécessaire pour atteindre tel ou tel objectif et sur ce que cela va demander en échange de leur part. Il est effectivement essentiel de leur apprendre à s'appuyer sur les erreurs comme des marches pour progresser, à prendre des initiatives mais en leur apprenant aussi à se focaliser sur une/ des démarche(s) et ne pas partir dans tous les sens de manière à pouvoir prendre du recul sur son raisonnement et bifurquer si besoin. Le but est de savoir revenir en arrière pour changer de voie au lieu de partir en tout sens à la moindre difficulté. C'est un travail très ardu.

Concernant l'originalité : Qu'est-ce que l'originalité ? Et pour qui ? Qui juge de ce qui est ou non original ? Original en soi ou original par rapport aux productions du groupe ? Bien sur, si l'originalité se mesure par rapport aux productions du groupe, une solution proposée par un seul élève sera de fait originale et présentée dans sa dimension d'unicité. Elle retiendra donc plus d'attention pour comprendre comment l'élève à pu produire cette solution et comment transférer cette façon de faire aux autres si elle est pertinente. Mais chercher l'originalité est-il le but en résolution de problème ? Le but n'est-il pas d'abord de résoudre ? Et tant mieux si la solution proposée est originale. Ainsi nous n'allons pas encourager l'originalité comme un but en soi, avec le risque du « je fais quelque chose d'original mais complètement erroné, car j'ai visé l'originalité d'abord au détriment de la recherche de la solution », mais nous aborderons plus longuement une production exacte <u>et</u> originale et qui sera donc valorisée (au sens unicité) et nous tenterons, dans la mesure du possible de proposer des exemples variés de solution pour augmenter les ressources des élèves. Donc oui à l'originalité mais pas comme une fin en soi, plutôt comme un agrément à la justesse d'une solution.

L'intérêt des problèmes ouverts, en lien avec notre projet, est l'observation des stratégies mises en œuvres par les élèves ayant pour bases les structures déjà étudiées. Nous nous intéressons donc aux démarches de l'élève, aux stratégies employées, aux liens établis avec les modèles déjà étudiés et aux sources de réussite et d'erreurs. Même si le problème n'est pas purement arithmétique, les grands principes de posture de l'élève, de travail sur l'erreur, de recherche sont respectés.

Prenons le cas du problème suivant, les élèves n'ont pas de stratégie experte (Problème également donné en formation à des adultes) :

« Un crayon et une feuille coûtent 1,10 €. Le crayon coûte 1€ de plus que la feuille, **quel est le prix du crayon ?** »

Réponse quasi immédiate des élèves (et des adultes) : 1 €.

Mais, sachant que la question est posée à dessein, l'adulte sait en général que sa réponse immédiate a de grandes chances d'être fausse. Pourquoi demander une « évidence » ? Il y a donc une forte possibilité d'avoir un piège. Ce recul de l'adulte sur ses automatismes, l'élève ne l'a pas encore s'il n'y a pas eu un travail spécifique sur les protocoles de vérification. Il y a donc des nouveaux automatismes qui doivent remplacer les anciens.

Le problème est abordable par tâtonnement, en variant les prix des objets en ne dépassant pas 1,10€. Peut-être que cela prendra du temps, tout dépend des élèves. Bref, c'est variable. Tout comme les stratégies proposées. On peut aussi utiliser des modèles pour représenter la situation et se sortir de « l'évidence trompeuse ». Le crayon coûte 1 € de plus que la feuille. Le prix du crayon correspond donc au prix de la feuille plus 1 €. Le « 1 de plus » correspond, en modélisant, à la même quantité pour les deux éléments plus une différence. Soit 1 € 10 cts, je retranche la différence d'1 €. J'obtiens 10cts que je partage entre les 2 objets. La quantité initiale est donc 5 cts. Entre 5 cts et 1 € 05 cts, il y

a bien 1 € de différence. La somme des deux est bien de 1 € 10 cts.

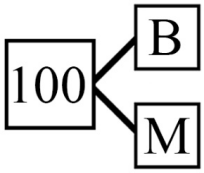
« Une montre et un bracelet coûtent 100 euros. Le bracelet coûte 85 euros de moins que la montre. **Combien coûte la montre ?** »

Ce problème est structurellement identique au précédent. La résolution pourrait se faire ainsi si l'élève avait le niveau d'expertise requis :

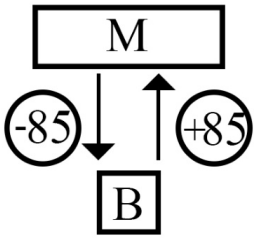
Bracelet = Y et Montre = X donc X + Y = 100 et X – 85 = Y

Soit X + X – 85 = 100 donc 2X = 185 et X = 92,5. Le bracelet coûte 7,5 euros et la montre 92,5 euros.

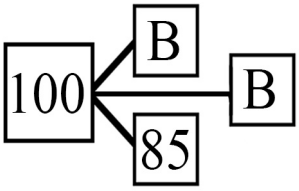
Voici l'équivalent de cette résolution mais réalisée à partir des modèles schématiques pour recréer les liens entre les inconnus.



Bracelet + Montre = 100 euros



Bracelet + 85 euros = Montre



2 Bracelets + 85 euros = 100 euros

Nous obtenons donc : 2 Bracelets coûtent 15 euros alors un Bracelet coûte 7,5 euros Ainsi, face à un problème inédit et « ouvert » pour leur classe d'âge, et qui pourrait nécessiter une mise en équation pour le résoudre, un élève peut s'aider des structures existantes (structures profondes) pour amorcer une démarche. La capacité à résoudre implique une capacité à visualiser les liens entre les éléments du problème et leur organisation logique. L'utilisation de structures modélisatrices permet d'aider l'élève à faire émerger ces liens entre les informations et à construire un raisonnement solide. En se détachant du superficiel, l'élève peut s'appuyer sur la structure profonde modélisée qui n'est qu'une représentation géométrique d'une équation. En cela, notre démarche prépare les élèves à la rencontre de ces notions et à une meilleure compréhension de celles-ci.

4 - 3 Modéliser des problèmes ouverts ?

Il s'agit ici du résumé d'un échange entre l'auteur Kevin GUEGUEN et Sylvie MARTIN-DAMETTO et Henrique VILAS-BOAS, chargés d'étude au Centre Alain-Savary IFé/ENS de Lyon, sur la modélisation de problèmes divers. L'échange concernait la possibilité de modéliser ou non des problèmes divers, d'utiliser cette modélisation comme base de travail pour l'élève ou comme support d'explicitation de la structure interne du problème

Nous proposons ci-après des énoncés et des propositions de modélisation de ceux-ci par l'auteur.

Énoncé 1 : Si nous sommes 4 personnes, combien de poignées de main allons nous faire ?

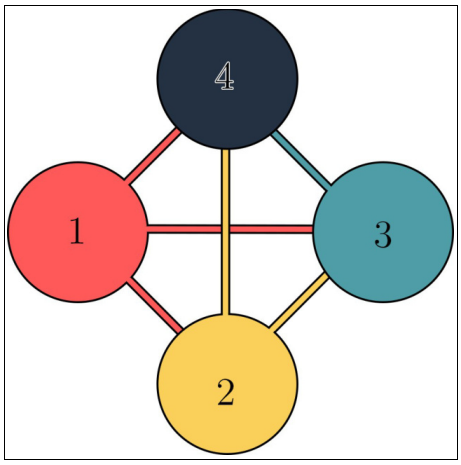
1) Première possibilité avec les CP : Jouer la scène réellement avec 4 élèves et compter/noter chaque poignée de main pour établir la solution.

2) Créer un modèle :

« Nous sommes 4 alors nous allons représenter les 4 personnes, nous pouvons dessiner 4 bonhommes ou encore les représenter avec 4 points/ronds de couleurs différentes. »

« Le but est de montrer qu'ils se serrent la main alors nous allons représenter cette action en reliant les bonhommes / les ronds qui se serrent la main »

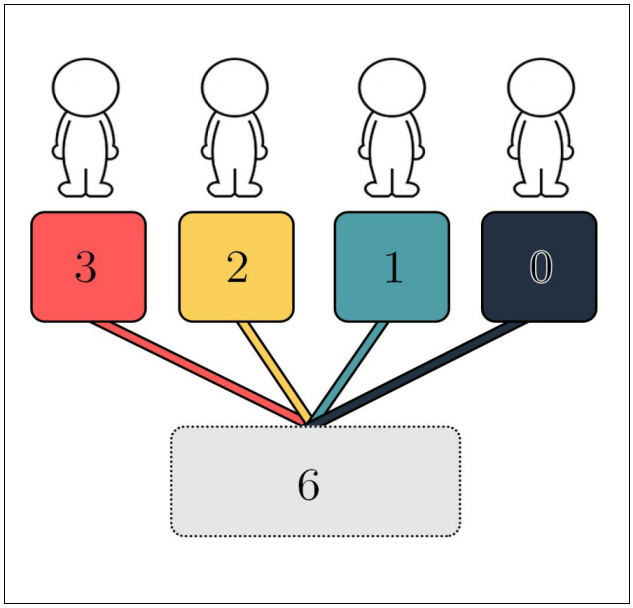
« Nous pouvons alors compter les serrages de main »



L'intérêt est de visualiser directement les interactions pour remarquer que le dernier ne sert rien de lui-même. On additionne simplement $3 + 2 + 1 + 0 = 6$

3) Une phrase mathématique pour expliciter le déroulement et schématiser les interactions sous-jacentes :

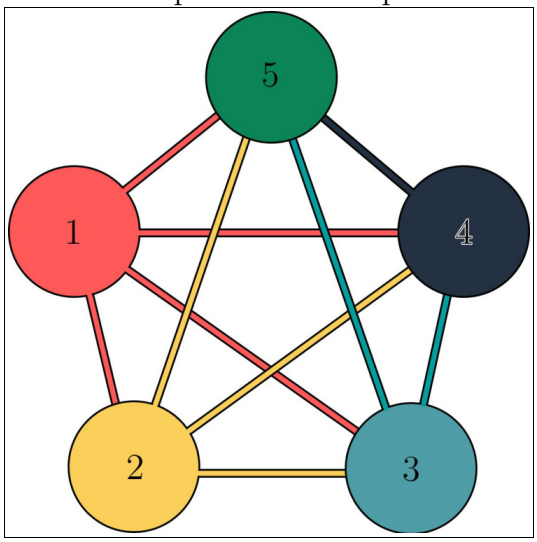
La **1**re **sert 3 mains**, la deuxième à déjà serré une main et **sert 2 mains**, la troisième à déjà serré 2 mains et **sert 1 main**, enfin la quatrième à déjà serré 3 mains et ne **sert rien**. On retrouve alors $3 + 2 + 1 + 0 = 6$



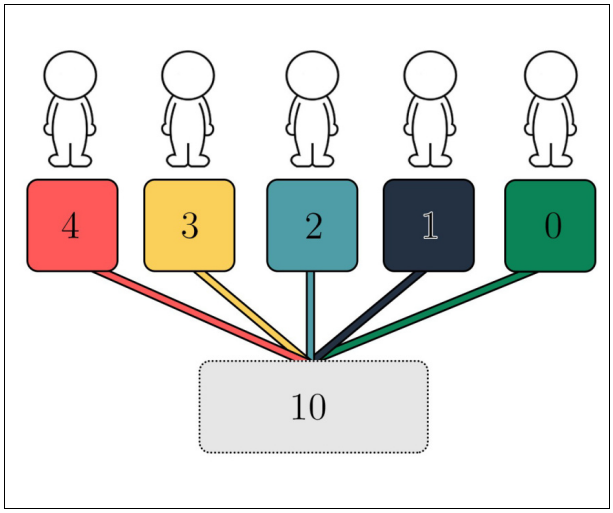
Énoncé 2 : Pour le lendemain, si nous sommes 5, combien de poignées de main ?

1) reprise du modèle (car le nombre d'intervenants est limité) :

Il est possible de reprendre les mêmes procédures que pour 4 personnes et se servant de la première modélisation pour en créer une plus poussée et ensuite atteindre ses limites. Car cette procédure devient fastidieuse pour 8 et c'est pire au-delà…



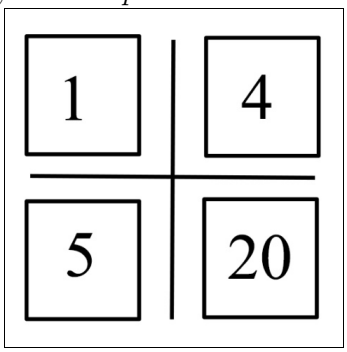
Là encore, on visualise les interactions pour remarquer que le dernier ne sert toujours rien lui-même. On additionne les barrettes « serrage » : $4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 10$



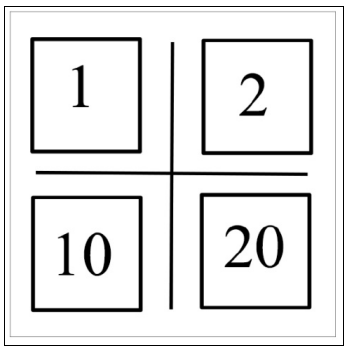
2) Un modèle de proportionnalité composée :

Reconnaissons que cela dépasse « un peu » le niveau CP/CE1 mais c'est envisageable par la suite (fin cycle 3) et surtout si le nombre de personnes est élevé. Cette fois-ci nous partons du fait qu'avec 5 personnes, chacun va donc logiquement serrer 4 mains.

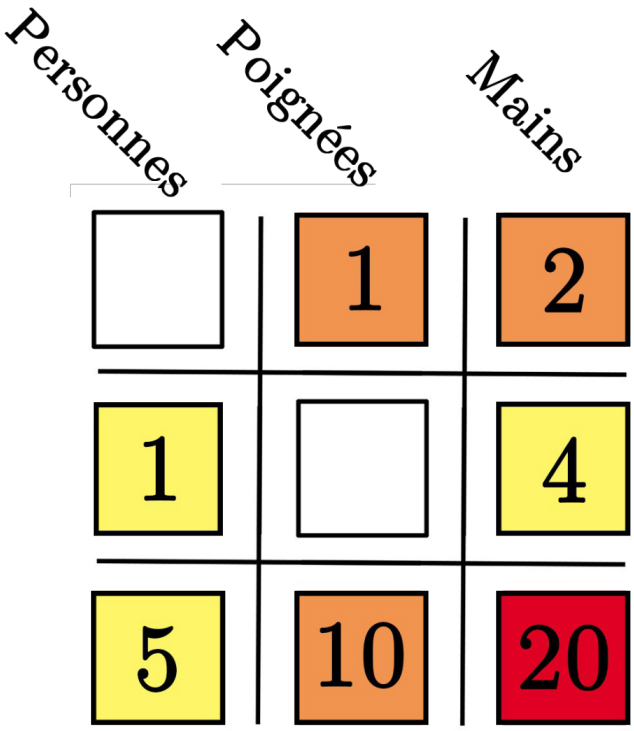
*« Si une personne sert 4 mains, alors 5 personnes vont serrer **20 mains** ».*



*« **Une poignée** de main **se partage en 2 mains** donc 20 mains font 10 poignées » ou « **2 mains font une poignée donc 20 mains font 10 poignées** ».*



Et donc le schéma bilan qui lie les 2 relations de proportionnalité en une seule.



Pour le surlendemain : *« Et si nous sommes 8, combien de poignées de mains ? »* L'intérêt est de voir si des élèves ont déjà le modèle de la proportionnalité en tête, et si c'est le cas, de montrer que ce modèle n'est valide que dans certaines situations. Pour 8, nous réutilisons les différentes approches, en observant si les élèves arrivent à les remobiliser après avoir ré-explicité la démarche et toutes les étapes que nous respectons. Nous aurons alors :

$7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 28$

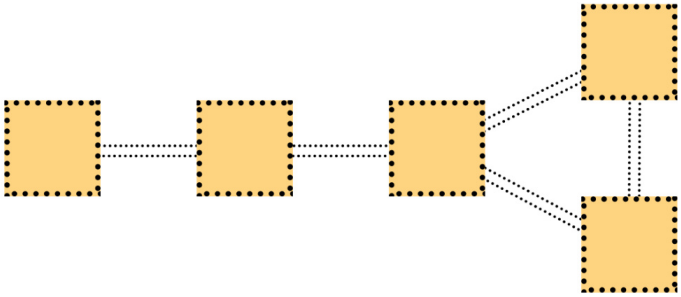
ou avec le modèle de proportionnalité double : « 1 personne sert 7 mains, alors 8 vont serrer 56 » et « 2 mains font 1 poignée donc 56 mains font 28 poignées. »

Pour tester l'efficacité de cette procédure, nous allons prendre 140 personnes et refaire la même démarche et proposer des situations structurellement identiques.

« 1 personne sert 139 mains donc 140 personnes vont serrer 19 460 mains », et « 2 mains font 1 poignée donc 19 460 mains font 9730 poignées ».

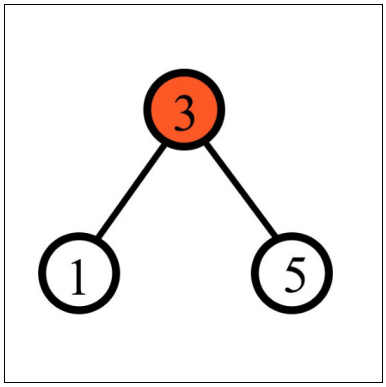
Une fois le modèle en place, la résolution reste la même quel que soit le nombre de personnes. Peut-être est-il même envisageable que, petit à petit, avec des élèves du cycle 3 **et 4**, nous puissions de fait nous rapprocher de $\frac{n(n-1)}{2}$ qui est la formule experte de la situation.

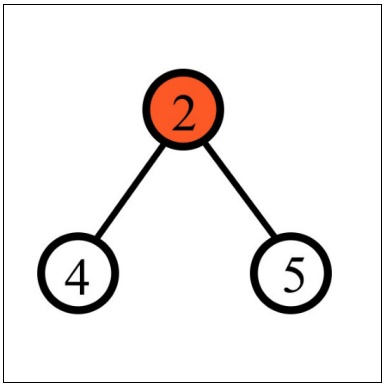
Énoncé 3 : Place les chiffres de 1 à 5, un chiffre par case. Attention deux cases reliées ne doivent pas contenir deux nombres consécutifs (qui se suivent).

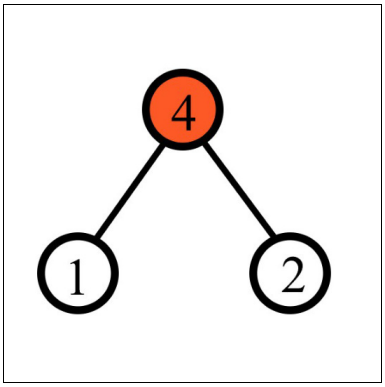


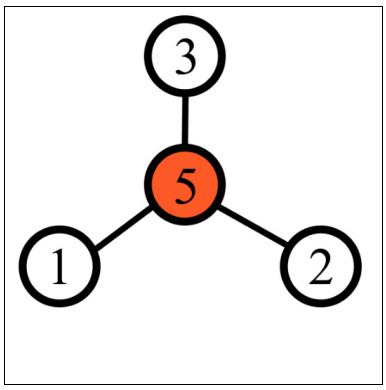
Nous allons commencer par reprendre la notion de « consécutif ». il nous semble important de faire remarquer aux élèves que si nous commençons sans stratégie en faisant du essai/erreur on finira par réussir mais qu'il y a toujours un moyen économique si on voit « au-delà ». C'est-à-dire en exploitant les contraintes. L'indice est consécutif, cela induit ici que 1 et 5 n'ont qu'un seul chiffre proche contrairement à 2, 3 et 4. C'est la difficulté pour les plus jeunes des élèves. Concevoir tout ce que cela implique permet de résoudre très vite. Nous écrirons alors les « liaisons » pour chaque chiffre. 1 peut aller avec 3, 4, 5 ; 2 peut aller avec 4 et 5, etc. Le but est de construire les « familles possibles » et de lier ces groupes entre eux. Nous remarquons alors que 5 est une liaison commune à 1, 2 et 3. Donc le 5 est entre 1, 2 et 3. Le 4 pouvant se lier à 1 et 2, on peut le lier au 2. Le 1 se liant au 5. On peut donc placer le 1 ou le 5 de manière à les lier à 3 carrés sans problèmes. Le 1 pouvant aussi se placer entre 3, 4 et 5.

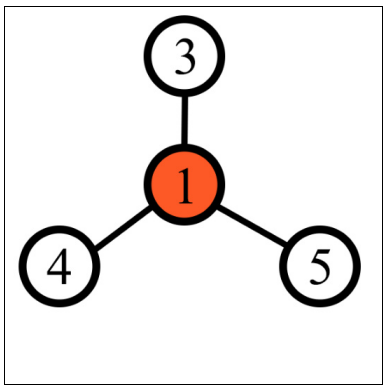
Le 5 et le 1 peuvent donc se placer « centralement », après une démonstration je demanderai de trouver 3 solutions en plus de la mienne (s'ils n'avaient rien jusque-là).



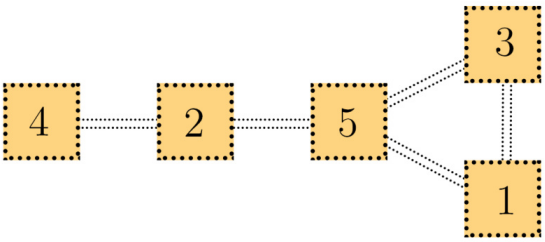


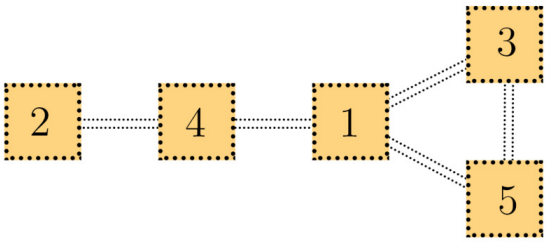






Une fois que la représentation est faite, tout est beaucoup plus simple. Les éléments peuvent être agencés comme les pièces d'un puzzle afin de retrouver la forme initiale. Plusieurs solutions sont alors possibles :



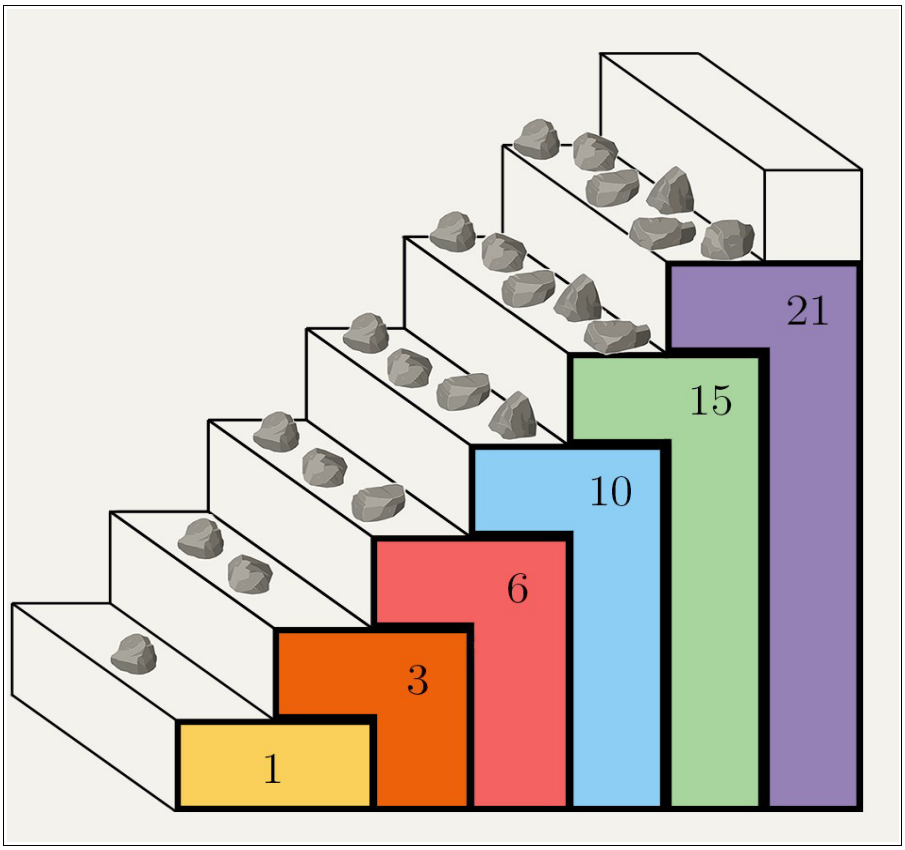


La difficulté que nous observons chez les élèves est qu'ils tentent de percevoir immédiatement de façon globale une situation, car ils ne perçoivent pas les possibles points de départ. Il y a une focalisation sur la recherche de la solution immédiate alors qu'il faudrait se focaliser sur le cheminement. En plaçant les élèves « en activité », c'est ce qu'il risque de se passer dans l'immense majorité des cas sans émergence d'un cheminement logique transposable. Il faut donc être vigilant à mettre en place une démarche de résolution qui est nécessaire pour l'élève et donc enseigner comment il est possible de mettre en place cette démarche. Il faut donc confronter les élèves à de très nombreux problèmes mais également leur enseigner toutes les approches efficaces ou utiles. Par analogie, notre but est ici de donner un trousseau de clefs à tous les élèves pour qu'ils déverrouillent tout seul ensuite les différentes portes.

En résumé, ils veulent comprendre tout de suite de manière globale, alors qu'il leur manque généralement beaucoup d'éléments pour le faire. Il faut alors savoir les ralentir pour matérialiser des étapes qu'ils intégreront par la suite et qui leur permettra appréhender une situation plus globalement. Le fait de représenter ainsi (en éléments plus petits) met en place une stratégie progressive et permet de trouver plusieurs solutions. En fragmentant légèrement la tache, on rend abordable « cognitivement » chaque étape avant de synthétiser.

Énoncé 4 : Le petit Poucet s'amuse dans l'escalier. Il a 20 cailloux dans la poche de son pantalon. Il vide sa poche en posant les cailloux de la manière suivante : 1 caillou sur la première marche, 2 cailloux sur la deuxième marche, 3 cailloux sur la troisième marche, et ainsi de suite… Sur quelle marche pose-t-il le dernier caillou ?

Plusieurs possibilités là encore.



Marche 1 : $1 = 1$
Marche 2 : $1 + 1 = 2$
Marche 3 : $1 + 2 + 3 = 6$
Marche 4 : $1 + 2 + 3 + 4 = 10$
Marche 5 : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$
Marche 5 : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$

5 La résolution de problèmes arithmétiques dans les programmes de 2008 et 2016.

L'écriture de cet ouvrage a débuté il y a plusieurs années avec comme cadre les programmes 2008. Les programmes de 2016 sont actuellement en vigueur et notre travail s'inscrit toujours dans ce cadre. Pour faciliter la compréhension de nos démarches, nous ré-indiquons ici les grandes lignes des programmes 2008 et 2016 concernant le domaine mathématique et la résolution de problèmes en particulier.

Compétences des programmes 2008

La résolution de problèmes est une synthèse de multiples compétences interdisciplinaires. Nous l'avons montré précédemment dans le domaine mathématique via le schéma résumant notre démarche. La lecture de la consigne, la compréhension de celle-ci, le ciblage des informations pertinentes, la modélisation, le calcul mental et posé, la rédaction d'une réponse en sont d'autres de même importance.

Apprendre à lire des énoncés de problèmes en distinguant les éléments informatifs des éléments injonctifs.

—Qu'est-ce qu'une question ?

—Comment y répondre ?

—Que dois-je faire ?

—Qu'est-ce que je sais ?

—Que se passe-t-il ?

—Etc.

Repérer et comprendre des mots inducteurs d'opérations.

— Ajouter, perdre, gagner, dépenser, échanger, en plus, en moins, etc. Le but est la découverte, l'emploi et la maîtrise d'un vocabulaire mathématique adapté selon les situations rencontrées.

Prendre en compte les données d'un problème et leur attribuer du sens.

— Logique et rationalité, ma démarche a-t-elle du sens ?

— Repérer une aberration.

Aller au bout de la recherche et résoudre les problèmes rencontrés.

— Réaliser un schéma cohérent avec les données du problème, effectuer les opérations nécessaires et adaptées, rédiger une réponse elle aussi cohérente. Se tromper, recommencer, chercher ses erreurs et se corriger. Résoudre de plus en plus de problèmes variés.

Cycle 2	
CP	**CE1**
— Connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers naturels inférieurs à 100. - Produire et reconnaître les décompositions additives des nombres inférieurs à 20 (“table d’addition”). - Comparer, ranger, encadrer ces nombres. - Connaître les doubles des nombres inférieurs à 10 et les moitiés des nombres pairs inférieurs à 20. - Connaître la table de multiplication par 2. - Calculer mentalement des sommes et des différences. - Calculer en ligne des sommes, des différences, des opérations à trous. - Connaître et utiliser les techniques opératoires de l’addition et commencer à utiliser celles de la soustraction (sur les nombres inférieurs à 100). - Résoudre des problèmes simples à une opération. — Résoudre des problèmes de vie courante — Organiser les informations d’un énoncé.	— Connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers naturels inférieurs à 1 000. - Écrire ou dire des suites de nombres de 10 en 10, de 100 en 100, etc. - Connaître les doubles et moitiés de nombres d’usage courant. - Mémoriser les tables de multiplication par 2, 3, 4 et 5. - Connaître et utiliser des procédures de calcul mental pour calculer des sommes, des différences et des produits. - Calculer en ligne des suites d’opérations. - Connaître et utiliser les techniques opératoires de l’addition et de la soustraction (sur les nombres inférieurs à 1 000). - Connaître une technique opératoire de la multiplication et l’utiliser pour effectuer des multiplications par un nombre à un chiffre. - Diviser par 2 ou 5 des nombres inférieurs à 100 (quotient exact entier). - Résoudre des problèmes relevant de l’addition, de la soustraction et de la multiplication. - Approcher la division de deux nombres entiers à partir d’un problème de partage ou de groupements. - Connaître la relation entre heure et minute, mètre et centimètre, kilomètre et mètre, kilogramme et gramme, euro et centime d’euro. - Mesurer des segments, des distances. - Résoudre des problèmes de longueur et de masse. — Organiser les informations d’un énoncé.

Cycle 3		
CE2	**CM1**	**CM2**
Compétences du socle commun		
— Lire les consignes de travail, les énoncés de problèmes dont le vocabulaire difficile ou nouveau a été élucidé par le maître. — Dans les diverses activités scolaires, proposer une réponse écrite, explicite et énoncée dans une forme correcte.	— Lire les consignes de travail, les énoncés de problèmes dont le vocabulaire difficile ou nouveau a été élucidé par le maître. — Dans les diverses activités scolaires, proposer une réponse écrite, explicite et énoncée dans une forme correcte.	— Lire les consignes de travail, les énoncés de problèmes dont le vocabulaire difficile ou nouveau a été élucidé par le maître. — Dans les diverses activités scolaires, proposer une réponse écrite, explicite et énoncée dans une forme correcte.
Nombres et calcul		
— Connaître, savoir écrire et nommer les nombres entiers jusqu'au million. - Comparer, ranger, encadrer ces nombres. - Connaître et utiliser des expressions telles que : double, moitié ou demi, triple, quart d'un nombre entier. - Connaître et utiliser certaines relations entre des nombres d'usage courant : entre 5, 10, 25, 50, 100, entre 15, 30 et 60. **Calcul sur des nombres entiers** **Calculer mentalement** - Mémoriser et mobiliser les résultats des tables d'addition et de multiplication. - Calculer mentalement des sommes, des différences, des produits. **Effectuer un calcul posé** - Addition, soustraction et multiplication. - Connaître une technique opératoire de la division et la mettre en œuvre avec un diviseur à un chiffre. **Problèmes** - Résoudre des problèmes relevant des quatre opérations.	**Calcul** **Calculer mentalement** - Consolider les connaissances et capacités en calcul mental sur les nombres entiers. - Multiplier mentalement un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1 000. - Estimer mentalement un ordre de grandeur du résultat. **Effectuer un calcul posé** - Addition et soustraction de deux nombres décimaux. - Multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier. - Division euclidienne de deux entiers. - Division décimale de deux entiers. - Connaître quelques fonctionnalités de la calculatrice utiles pour effectuer une suite de calculs. **Problèmes** - Résoudre des problèmes engageant une démarche à une ou plusieurs étapes.	**Calcul** **Calculer mentalement** - Consolider les connaissances et capacités en calcul mental sur les nombres entiers et décimaux. - Diviser un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1 000. **Effectuer un calcul posé** - Addition, soustraction, multiplication de deux nombres entiers ou décimaux. - Division d'un nombre décimal par un nombre entier. - Utiliser sa calculatrice à bon escient. **Problèmes** - Résoudre des problèmes de plus en plus complexes.

Grandeurs et mesures		
— Connaître les unités de mesure suivantes et les relations qui les lient : . Longueur : le mètre, le kilomètre, le centimètre, le millimètre ; . Masse : le kilogramme, le gramme ; . Capacité : le litre, le centilitre ; . Monnaie : l'euro et le centime ; . Temps : l'heure, la minute, la seconde, le mois, l'année. - Utiliser des instruments pour mesurer des longueurs, des masses, des capacités, puis exprimer cette mesure par un nombre entier ou un encadrement par deux nombres entiers. - Vérifier qu'un angle est droit en utilisant l'équerre ou un gabarit. - Calculer le périmètre d'un polygone. - Lire l'heure sur une montre à aiguilles ou une horloge. **Problèmes** - Résoudre des problèmes dont la résolution implique les grandeurs ci-dessus	— Connaître et utiliser les unités usuelles de mesure des durées, ainsi que les unités du système métrique pour les longueurs, les masses et les contenances, et leurs relations. - Reporter des longueurs à l'aide du compas. - Formules du périmètre du carré et du rectangle. **Aires** - Mesurer ou estimer l'aire d'une surface grâce à un pavage effectif à l'aide d'une surface de référence ou grâce à l'utilisation d'un réseau quadrillé. - Classer et ranger des surfaces selon leur aire. **Angles** - Comparer les angles d'une figure en utilisant un gabarit. - Estimer et vérifier en utilisant l'équerre, qu'un angle est droit, aigu ou obtus. **Problèmes** - Résoudre des problèmes dont la résolution implique éventuellement des conversions.	— Calculer une durée à partir de la donnée de l'instant initial et de l'instant final. - Formule de la longueur d'un cercle. - Formule du volume du pavé droit (initiation à l'utilisation d'unités métriques de volume). **Aires** - Calculer l'aire d'un carré, d'un rectangle, d'un triangle en utilisant la formule appropriée. - Connaître et utiliser les unités d'aire usuelles (cm2, m2 et km2). **Angles** - Reproduire un angle donné en utilisant un gabarit. **Problèmes** - Résoudre des problèmes dont la résolution implique des conversions. - Résoudre des problèmes dont la résolution implique simultanément des unités différentes de mesure.
Organisation et gestion de données		
	— Utiliser un tableau ou la "règle de trois" dans des situations très simples de proportionnalité.	— Résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité et notamment des problèmes relatifs aux pourcentages, aux échelles, aux vitesses moyennes ou aux conversions d'unité, en utilisant des procédures variées (dont la "règle de trois").

La circulaire de juin 2014[1] apporte quelques recommandations concernant les programmes 2008. Sans entrer dans un étalage comparatif, nous pouvons signaler par exemple que le calcul d'une aire se limite au CM 2 à celle d'un carré et d'un rectangle là ou notre projet fait aborder également celle du triangle. Néanmoins *« Les recommandations proposées ci-après constituent des indications générales ou portent sur des domaines précis qui ne se substituent pas aux programmes en cours. »*

Les programmes de 2016 ont modifié l'organisation des cycles. Le document précédent n'étant plus à jour, il fallait réorganiser les progressions globales et à la fois les lier aux nouveaux domaines du socle ainsi qu'aux nouvelles compétences.

Concernant les problèmes arithmétiques au cycle 2, extrait[2]:

« Au cycle 2, ***la résolution de problèmes est au centre de l'activité mathématique*** *des élèves, développant leurs capacités à chercher, raisonner et communiquer. Les problèmes permettent d'aborder de nouvelles notions, de consolider des acquisitions, de provoquer des questionnements. Ils peuvent être issus de situations de vie de classe ou de situations rencontrées dans d'autres enseignements, notamment « Questionner le monde ».* ***Les quatre opérations (addition, soustraction, multiplication, division) sont étudiées à partir de problèmes qui contribuent à leur donner du sens****, en particulier des problèmes portant sur des grandeurs ou sur leurs mesures. En lien avec le travail mené dans « Questionner le monde » les élèves rencontrent des grandeurs qu'ils apprennent à mesurer, ils construisent des connaissances de l'espace essentielles et abordent l'étude de quelques relations géométriques et de quelques objets (solides et figures planes) en étant confrontés à des problèmes dans lesquels ces connaissances sont en jeu. »*

Concernant les problèmes arithmétiques au cycle 3, extrait[3]:

*« **La résolution de problèmes constitue le critère principal de la maîtrise des connaissances dans tous les domaines des mathématiques**, mais elle est également le moyen d'en assurer une appropriation qui en garantit le sens. Si la modélisation algébrique relève avant tout du cycle 4 et du lycée, la* ***résolution de problèmes permet déjà de montrer comment des notions mathématiques peuvent être des outils pertinents pour résoudre certaines situations****. Les situations sur lesquelles portent les problèmes sont, le plus souvent, issues d'autres enseignements, de la vie de classe ou de la vie courante. Les élèves fréquentent également des problèmes issus d'un contexte interne aux mathématiques. La mise en perspective historique de certaines connaissances (numération de position, apparition des nombres décimaux, du système métrique, etc.) contribue à enrichir la culture scientifique des élèves. »*

Le document suivant doit se voir comme une synthèse de tout les éléments constitutifs des programmes de façon à y voir plus clair. Les documents présentés sont des créations de l'auteur (K. GUEGUEN) qui visent à faire le lien entre les domaines du socle, les

1 http://www.education.gouv.fr/pid25535/bulletin_officiel.html?cid_bo=80467
2 http://cache.media.education.gouv.fr/file/MEN_SPE_11/67/3/2015_programmes_cycles234_4_12_ok_508673.pdf
3 http://cache.media.education.gouv.fr/file/MEN_SPE_11/67/3/2015_programmes_cycles234_4_12_ok_508673.pdf

compétences, les objectifs et les progressions de cycle. Le but est de proposer aux collègues un document bilan qui rend plus « visible » les liens entre toutes les composantes « administratives » tout en permettant d'organiser une progression des apprentissages avec un tissage plus simple entre toutes les composantes.

NOMBRES					
Domaines du socle	**Compétences**	**Objectifs**	**CP**	**CE1**	**CE2**
1. LANGAGES POUR PENSER ET COMMUNIQUER 4. LES SYSTEMES NATURELS ET LES SYSTEMES TECHNIQUES 5. LES REPRESENTATIONS DU MONDE ET L'ACTIVITE HUMAINE	**Représenter :** *- Utiliser des nombres pour représenter des quantités ou des grandeurs.* **Calculer :** *- Calculer avec des nombres entiers, mentalement ou à la main, de manière exacte ou approchée, en utilisant des stratégies adaptées aux nombres en jeu.*	**Comprendre et utiliser des nombres entiers pour dénombrer, ordonner, repérer, comparer.**	Dénombrer, constituer et comparer des collections. **→ jusqu'à 99**	Dénombrer, constituer et comparer des collections. **→ jusqu'à 999**	Dénombrer, constituer et comparer des collections. **→ jusqu'à 10 000**
			Utiliser diverses stratégies de dénombrement (décomposition, recomposition additive, utilisation des unités et◊ dizaines en relation ou non avec des groupements.)	Utiliser diverses stratégies de dénombrement (décomposition, recomposition additive ou multiplicative, utilisation d'unités intermédiaires - dizaines, centaines.)	Utiliser diverses stratégies de dénombrement (décomposition, recomposition additive ou multiplicative, utilisation d'unités intermédiaires - dizaines, centaines.)
			Repérer un rang, une position dans une file, sur une piste. Faire le lien entre le rang dans une liste et le nombre d'éléments qui le précèdent.	Repérer un rang, une position dans une file, sur une piste. Faire le lien entre le rang dans une liste et le nombre d'éléments qui le précèdent - relation entre ordinaux et cardinaux.	Repérer un rang, une position dans une file, sur une piste. Faire le lien entre le rang dans une liste et le nombre d'éléments qui le précèdent - relation entre ordinaux et cardinaux.
			Comparer, ranger, encadrer, intercaler des nombres entiers, en utilisant les symboles =, ≠, <, >	Comparer, ranger, encadrer, intercaler des nombres entiers, en utilisant les symboles =, ≠, <, >	Comparer, ranger, encadrer, intercaler des nombres entiers, en utilisant les symboles =, ≠, <, >
		Nommer, lire, écrire, représenter des nombres entiers.	Utiliser diverses représentations des nombres (écriture en chiffres et en lettres, noms à l'oral, graduations sur une demi-droite, constellations sur des dés, doigts de la main ...)	Utiliser diverses représentations des nombres (écriture en chiffres et en lettres, noms à l'oral, graduations sur une demi-droite, constellations sur des dés, doigts de la main ...)	Utiliser diverses représentations des nombres (écriture en chiffres et en lettres, noms à l'oral, graduations sur une demi-droite, constellations sur des dés, doigts de la main ...)
			Passer d'une représentation à une autre, en particulier associer le nom des nombres à leur écriture chiffrée.	Passer d'une représentation à une autre, en particulier associer le nom des nombres à leur écriture chiffrée.	Passer d'une représentation à une autre, en particulier associer le nom des nombres à leur écriture chiffrée.
			Interpréter les noms des nombres à l'aide des unités de numération et des écritures arithmétiques - unités de numération (unités simples, dizaines) et leurs relations (principe décimal de la numération en chiffres) - valeur des chiffres en fonction de leur rang dans l'écriture d'un nombre.	Interpréter les noms des nombres à l'aide des unités de numération et des écritures arithmétiques - unités de numération (unités simples, dizaines, centaines) et leurs relations (principe décimal de la numération en chiffres) - valeur des chiffres en fonction de leur rang dans l'écriture d'un nombre.	Interpréter les noms des nombres à l'aide des unités de numération et des écritures arithmétiques - unités de numération (unités simples, dizaines, centaines, milliers) et leurs relations (principe décimal de la numération en chiffres) - valeur des chiffres en fonction de leur rang dans l'écriture d'un nombre.
			Associer un nombre entier à une position sur une demi-droite graduée, ainsi qu'à la distance de ce point à l'origine.	Associer un nombre entier à une position sur une demi-droite graduée, ainsi qu'à la distance de ce point à l'origine.	Associer un nombre entier à une position sur une demi-droite graduée, ainsi qu'à la distance de ce point à l'origine.
			Associer un nombre ou un encadrement à une grandeur en mesurant celle-ci à l'aide d'une unité.	Associer un nombre ou un encadrement à une grandeur en mesurant celle-ci à l'aide d'une unité.	Associer un nombre ou un encadrement à une grandeur en mesurant celle-ci à l'aide d'une unité.

CALCULS					
Domaines du socle	**Compétences**	**Objectifs**	**CP**	**CE1**	**CE2**
2. METHODES ET OUTILS POUR APPRENDRE 3. FORMATION DE LA PERSONNE ET DU CITOYEN 4. LES SYSTEMES NATURELS ET LES SYSTEMES TECHNIQUES	**Chercher :** *Tester, essayer plusieurs pistes proposées par soi-même, les autres élèves ou le professeur.* **Raisonner :** *Anticiper le résultat d'une manipulation, d'un calcul, ou d'une mesure.* **Calculer :** *Calculer avec des nombres entiers, mentalement ou à la main, de manière exacte ou approchée, en utilisant des stratégies adaptées aux nombres en jeu.* *Contrôler la vraisemblance de ses résultats.*	**Calculer avec des nombres entiers. Mémoriser des faits numériques et des procédures.**	- Tables de l'addition - Décompositions additives 10 et de 100, compléments à la dizaine supérieure, doubles jusqu'à 20	- Tables de l'addition et de la multiplication (de 0 à 5) - Décompositions additives et multiplicatives de 10 et de 100, compléments à la dizaine supérieure, à la centaine supérieure, multiplication par une puissance de 10, doubles et moitiés de nombres d'usage courant	- Tables de l'addition et de la multiplication - Décompositions additives et multiplicatives de 10 et de 100, compléments à la dizaine supérieure, à la centaine supérieure, multiplication par une puissance de 10, doubles et moitiés de nombres d'usage courant
		Élaborer ou choisir des stratégies de calcul à l'oral et à l'écrit.	Élaborer ou choisir des stratégies de calcul à l'oral et à l'écrit.	Élaborer ou choisir des stratégies de calcul à l'oral et à l'écrit.	Élaborer ou choisir des stratégies de calcul à l'oral et à l'écrit.
			Vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant son ordre de grandeur. - Addition, soustraction - Propriétés implicites des opérations : 2+9, c'est pareil que 9+2	Vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant son ordre de grandeur. - Addition, soustraction, multiplication - Propriétés implicites des opérations : 2+9, c'est pareil que 9+2 - propriétés de la numération : « 50+80, c'est 5 dizaines +8 dizaines, c'est 13 dizaines, c'est 130 »	Vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant son ordre de grandeur. - Addition, soustraction, multiplication, division - Propriétés implicites des opérations : idem + 3x5x2 c'est pareil que 3x10 - propriétés de la numération : « 50+80, c'est 5 dizaines +8 dizaines, c'est 13 dizaines, c'est 130 » « 4x60, c'est 4x6 dizaines, c'est 24 dizaines, c'est 240 »
		Calcul mental : calculer mentalement pour obtenir un résultat exact ou évaluer un ordre de grandeur	- calculer mentalement sur les nombres 1, 2 , 5, 10, 20, 50, 100 en lien avec la monnaie - calculer mentalement sur les nombres 15, 30, 45, 60, 90 en lien avec les durées		
		Calcul en ligne	Calculer en utilisant des écritures en lignes additives, soustractives	Calculer en utilisant des écritures en lignes additives, soustractives, multiplicatives. - 5x36=5x2x18=10x18=180 - 5x36=150+30=180	Calculer en utilisant des écritures en lignes additives, soustractives, multiplicatives, mixtes. + utiliser des écritures en ligne du type 21=4x5+1 pour trouver le quotient et le reste de la division de 21 par 4 (ou par 5)
		Calcul posé : L'apprentissage des techniques opératoires posées (addition, soustraction sans retenue) se fait en lien avec la numération et les propriétés des opérations.	Mettre en œuvre un algorithme de calcul posé pour l'addition, la soustraction (sans retenue). - l'apprentissage des techniques opératoires posées (addition, soustraction) se fait en lien avec la numération et les propriétés des opérations.	Mettre en œuvre un algorithme de calcul posé pour l'addition, la soustraction, la multiplication. - l'apprentissage des techniques opératoires posées (addition, soustraction, multiplication) se fait en lien avec la numération et les propriétés des opérations.	Mettre en œuvre un algorithme de calcul posé pour l'addition, la soustraction, la multiplication. - l'apprentissage des techniques opératoires posées (addition, soustraction, multiplication) se fait en lien avec la numération et les propriétés des opérations.

RESOLUTION DE PROBLEMES ET ORGANISATION ET GESTION DE DONNEES					
Domaines du socle	**Compétences**	**Objectifs**	**CP**	**CE1**	**CE2**
1. LANGAGES POUR PENSER ET COMMUNIQUER 2. METHODES ET OUTILS POUR APPRENDRE 3. FORMATION DE LA PERSONNE ET DU CITOYEN 4. LES SYSTEMES NATURELS ET LES SYSTEMES TECHNIQUES 5. LES REPRESENTATIONS DU MONDE ET L'ACTIVITE HUMAINE	**Chercher :** *- S'engager dans une démarche de résolution de problèmes en observant, en posant des questions, en manipulant, en expérimentant, en émettant des hypothèses, si besoin avec l'accompagnement du professeur après un temps de recherche autonome.* *- Tester, essayer plusieurs pistes proposées par soi-même, les autres élèves ou le professeur.* **Modéliser :** *- Réaliser que certains problèmes relèvent de situations additives, d'autres de situations multiplicatives, de partages ou de groupements.* **Représenter :** *- Appréhender différents systèmes de représentations (dessins, schémas, arbres de calcul, etc.).* **Raisonner :** *- Anticiper le résultat d'une manipulation, d'un calcul, ou d'une mesure.* **Calculer :** *- Calculer avec des nombres entiers, mentalement ou à la main, de manière exacte ou approchée, en utilisant des stratégies adaptées aux nombres en jeu.* *- Contrôler la vraisemblance de ses résultats.* **Communiquer :** *- Utiliser l'oral et l'écrit, le langage naturel puis quelques représentations et quelques symboles pour expliciter des démarches, argumenter des raisonnements.*	**Résoudre des problèmes en utilisant des nombres entiers et des calculs**	Résoudre des problèmes issus de situations de la vie quotidienne ou adaptés de jeux portant sur des grandeurs et leur mesure, des déplacements sur une demi-droite graduée…, conduisant à utiliser les quatre opérations. - Sens des opérations. - Problèmes relevant des structures additives (addition/soustraction). Modéliser ces problèmes à l'aide d'écritures mathématiques. - Sens des symboles +, −, ×, :	Résoudre des problèmes issus de situations de la vie quotidienne ou adaptés de jeux portant sur des grandeurs et leur mesure, des déplacements sur une demi-droite graduée…, conduisant à utiliser les quatre opérations. - Sens des opérations. - Problèmes relevant des structures additives (addition/soustraction). - Problèmes relevant des structures multiplicatives, de partages ou de groupements (multiplication/division). - Modéliser ces problèmes à l'aide d'écritures mathématiques. - Sens des symboles +, −, ×, :	Résoudre des problèmes issus de situations de la vie quotidienne ou adaptés de jeux portant sur des grandeurs et leur mesure, des déplacements sur une demi-droite graduée…, conduisant à utiliser les quatre opérations. - Sens des opérations. - Problèmes relevant des structures additives (addition/soustraction). - Problèmes relevant des structures multiplicatives, de partages ou de groupements (multiplication/division). - Modéliser ces problèmes à l'aide d'écritures mathématiques. - Sens des symboles +, −, ×, :
			Il est possible, lors de la résolution de problèmes, d'aller au-delà des repères de progressivité identifies pour chaque niveau.		
		Organisation et gestion de données : ce travail est mené en lien avec Grandeurs et mesures et Questionner le monde.	Exploiter des données numériques pour répondre à des questions.		
			Présenter et organiser des mesures sous forme de tableaux. Modes de représentation de données numériques : tableaux.	Présenter et organiser des mesures sous forme de tableaux. Modes de représentation de données numériques : tableaux, graphiques simples, etc.	

GRANDEURS ET MESURES					
Domaines du socle	**Compétences**	**Objectifs**	**CP**	**CE1**	**CE2**
1. LANGAGES POUR PENSER ET COMMUNIQUER 2. METHODES ET OUTILS POUR APPRENDRE 3. FORMATION DE LA PERSONNE ET DU CITOYEN 4. LES SYSTEMES NATURELS ET LES SYSTEMES TECHNIQUES 5. LES REPRESENTATIONS DU MONDE ET L'ACTIVITE HUMAINE	**Chercher :** *- S'engager dans une démarche de résolution de problèmes en observant, en posant des questions, en manipulant, en expérimentant, en émettant des hypothèses, si besoin avec l'accompagnement du professeur après un temps de recherche autonome.* *- Tester, essayer plusieurs pistes proposées par soi-même, les autres élèves ou le professeur.* **Modéliser :** *- Réaliser que certains problèmes relèvent de situations additives, d'autres de situations multiplicatives, de partages ou de groupements.* **Représenter :** *- Appréhender différents systèmes de représentations (dessins, schémas, arbres de calcul, etc.).* **Raisonner :** *- Anticiper le résultat d'une manipulation, d'un calcul, ou d'une mesure.* **Calculer :** *- Calculer avec des nombres entiers, mentalement ou à la main, de manière exacte ou approchée, en utilisant des stratégies adaptées aux nombres en jeu.* *- Contrôler la vraisemblance de ses résultats.* **Communiquer :** *- Utiliser l'oral et l'écrit, le langage naturel puis quelques représentations et quelques symboles pour expliciter des démarches, argumenter des raisonnements.*	**Comparer, estimer, mesurer des longueurs, des masses, des contenances, des durées.** **Utiliser le lexique, les unités, les instruments de mesures spécifiques à ces grandeurs.**	Comparer des objets selon plusieurs grandeurs et identifier quand il s'agit d'une longueur, d'une masse. - lexique spécifique associé aux longueurs, aux masses.	Comparer des objets selon plusieurs grandeurs et identifier quand il s'agit d'une longueur, d'une masse, d'une contenance ou d'une durée. - lexique spécifique associé aux longueurs, aux masses.	Comparer des objets selon plusieurs grandeurs et identifier quand il s'agit d'une longueur, d'une masse, d'une contenance ou d'une durée. - lexique spécifique associé aux longueurs, aux masses, aux contenances, aux durées.
			Comparer des longueurs, des masses, directement, en introduisant la comparaison à un objet intermédiaire ou par mesurage (étalon, double décimètre) - juxtaposer des objets pour comparer leur longueur	Comparer des longueurs, des masses, directement, en introduisant la comparaison à un objet intermédiaire ou par mesurage (étalon, double décimètre) - juxtaposer des objets pour comparer leur longueur	Comparer des longueurs, des masses et des contenances, directement, en introduisant la comparaison à un objet intermédiaire ou par mesurage (étalon, double décimètre, compas) - juxtaposer des objets pour comparer leur longueur
			Estimer les ordres de grandeurs de quelques longueurs en relation avec les unités métriques. - ordre de grandeur des unités usuelles en les associant à quelques objets familiers.	Estimer les ordres de grandeurs de quelques longueurs, masses en relation avec les unités métriques. Vérifier éventuellement avec un instrument (double décimètre, balance). - ordre de grandeur des unités usuelles en les associant à quelques objets familiers.	
			Mesurer des longueurs avec un instrument adapté, notamment en reportant une unité (étalon). Mesurer des masses avec des instruments adaptés. Exprimer une mesure dans une ou plusieurs unités choisies ou imposées - notion d'unité : grandeur arbitraire prise comme référence pour mesurer les grandeurs de la même espèce - unités de mesures usuelles : Longueur : cm Masse : g, kg	Mesurer des longueurs avec un instrument adapté, notamment en reportant une unité. Mesurer des masses et des contenances avec des instruments adaptés. Encadrer une grandeur par 2 nombres entiers d'unités. Exprimer une mesure dans une ou plusieurs unités choisies ou imposées -notion d'unité : grandeur arbitraire prise comme référence pour mesurer les grandeurs de la même espèce -unités de mesures usuelles : Longueur : m, cm, km ; Masse : g, kg -relation entre les unités de longueur, entre les unités de masses.	Mesurer des longueurs avec un instrument adapté, notamment en reportant une unité. Mesurer des masses et des contenances avec des instruments adaptés. Encadrer une grandeur par 2 nombres entiers d'unités. Exprimer une mesure dans une ou plusieurs unités choisies ou imposées - notion d'unité : grandeur arbitraire prise comme référence pour mesurer les grandeurs de la même espèce - unités de mesures usuelles : Longueur : m, dm, cm, mm, km ; Masse : g, kg, tonne ; Contenance : L, dl, cl -relation entre les unités de longueur, entre les unités de masses, entre les unités de contenances.

GRANDEURS ET MESURES					
Domaines du socle	**Compétences**	**Objectifs**	**CP**	**CE1**	**CE2**
1. LANGAGES POUR PENSER ET COMMUNIQUER 2. METHODES ET OUTILS POUR APPRENDRE 3. FORMATION DE LA PERSONNE ET DU CITOYEN 4. LES SYSTEMES NATURELS ET LES SYSTEMES TECHNIQUES 5. LES REPRESENTATIONS DU MONDE ET L'ACTIVITE HUMAINE	**Chercher :** *- S'engager dans une démarche de résolution de problèmes en observant, en posant des questions, en manipulant, en expérimentant, en émettant des hypothèses, si besoin avec l'accompagnement du professeur après un temps de recherche autonome.* *- Tester, essayer plusieurs pistes proposées par soi-même, les autres élèves ou le professeur.* **Modéliser :** *- Réaliser que certains problèmes relèvent de situations additives, d'autres de situations multiplicatives, de partages ou de groupements.* **Représenter :** *- Appréhender différents systèmes de représentations (dessins, schémas, arbres de calcul, etc.).* **Raisonner :** *- Anticiper le résultat d'une manipulation, d'un calcul, ou d'une mesure.* **Calculer :** *- Calculer avec des nombres entiers, mentalement ou à la main, de manière exacte ou approchée, en utilisant des stratégies adaptées aux nombres en jeu.* *- Contrôler la vraisemblance de ses résultats.* **Communiquer :** *- Utiliser l'oral et l'écrit, le langage naturel puis quelques représentations et quelques symboles pour expliciter des démarches, argumenter des raisonnements.*	**Comparer, estimer, mesurer des longueurs, des masses, des contenances, des durées.** **Utiliser le lexique, les unités, les instruments de mesures spécifiques à ces grandeurs.**	Comparer, estimer, mesurer des durées - unités usuelles de durées : jour, semaine, mois, année. - relation entre ces unités. Utiliser un sablier, des horloges et des montres à aiguilles et à affichage digital.	Comparer, estimer, mesurer des durées - unités usuelles de durées : j, semaine, h, min, mois, année. - relation entre ces unités. Utiliser un sablier, des horloges et des montres à aiguilles et à affichage digital, un chronomètre.	Comparer, estimer, mesurer des durées - unités usuelles de durées : j, semaine, h, min, sec, mois, année, siècle, millénaire. - relation entre ces unités Utiliser un sablier, des horloges et des montres à aiguilles et à affichage digital, un chronomètre.
			Dans des cas simples, représenter une grandeur par une longueur, notamment sur une demi-droite graduée. - Des objets de grandeurs égales sont représentés par des segments de longueurs égales. - Une grandeur double est représentée par une longueur double. - La règle graduée en cm comme cas particulier d'une demi-droite graduée.		
		Résoudre des problèmes impliquant des longueurs, des masses, des contenances, des durées, des prix	Résoudre des problèmes, notamment de mesurage et de comparaison, en utilisant les opérations sur les grandeurs ou sur les nombres. - Opérations sur les grandeurs (addition, soustraction). - Deux opérations sur les mesures des grandeurs. - Principes d'utilisation de la monnaie (en euros). - Lexique lié aux pratiques économiques.	Résoudre des problèmes, notamment de mesurage et de comparaison, en utilisant les opérations sur les grandeurs ou sur les nombres. - Opérations sur les grandeurs (addition, soustraction, multiplication par un entier, division : recherche du nombre de parts et de la taille d'une part). - Quatre opérations sur les mesures des grandeurs. - Principes d'utilisation de la monnaie (en euros et centimes d'euros). Lexique lié aux pratiques économiques.	
			Résoudre des problèmes impliquant des conversions simples d'une unité usuelle à une autre. Convertir avant de calculer si nécessaire Relations entre les unités usuelles.	Résoudre des problèmes impliquant des conversions simples d'une unité usuelle à une autre. Convertir avant de calculer si nécessaire Relations entre les unités usuelles.	

ESPACE ET GEOMETRIE					
Domaines du socle	**Compétences**	**Objectifs**	**CP**	**CE1**	**CE2**
1. LANGAGES POUR PENSER ET COMMUNIQUER 2. METHODES ET OUTILS POUR APPRENDRE 3. FORMATION DE LA PERSONNE ET DU CITOYEN 4. LES SYSTEMES NATURELS ET LES SYSTEMES TECHNIQUES 5. LES REPRESENTATIONS DU MONDE ET L'ACTIVITE HUMAINE	**Modéliser** *Reconnaître des formes dans des objets réels et les reproduire géométriquement.* **Représenter** *Utiliser diverses représentations de solides et de situations spatiales.* **Raisonner** *Raisonner sur des figures pour les reproduire avec des instruments.* **Communiquer** *Utiliser l'oral et l'écrit, le langage naturel puis quelques représentations et quelques symboles pour expliciter des démarches, argumenter des raisonnements.*	**Se repérer et se déplacer en utilisant des repères**	Se repérer dans son environnement proche. Situer des objets ou des personnes les uns par rapport aux autres ou par rapport à d'autres repères. - vocabulaire permettant de définir des positions : gauche, droite, au-dessus, en-dessous, sur, sous, devant, derrière, près, loin - vocabulaire permettant de définir des déplacements (avancer, reculer, tourner à droite / à gauche, monter, descendre)	Se repérer dans son environnement proche. Situer des objets ou des personnes les uns par rapport aux autres ou par rapport à d'autres repères. - vocabulaire permettant de définir des positions : + premier plan, second plan - vocabulaire permettant de définir des déplacements (avancer, reculer, tourner à droite / à gauche, monter, descendre)	Se repérer dans son environnement proche. Situer des objets ou des personnes les uns par rapport aux autres ou par rapport à d'autres repères. - vocabulaire permettant de définir des positions : gauche, droite, premier plan, second plan, nord, sud, est, ouest - vocabulaire permettant de définir des déplacements (avancer, reculer, tourner à droite / à gauche, monter, descendre)
			Produire des représentations des espaces familiers : les espaces scolaires extérieurs proches - des photos	Produire des représentations des espaces familiers : les espaces scolaires extérieurs proches, le quartier - des photos, des maquettes	Produire des représentations des espaces familiers (le village) et moins familiers (vécus lors de sorties) - de la photo, à la maquette et au plan
			S'orienter et se déplacer en utilisant des repères. Coder et décoder pour prévoir, représenter et réaliser des déplacements dans des espaces familiers, sur un quadrillage.	S'orienter et se déplacer en utilisant des repères. Coder et décoder pour prévoir, représenter et réaliser des déplacements dans des espaces familiers, sur quadrillage, sur écran.	
		Reconnaître, nommer, décrire, reproduire quelques solides	Reconnaître et trier les solides usuels, parmi des solides variés. Décrire et comparer des solides en utilisant le vocabulaire approprié. PAVÉ, CUBE	Reconnaître et trier les solides usuels, parmi des solides variés. Décrire et comparer des solides en utilisant le vocabulaire approprié. + CYLINDRE, TÉTRAÈDRE	Reconnaître et trier les solides usuels, parmi des solides variés. Décrire et comparer des solides en utilisant le vocabulaire approprié. + PAVÉ DROIT, PRISME TRIANGULAIRE
			Reproduire des solides. Fabriquer un cube à partir d'un patron fourni. - vocabulaire approprié pour nommer des solides, décrire des polyèdres (face, sommet, arête) - les faces d'un cube sont des carrés		Reproduire des solides. - vocabulaire approprié pour nommer des solides, décrire des polyèdres (face, sommet, arête) - les faces d'un pavé droit sont des rectangles

ESPACE ET GEOMETRIE					
Domaines du socle	**Compétences**	**Objectifs**	**CP**	**CE1**	**CE2**
1. LANGAGES POUR PENSER ET COMMUNIQUER 2. METHODES ET OUTILS POUR APPRENDRE 3. FORMATION DE LA PERSONNE ET DU CITOYEN 4. LES SYSTEMES NATURELS ET LES SYSTEMES TECHNIQUES 5. LES REPRESENTATIONS DU MONDE ET L'ACTIVITE HUMAINE	**Modéliser** *Reconnaître des formes dans des objets réels et les reproduire géométriquement.* **Représenter** *Utiliser diverses représentations de solides et de situations spatiales.* **Raisonner** *Raisonner sur des figures pour les reproduire avec des instruments.* **Communiquer** *Utiliser l'oral et l'écrit, le langage naturel puis quelques représentations et quelques symboles pour expliciter des démarches, argumenter des raisonnements.*	**Reconnaître, nommer, décrire, reproduire, construire quelques figures géométriques.**	Décrire, reproduire des figures ou des assemblages de figures planes sur papier quadrillé ou uni. TRIANGLE, RECTANGLE, CARRÉ Utiliser la règle comme instrument de tracé.	Décrire, reproduire des figures ou des assemblages de figures planes sur papier quadrillé ou uni. POLYGONES, TRIANGLES, QUADRILATÈRES Utiliser la règle et l'équerre comme instrument de tracé.	Décrire, reproduire des figures ou des assemblages de figures planes sur papier quadrillé ou uni. RECTANGLE, CARRÉ, CERCLE, TRIANGLES Utiliser la règle, le compas, l'équerre .
			Reconnaître, nommer les figures usuelles : triangle, rectangle, carré. Reconnaître et décrire à partir des côtés et des angles droits, un carré, un rectangle.	Reconnaître, nommer les figures usuelles : les polygones, triangles et quadrilatères. Reconnaître et décrire à partir des côtés et des angles droits, un carré, un rectangle, un triangle rectangle. Les construire sur un support uni connaissant la longueur des côtés.	Reconnaître, nommer les figures usuelles : rectangle, carré, triangles, cercle. Reconnaître et décrire à partir des côtés et des angles droits, un carré, un rectangle, un triangle rectangle. Les construire sur un support uni connaissant la longueur des côtés.
				Construire un cercle.	Construire un cercle connaissant son centre et un point, ou son centre et son rayon.
			Connaître le vocabulaire approprié pour décrire les figures planes (carré, rectangle, triangle, côté, sommet) - propriétés des angles et égalité de longueur des côtés pour les carrés et rectangles.	Connaître le vocabulaire approprié pour décrire les figures planes (carré, rectangle, triangle, triangle rectangle, polygone, côté, sommet, angle droit, segment, milieu, droite) - propriétés des angles et égalité de longueur des côtés pour les carrés et rectangles.	Connaître le vocabulaire approprié pour décrire les figures planes (carré, rectangle, triangle, triangle rectangle, polygone, côté, sommet, angle droit, cercle, disque, rayon, centre, segment, milieu, droite) - propriétés des angles et égalité de longueur des côtés pour les carrés et rectangles.
		Reconnaître et utiliser les notions d'alignement, d'angle droit, d'égalité de longueurs, de milieu, de symétrie	Utiliser la règle non graduée pour repérer et produire des alignements. Repérer et produire des angles droits à l'aide d'un gabarit.	Utiliser la règle non graduée pour repérer et produire des alignements. Repérer et produire des angles droits à l'aide d'un gabarit, d'une équerre.	Repérer et produire des angles droits à l'aide d'un gabarit, d'une équerre.
			Reconnaître si une figure présente un axe de symétrie (à trouver).	Reconnaître si une figure présente un axe de symétrie (à trouver). Compléter une figure pour qu'elle soit symétrique par rapport à un axe.	

NOMBRES					
Domaines du socle	**Compétences**	**Objectifs**	**CM 1**	**CM 2**	**6e**
1.LANGAGES POUR PENSER ET COMMUNIQUER - 2. METHODES ET OUTILS POUR APPRENDRE 3. FORMATION DE LA PERSONNE ET DU CITOYEN 4. LES SYSTEMES NATURELS ET LES SYSTEMES TECHNIQUES 5. LES REPRESENTATIONS DU MONDE ET L'ACTIVITE HUMAINE	**Représenter** (1, 5) *Produire et utiliser diverses représentations des fractions simples et des nombres décimaux.* **Chercher** (2, 4) *S'engager dans une démarche, observer, questionner, manipuler, expérimenter, émettre des hypothèses, en mobilisant des outils ou des procédures mathématiques déjà rencontrées, en élaborant un raisonnement adapté à une situation nouvelle.* **Communiquer** (1, 3) *Utiliser progressivement un vocabulaire adéquat et/ou des notations adaptées pour décrire une situation, exposer une argumentation.*	**Utiliser et représenter les grands nombres entiers.**	Composer, décomposer les grands nombres entiers, en utilisant des regroupements par milliers. - Unités de numération (unités simples, dizaines, centaines, milliers, millions, milliards) et leurs relations. - Comprendre et appliquer les règles de la numération aux grands nombres (jusqu'à 12 chiffres).	Composer, décomposer les grands nombres entiers, en utilisant des regroupements par milliers. - Unités de numération (unités simples, dizaines, centaines, milliers, millions, milliards) et leurs relations. - Comprendre et appliquer les règles de la numération aux grands nombres (jusqu'à 12 chiffres).	Composer, décomposer les grands nombres entiers, en utilisant des regroupements par milliers. - Unités de numération (unités simples, dizaines, centaines, milliers, millions, milliards) et leurs relations. - Comprendre et appliquer les règles de la numération aux grands nombres (jusqu'à 12 chiffres).
			Comparer, ranger, encadrer des grands nombres entiers, les repérer et les placer sur une demi-droite graduée adaptée.		
		Utiliser et représenter des fractions simples.	Utiliser et représenter les fractions simples et découvrir les fractions décimales.	Utiliser et représenter diverses désignations des fractions et représenter les fractions comme quotient de deux nombres entiers.	
			Repérer et placer des fractions sur une demi-droite graduée adaptée.		
			Fraction comme partage de grandeurs ou de mesure de grandeurs dans des cas simples. Fraction vue comme opérateur.		
			Encadrer une fraction par deux nombres entiers consécutifs. Établir des égalités entre des fractions simples.		
			Étude de fractions simples.	Étude de fractions décimales et fraction comme quotient de deux nombres entiers.	
		Utiliser et représenter les nombres décimaux	Règles et fonctionnement des systèmes de numération dans le champ des nombres décimaux, relations entre unités de numération (point de vue décimal), valeurs des chiffres en fonction de leur rang dans l'écriture à virgule d'un nombre décimal (point de vue positionnel). (chiffre des dixièmes ≠ nombre de dixièmes)		
			Utiliser et représenter les nombres décimaux jusqu'au **centième**	Utiliser et représenter les nombres décimaux jusqu'au **millième**	Utiliser et représenter les nombres décimaux jusqu'au **dix-millième**
			Repérer et placer des décimaux sur une demi-droite graduée adaptée.		
			Comparer, ranger, encadrer, intercaler des nombres décimaux. - Ordre sur les nombres décimaux.		

CALCULS					
Domaines du socle	**Compétences**	**Objectifs**	**CM 1**	**CM 2**	**6e**
1.LANGAGES POUR PENSER ET COMMUNIQUER - 2. METHODES ET OUTILS POUR APPRENDRE 4. LES SYSTEMES NATURELS ET LES SYSTEMES TECHNIQUES 5. LES REPRESENTATIONS DU MONDE ET L'ACTIVITE HUMAINE	**Chercher** (2, 4) *S'engager dans une démarche, observer, questionner, manipuler, expérimenter, émettre des hypothèses, en mobilisant des outils ou des procédures mathématiques déjà rencontrées, en élaborant un raisonnement adapté à une situation nouvelle.* **Représenter** (1, 5) *Produire et utiliser diverses représentations des fractions simples et des nombres décimaux.* **Calculer** (4) *Calculer avec des nombres décimaux, de manière exacte ou approchée, en utilisant des stratégies ou des techniques appropriées (mentalement, en ligne, ou en posant les opérations).* *Contrôler la vraisemblance de ses résultats.* *Utiliser une calculatrice pour trouver ou vérifier un résultat.*	**Calculer avec des nombres entiers et décimaux**	Addition et soustraction pour les nombres décimaux. Multiples des nombres d'usage courant. Division euclidienne. Division de deux nombres entiers avec quotient décimal . Propriétés des opérations : • 2+9 = 11 car 11-9=2 et 11-2= 9 • 3×5×2 = 3×10 (lien avec division) • 5×12 = 5×10 + 5×2.	Multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier Division d'un nombre décimal par un nombre entier Multiples et diviseurs des nombres d'usage courant. Critères de divisibilité (2, 3, 4, 5, 9, 10). Multiplication de 2 nombres décimaux Division d'un nombre décimal par un nombre entier Multiples et diviseurs des nombres d'usage courant. Critères de divisibilité (2, 3, 4, 5, 9, 10).	
			Calcul mental : calculer mentalement pour obtenir un résultat exact ou évaluer un ordre de grandeur.		
			Calcul en ligne : utiliser des parenthèses dans des situations très simples.		
			Calcul posé : mettre en œuvre un algorithme de calcul posé pour l'addition, la soustraction, la multiplication, la division		
			Technique de la division sans soustraction intermédiaire.	Technique finale de la division par un nombre à plusieurs chiffres sans soustraction intermédiaire ni répertoire multiplicatif.	
				Calcul instrumenté : utiliser une calculatrice pour vérifier un résultat. Fonctions de base d'une calculatrice.	**Calcul instrumenté** : utiliser une calculatrice pour trouver ou vérifier un résultat. Fonctions de base d'une calculatrice.

RESOLUTION DE PROBLEMES ET ORGANISATION ET GESTION DE DONNEES					
Domaines du socle	**Compétences**	**Objectifs**	**CM 1**	**CM 2**	**6e**
1.LANGAGES POUR PENSER ET COMMUNIQUER - 2. METHODES ET OUTILS POUR APPRENDRE 3. FORMATION DE LA PERSONNE ET DU CITOYEN 4. LES SYSTEMES NATURELS ET LES SYSTEMES TECHNIQUES 5. LES REPRESENTATIONS DU MONDE ET L'ACTIVITE HUMAINE	**Chercher (2,4)** *Prélever et organiser les informations nécessaires à la résolution de problèmes à partir de supports variés : textes, tableaux, diagrammes, graphiques, dessins, schémas, etc.* **Modéliser (1,2,4)** *Utiliser les mathématiques pour résoudre quelques problèmes issus de situations de la vie quotidienne.* *Reconnaître et distinguer des problèmes relevant de situations additives, multiplicatives, de proportionnalité.* **Représenter (1,5)** *Utiliser des outils pour représenter un problème : dessins, schémas, diagrammes, graphiques, écritures avec parenthésages…* **Raisonner (2,3,4)** *Résoudre des problèmes nécessitant l'organisation de données multiples ou la construction d'une démarche qui combine des étapes de raisonnement.* **Calculer (4)** *Calculer avec des nombres décimaux, de manière exacte ou approchée, en utilisant des stratégies ou des techniques appropriées (mentalement, en ligne, ou en posant les opérations).* *Contrôler la vraisemblance de ses résultats.* **Communiquer (1,3)** *Utiliser progressivement un vocabulaire adéquat et/ou des notations adaptées pour décrire une situation, exposer une argumentation.* *Expliquer sa démarche ou son raisonnement, comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange.*	**Résoudre des problèmes en utilisant des fractions simples, les nombres décimaux et le calcul**	**Résoudre des problèmes mettant en jeu les quatre opérations.** Problèmes relevant des structures additives et des structures multiplicatives. (Problèmes simples et complexes) - Utilisation de schémas logiques. - Problèmes utilisant plusieurs unités (masse, longueur, vitesse, surface...)		
		Organisation et gestion de données : **Prélever des données numériques a partir de supports varies**	**Exploiter et communiquer des résultats de mesures.** -Représentations usuelles : tableaux (en deux ou plusieurs colonnes, a double entrée)		
				Exploiter et communiquer des résultats de mesures. -Représentations usuelles : diagrammes en bâtons, circulaires ou semi circulaires	
					Exploiter et communiquer des résultats de mesures. -Représentations usuelles :graphiques cartésiens.
		Proportionnalité **• Reconnaître et résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité en utilisant une procédure adaptée.** **• Reconnaître et distinguer des problèmes relevant de situations additives, multiplicatives, de proportionnalité.**	**Situations permettant une rencontre avec des échelles, des vitesses constantes, des taux de pourcentage, en lien avec l'étude des fractions décimales.** Oraliser et Rédiger un raisonnement logique avec des phrases afin d'expliciter et d'établir la relation de proportionnalité : Compréhension des liens entre les domaines puis abstraction. Mobiliser les propriétés de linéarité (additives et multiplicative), de proportionnalité, de passage à l'unité. Utiliser des exemples de tableaux de proportionnalité. *Deux grandeurs liées sont dites proportionnelles si la multiplication d'une valeur par un nombre dans une des deux grandeurs entraîne une multiplication de la valeur liée par le même nombre dans l'autre.* **Règle de trois : oralisation, rédaction, abstraction.** *Le recours aux propriétés de linéarité (additive et multiplicative) est privilégié dans des problèmes mettant en jeu des nombres entiers. Ces propriétés doivent être explicitées ; elles peuvent être institutionnalisées de façon non formelle à l'aide d'exemples (« si j'ai deux fois, trois fois… plus d'invités, il me faudra deux fois, trois fois… plus d'ingrédients » ; « si 6 stylos coûtent 10 euros et 3 stylos coûtent 5 Euros, alors 9 stylos coûtent 15 euros »).* *Les procédures du type passage par l'unité ou calcul du coefficient de proportionnalité sont mobilisées progressivement sur des problèmes le nécessitant et en fonction des nombres (entiers ou décimaux) choisis dans l'énoncé ou intervenant dans les calculs.*		

GRANDEURS ET MESURES					
Domaines du socle	**Compétences**	**Objectifs**	**CM 1**	**CM 2**	**6e**
1.LANGAGES POUR PENSER ET COMMUNIQUER - 2. METHODES ET OUTILS POUR APPRENDRE 3. FORMATION DE LA PERSONNE ET DU CITOYEN 4. LES SYSTEMES NATURELS ET LES SYSTEMES TECHNIQUES	**Chercher (2,4)** *S'engager dans une démarche, observer, questionner, manipuler, expérimenter, émettre des hypothèses, en mobilisant des outils ou des procédures mathématiques déjà rencontrées, en élaborant un raisonnement adapté à une situation nouvelle.* **Modéliser (1,2,4)** *Reconnaître et distinguer des problèmes relevant de situations additives, multiplicatives, de proportionnalité.* **Calculer (4)** *Contrôler la vraisemblance de ses résultats.* **Communiquer (1,3)** *Utiliser progressivement un vocabulaire adéquat et/ou des notations adaptées pour décrire une situation, exposer une argumentation.*	**Comparer, estimer, mesurer des grandeurs géométriques avec des nombres entiers et des nombres décimaux : longueur (périmètre), aire, volume, angle** **Utiliser le lexique, les unités, les instruments de mesures spécifiques de ces grandeurs.**	Découvrir la notion de périmètre Comparer des périmètres avec ou sans recours à la mesure.	Mesurer des périmètres en reportant des unités et des fractions d'unités, ou en utilisant une formule. Utiliser les formules du périmètre d'un carré, d'un rectangle.	Consolider la notion de périmètre (Formule de la longueur d'un cercle)
			Unités relatives aux longueurs : relations entre les unités de longueur et les unités de numération (grands nombres, nombres décimaux).		
			Mesurer et comparer des aires (calculer l'aire d'un carré, d'un rectangle.)	Mesurer et comparer des aires (calculer l'aire d'un triangle rectangle, d'un triangle quelconque dont une hauteur est connue, d'un disque)	
			Découvrir la notion d'aire. (Vue en résolution de problèmes CE2) Comparer, classer et ranger des surfaces selon leurs aires sans avoir recours à la mesure. Estimer la mesure d'une aire par différentes procédures. Différencier aire et périmètre d'une surface.	Déterminer la mesure de l'aire d'une surface à partir d'un pavage simple ou en utilisant une formule. -construire et utiliser les formules pour calculer l'aire d'un carré, d'un rectangle (Résolution de problèmes dès le CE2) Découvrir et utiliser les unités d'aires.	
			Unités usuelles d'aire : multiples et sous-multiples du m² et leurs relations, are et hectare		
			Utiliser les unités **de contenances** Estimer la mesure d'un volume par différentes procédures.	Relier les unités de volume et de contenance. Notion de cube (pavage3D) Déterminer le volume d'un pavé droit en se rapportant à un dénombrement d'unités ou en utilisant une formule. Formule du volume d'un cube, d'un pavé droit.	
			Unités usuelles de contenance (multiples et sous multiples du litre). Unités usuelles de volume (cm3, dm3, m3), relations entre les unités.		
			Identifier des angles dans une figure géométrique. Estimer et vérifier des angles à l'aide de l'équerre Comparer des angles	Comparer les angles d'une figure (aigu, obtus, droit) Reproduire un angle en utilisant un gabarit. Estimer la mesure d'un angle. Estimer et vérifier qu'un angle est droit, aigu ou obtus. Mesurer un angle Utiliser un instrument de mesure ***(le rapporteur)*** et une unité de mesure (le degré) pour : - déterminer la mesure en degré d'un angle, - construire un angle de mesure donnée en degrés.	
			Lexique associé aux angles : angle droit, aigu, obtus.		
			Unités de mesures usuelles de durée : jour, semaine, heure, minute, seconde, dixième de seconde, mois, année, siècle, millénaire		

RESOUDRE DES PROBLEMES IMPLIQUANT DES GRANDEURS					
Domaines du socle	**Compétences**	**Objectifs**	**CM 1**	**CM 2**	**6e**
1.LANGAGES POUR PENSER ET COMMUNIQUER - 2. METHODES ET OUTILS POUR APPRENDRE 3. FORMATION DE LA PERSONNE ET DU CITOYEN 4. LES SYSTEMES NATURELS ET LES SYSTEMES TECHNIQUES 5. LES REPRESENTATIONS DU MONDE ET L'ACTIVITE HUMAINE	**Chercher (2,4)** *Prélever et organiser les informations nécessaires à la résolution de problèmes à partir de supports variés : textes, tableaux, diagrammes, graphiques, dessins, schémas, etc.* **Modéliser (1,2,4)** *Utiliser les mathématiques pour résoudre quelques problèmes issus de situations de la vie quotidienne.* *Reconnaître et distinguer des problèmes relevant de situations additives, multiplicatives, de proportionnalité.* **Représenter (1,5)** *Utiliser des outils pour représenter un problème : dessins, schémas, diagrammes, graphiques, écritures avec parenthésages…* *Produire et utiliser diverses représentations des fractions simples et des nombres décimaux.* **Raisonner (2,3,4)** *Résoudre des problèmes nécessitant l'organisation de données multiples ou la construction d'une démarche qui combine des étapes de raisonnement.* **Calculer (4)** *Calculer avec des nombres décimaux, de manière exacte ou approchée, en utilisant des stratégies ou des techniques appropriées (mentalement, en ligne, ou en posant les opérations).* *Contrôler la vraisemblance de ses résultats.* **Communiquer (1,3)** *Utiliser progressivement un vocabulaire adéquat et/ou des notations adaptées pour décrire une situation, exposer une argumentation.* *Expliquer sa démarche ou son raisonnement, comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange.*	**Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs (géométriques, physiques, économiques) en utilisant des nombres entiers et des nombres décimaux**	Résoudre des problèmes de comparaison avec et sans recours a la mesure. Résoudre des problèmes dont la résolution mobilise simultanément des unités différentes de mesure et/ou des conversions.		
			Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs en utilisant des nombres entiers jusqu'à 999 999 999 et des nombres décimaux jusqu'au centième	Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs en utilisant des nombres entiers jusqu'à 12 chiffres et des nombres décimaux jusqu'au millième	Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs en utilisant des nombres entiers jusqu'à 12 chiffres et des nombres décimaux jusqu'au dix-millième
			Résoudre des problèmes dont la résolution mobilise simultanément des unités différentes de mesure et/ou des conversions Calculer des périmètres, des aires en mobilisant ou non, selon les cas, des formules.		
			Calculer des périmètres, des aires, en mobilisant ou non, selon les cas, des formules. Formules donnant : • le périmètre d'un carré, d'un rectangle, • l'aire d'un carré, d'un rectangle	Calculer des périmètres, des aires ou des volumes, en mobilisant ou non, selon les cas, des formules. Formules donnant • le périmètre d'un carré, d'un rectangle, • l'aire d'un carré, d'un rectangle, d'un triangle • le volume d'un cube, d'un pavé droit.	Calculer des périmètres, des aires ou des volumes, en mobilisant ou non, selon les cas, des formules. Formules donnant • le périmètre d'un carré, d'un rectangle, • la longueur d'un cercle, • l'aire d'un carré, d'un rectangle, d'un triangle, d'un disque • le volume d'un cube, d'un pavé droit.
			Calculer la durée écoulée entre deux instants donnés.	Déterminer un instant à partir de la connaissance d'un instant et d'une durée.	
			Identifier une situation de proportionnalité entre deux grandeurs.	Identifier une situation de proportionnalité entre deux grandeurs. Graphiques représentant des variations entre deux grandeurs. *Comparer distance parcourue et temps écoulé, quantité d'essence consommée et distance parcourue, quantité de liquide écoulée et temps écoulé, etc.*	
			PROPORTIONNALITE Dans le cadre des grandeurs, la proportionnalité sera mise en évidence et convoquée pour résoudre des problèmes dans différents contextes.		
				À partir du CM2, des situations impliquant des échelles ou des vitesses constantes peuvent être rencontrées. Le sens de l'expression « …% de » apparait en milieu de cycle. Il s'agit de savoir l'utiliser dans des cas simples (50 %, 25 %, 75 %, 10 %) où aucune technique n'est nécessaire, en lien avec les fractions d'une quantité.	

ESPACE ET GEOMETRIE					
Domaines du socle	**Compétences**	**Objectifs**	**CM 1**	**CM 2**	**6e**
1.LANGAGES POUR PENSER ET COMMUNIQUER - 2. METHODES ET OUTILS POUR APPRENDRE 3. FORMATION DE LA PERSONNE ET DU CITOYEN 4. LES SYSTEMES NATURELS ET LES SYSTEMES TECHNIQUES 5. LES REPRESENTATIONS DU MONDE ET L'ACTIVITE HUMAINE	**Chercher (2,4)** *S'engager dans une démarche, observer, questionner, manipuler, expérimenter, émettre des hypothèses, en mobilisant des outils ou des procédures mathématiques déjà rencontrées, en élaborant un raisonnement adapté à une situation nouvelle.* **Modéliser (1,2,4)** *Reconnaître des situations réelles pouvant être modélisées par des relations géométriques (alignement, parallélisme, perpendicularité, symétrie).* *Utiliser des propriétés géométriques pour reconnaître des objets.* **Représenter (1,5)** *Analyser une figure plane sous différents aspects (surface, contour de celle-ci, lignes et points).* *Reconnaître et utiliser des premiers éléments de codages d'une figure plane ou d'un solide.* *Utiliser et produire des représentations de solides et de situations spatiales. .* **Raisonner (2,3,4)** *En géométrie, passer progressivement de la perception au contrôle par les instruments pour amorcer des raisonnements s'appuyant uniquement sur des propriétés des figures et sur des relations entre objets.* **Communiquer (1,3)** *Utiliser progressivement un vocabulaire adéquat et/ou des notations adaptées pour décrire une situation, exposer une argumentation*	**(Se) repérer et (se) déplacer dans l'espace en utilisant ou en élaborant des représentations**	Se) repérer et (se) déplacer à partir de repérage de déplacement d'objets (Accomplir, décrire, coder des déplacements dans des espaces familiers)		Se) repérer et (se) déplacer dans l'espace en utilisant ou en élaborant des représentations (consolidation) Programmer les déplacements d'un robot ou ceux d'un personnage sur un écran.
			Travailler : - dans des espaces de travail de tailles différentes (la feuille de papier, la cour de recréation, le quartier, la ville, etc.) ; - a partir de plans schématiques (par exemple, chercher l'itinéraire le plus court ou demandant le moins de correspondances sur un plan de métro ou d'autobus) ;		Travailler : - avec de nouvelles ressources comme les systèmes d'information géographique, des logiciels d'initiation a la programmation…
		Reconnaître, nommer, décrire, reproduire, représenter, construire quelques solides et figures géométriques	Reconnaître, nommer, comparer, vérifier, décrire : - des figures simples ou complexes (assemblages de figures simples) ; - des solides simples ou des assemblages de solides simples a partir de certaines de leurs propriétés. Figures planes et solides, premières caractérisations : - triangles dont les triangles particuliers (triangle rectangle, triangle isocèle, triangle équilatéral) ; - quadrilatères dont les quadrilatères particuliers (carre, rectangle, losange, première approche du parallélogramme) ; - cercle (comme ensemble des points situes a une distance donnée d'un point donné). Vocabulaire approprie pour nommer les solides : pave droit, cube, prisme droit, pyramide régulière, cylindre, cône, boule.		
			Reproduire, représenter, construire : - des figures simples ou complexes (assemblages de figures simples) - des solides simples ou des assemblages de solides simples sous forme de maquettes ou de dessins ou a partir d'un patron (donne, dans le cas d'un prisme ou d'une pyramide, ou a construire dans le cas d'un pave droit).		
					Réaliser, compléter et rédiger un programme de construction. Réaliser une figure simple ou une figure composée de figures simples a l'aide d'un logiciel.
		Reconnaître et utiliser quelques relations géométriques	Reconnaître un carré en prenant en compte la perpendicularité et l'égalité des mesures des côtés	Reconnaître un carré en prenant en compte la perpendicularité et l'égalité des mesures des côtés	Reconnaître un carré à partir des propriétés de ses diagonales et de ses axes de symétrie
			Utiliser le compas pour tracer un triangle Reconnaître grâce à la dimension perceptive et instrumentée (notion d'alignement, de perpendicularité, de parallélisme)	Déterminer le plus court chemin entre un point et une droite ou entre deux droites parallèles (en lien avec la perpendicularité). - Alignement, appartenance.	Utiliser les relations géométriques (notions d'alignement, d'appartenance, de perpendicularité, de parallélisme, d'égalité de longueurs, d'égalité d'angle, distance entre deux points, de symétrie, d'agrandissement, de réduction)

ESPACE ET GEOMETRIE					
Domaines du socle	**Compétences**	**Objectifs**	**CM 1**	**CM 2**	**6e**
1.LANGAGES POUR PENSER ET COMMUNIQUER - 2. METHODES ET OUTILS POUR APPRENDRE 3. FORMATION DE LA PERSONNE ET DU CITOYEN 4. LES SYSTEMES NATURELS ET LES SYSTEMES TECHNIQUES 5. LES REPRESENTATIONS DU MONDE ET L'ACTIVITE HUMAINE	**Chercher (2,4)** *S'engager dans une démarche, observer, questionner, manipuler, expérimenter, émettre des hypothèses, en mobilisant des outils ou des procédures mathématiques déjà rencontrées, en élaborant un raisonnement adapté à une situation nouvelle.* **Modéliser (1,2,4)** *Reconnaître des situations réelles pouvant être modélisées par des relations géométriques (alignement, parallélisme, perpendicularité, symétrie).* *Utiliser des propriétés géométriques pour reconnaître des objets.* **Représenter (1,5)** *Analyser une figure plane sous différents aspects (surface, contour de celle-ci, lignes et points).* *Reconnaître et utiliser des premiers éléments de codages d'une figure plane ou d'un solide.* *Utiliser et produire des représentations de solides et de situations spatiales. .* **Raisonner (2,3,4)** *En géométrie, passer progressivement de la perception au contrôle par les instruments pour amorcer des raisonnements s'appuyant uniquement sur des propriétés des figures et sur des relations entre objets.* **Communiquer (1,3)** *Utiliser progressivement un vocabulaire adéquat et/ou des notations adaptées pour décrire une situation, exposer une*	**Reconnaître et utiliser quelques relations géométriques**	Déterminer le plus court chemin entre deux points (en lien avec les notions d'alignement et de mesure) Réaliser un programme de construction simple Effectuer des tracés correspondant à des relations de perpendicularité ou de parallélisme de droites et de segments Compléter une figure par symétrie axiale.	- Perpendicularité, parallélisme (construction de droites parallèles, lien avec les propriétés reliant droites parallèles et perpendiculaires) Distance entre deux points, entre un point et une droite. Figure symétrique, axe de symétrie d'une figure, figures symétriques par rapport à un axe.	Établir la notion de distance entre deux points, entre un point et une droite. Déterminer le plus court chemin entre deux points. Construire la figure symétrique d'une figure donnée par rapport à un axe donné que l'axe de symétrie coupe ou non la figure, construire le symétrique d'une droite, d'un segment, d'un point par rapport à un axe donné. Propriétés de conservation de la symétrie axiale. Médiatrice d'un segment.
		PROPORTIONNALITE : Agrandissement ou réduction d'une figure.	Agrandissement ou réduction d'une figure par un facteur entier Tracé par utilisation d'instruments ou moyens assistés TICE.	Agrandissement d'une figure par un facteur décimal CM2 Tracé par utilisation d'instruments ou moyens assistés TICE.	Reproduire une figure en respectant une échelle (la réduction étant obtenue par un facteur inférieur à 1) Tracé par utilisation de moyens assistés TICE.
			Reconnaître et distinguer des figures dont l'une est l'agrandissement ou la réduction de l'autre quelle que soit l'orientation de ces figures. Savoir déterminer le facteur d'agrandissement.		
			Même orientation et facteur d'agrandissement entier.	Orientation différente et facteur d'agrandissement entier	Orientation identique ou différente et facteur décimal ou fractionnaire.

6 Des éléments de la recherche en éducation et quelques réflexion personnelles.

Ce chapitre contient des pistes qui ont alimenté les réflexions de l'auteur. Ces documents se rapportent à plusieurs domaines de l'enseignement et ont le mérite de faire se questionner l'enseignant dans ses pratiques, ses conceptions, à l'inciter à lire et confronter les données et les sources pour avoir un recul le plus objectif possible sur sa pratique. Considérons qu'il y a alors un aller-retour réflexif, et constant, entre les données issues de la recherche en éducation et le savoir empirique de l'enseignant face à ses élèves. L'auteur a donc pu confronter ses lectures et sa pratique durant les 5 années ou il a occupé le poste de PDM. Durant cette période, il a pu travailler la résolution de problème chaque semaine avec tous les niveaux de l'école, du CP au CM2. Cela représente plus de 2500 heures de pratique avec tous les élèves en cinq années, soit plus de 1350 élèves. Cet ouvrage est donc le fruit de cette expérience unique. C'est donc une démarche personnelle, propre à l'auteur qui est exposée ici. Il n'y a aucune valeur prescriptive, juste une présentation de documents et études qui confortent ou non des pratiques, des questionnements et des ressentis professionnels.

L'objectif de ce projet est d'amener tous les élèves à un niveau de compétence élevé dans le domaine de la résolution de problème et par conséquent à un niveau de compétence élevé dans le domaine mathématique. Nous entendons par compétence élevée la somme de connaissances et d'habiletés de l'élève. La recherche de l'efficacité est donc primordiale afin de permettre à tous les élèves, performants et en difficulté, de développer leurs capacités au mieux de leurs possibilités. Afin d'atteindre cet objectif il convient de mettre en place, autant que possible, des procédures efficaces, des outils d'évaluation, de différenciation et de remédiation pour tous les élèves. La difficulté que va rencontrer l'enseignant est de cibler ce qui est efficace sans les biais de jugement de

celui qui pratique (biais divers selon le vécu disciplinaire, les réussites et échecs, etc.) Une pratique peut à la fois être jugée comme efficace de manière relative et/ou absolue. Prenons l'exemple d'une variation d'un paradigme pédagogique de l'enseignant qui remarque alors que « les élèves réussissent mieux ». Il juge la pratique comme plus efficace. Mais dans quelle mesure ? Elle est peut-être efficace relativement à la précédente, mais de manière absolue ? Rien n'est mois sûr. Pour simplifier, sur une échelle de 1 à 100, 5 est supérieur à 1 (relativement) mais de manière absolue, c'est très faible. Il s'agit donc d'éviter toute approche dogmatique ou réductrice (rester ouvert), mais de chercher ce qui va bénéficier le plus possible à nos élèves en oscillant toujours avec les contraintes des pratiques pédagogiques : ce que cela apporte et ce que cela coûte.

À ce titre, les démarches proposées se veulent basées autant que possible sur des faits établis issus de la recherche et validés par celle-ci. Sans entrer dans des querelles pédagogiques, quels sont les invariants nécessaires pour la réussite de nos élèves ? Nous souhaitons baser notre projet sur des faits démontrés avec rigueur (jusqu'à invalidation de ceux-ci). Nous avons donc cherché des études de grande ampleur (Groupe test significatif), publiées (revues à comité de lecture), critiquées (contre-argumentation), analysées (évacuation des biais méthodologiques) et vérifiées selon des protocoles rigoureux (reprise du protocole pour infirmer ou confirmer) afin d'avoir des bases solides pour réfléchir a ce que nous pouvons faire pour donner le meilleur à nos élèves. Nous avons tous des intuitions selon nos vécus mais nous ne sommes pas exempts de biais et la difficulté est de garder toujours un doute nécessaire pour questionner ce qui pourrait nous sembler « évident ». car ce qui est « évident » pour nous ne l'est peut-être pas tous et surtout, est peut être faux. En agissant ainsi, nous voulons construire sur des bases solides qui ne dépendent pas des opinions, des impressions, des impositions des uns et des autres. La réussite de nos élèves nous permettra de valider ou non nos pratiques.

Bien sûr, il y aura toujours débat entre les différents tenants de pratiques pédagogiques. Il faut garder à l'esprit que dans les domaines scientifiques une théorie se

valide dans la durée, car elle doit pouvoir rester compatible avec des faits nouveaux (auquel cas elle se précise), résister aux expérimentations qui voudraient en démontrer son invalidité (elle se renforce), et assurer la justesse de ses prédictions. Nous adoptons ce principe et ne mettons donc pas en place ce qui n'aurait pas été validé. Entendons clairement que la validation locale ou temporelle ne présage en rien d'une solidité théorique absolue (notre projet est local et donc à contextualiser, cela nous concerne, nous n'affirmons donc pas sa validité dans tous les contextes), la validation doit être longitudinale, fiable statistiquement et reproductible.

Il faut aussi admettre que ce qui semble aujourd'hui validé pourrait être invalidé par la suite. Cela nécessite une mise à jour régulière des connaissances sur les principes employés. Ainsi, nous n'affirmons pas être dans le vrai, loin de là, et ne sommes pas des prescripteurs mais nous faisons tout pour ne pas être dans le faux. Ce positionnement requiert humilité et objectivité face aux données mais aussi de savoir prendre du recul face à diverses préconisations qui ne montrent pas une efficacité prouvée.

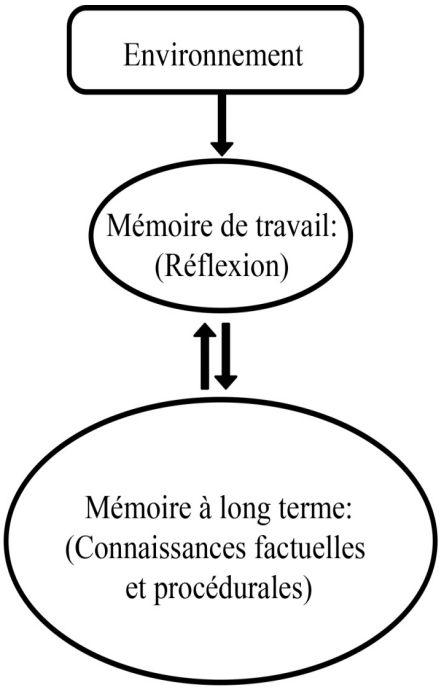
Attention, en science le terme théorie ne porte pas la même connotation que dans le langage courant. Le terme « théorie » du langage courant est ce que la science nomme « hypothèse » et ne se base pas sur des fondements méthodologique solides. Quand nous utilisons le terme « Théorie » comme plus tard au sujet de la « théorie de la charge cognitive » il s'agit du terme scientifique et non du terme général.

En introduction nous avons énoncé le fait que notre projet visait un enseignement explicite des stratégies de résolution de problème **(Problem Solving Teaching)** plus qu'un enseignement basé sur la situation problème **(Problem Based Learning)**. Nous détaillerons par la suite ce choix mais avant cela il convient de préciser certains principes importants qui sont intégrés dans notre projet.

6 - 1 La charge cognitive

La théorie de la charge cognitive (*Sweller, lire Tricot également*[1]) **:**

Cette théorie détail les rôles essentiels de 2 formes de mémoires. La mémoire de travail qui est le lieu de la conscience et de la réflexion. C*ette mémoire est limitée aussi, plus elle est « pleine » plus il est difficile de réfléchir (Willingham*[2]*).* Et d'un autre côté la mémoire à long terme qui permet le stockage de toutes les informations. Plus la mémoire à long terme contient d'éléments permettant de créer des liens et des analogies, plus la mémoire de travail est déchargé et plus elle est disponible pour le travail réflexif. Il y a donc une nécessité d'automatiser certaines procédures pour libérer la mémoire de travail. Il faut donc disposer de connaissances factuelles et procédurales dans la mémoire à long terme pour augmenter l'efficacité de la mémoire de travail.



Cette courte explication a des incidence énormes sur les pratiques pédagogiques. Ainsi, puisque la mémoire à long terme permet le stockage des informations et la création de réseaux entre ces informations, via un traitement dans la mémoire de travail, l'apprentissage correspondrait alors à une modification de la mémoire à long terme. Donc, quand j'apprends je modifie ma mémoire à long terme et plus j'automatise des procédures, des méthodologies et plus j'engrange des connaissances dans ma mémoire à long terme. Cela implique que je développe encore plus le potentiel

1 « La charge cognitive, théorie et applications » CHANQUOY L, TRICOT A, SWELLER J. Armand colin

2 why don't students like school ? Daniel T. Willingham

d'efficacité de ma mémoire de travail. Ainsi, plus je dispose de connaissances, procédures et compétences stockées en mémoire, plus il me sera facile d'en ajouter encore et de gagner encore plus en efficacité. En simplifiant, plus la mémoire à long terme dispose de connaissances au sens large, plus je libère ma mémoire de travail, plus mon efficacité cognitive augmente et plus ce mécanisme est efficace. Or, le stockage en mémoire à long terme implique une répétition des tâches (entraînement) pour automatiser, une pratique espacée pour rechercher en mémoire et consolider, des tests pour la récupération mémorielle. De fait, une approche pédagogique structurée et explicite, du simple au complexe, du guidage vers l'autonomie, en favorisant le travail des automatismes, le feed-back et la récupération serait ce qu'il y a de plus adapté.

Pour en revenir à la différence PST et PBL, commencer directement l'apprentissage des habiletés de base par un enseignement par résolution de problème (PBL) est beaucoup moins efficace que d'étudier des exemples travaillés. La mémoire de travail est saturée et limite la pertinence de la réflexion, l'élève n'a que peu d'accroches dans sa mémoire à long terme, contrairement à l'expert qui face à une situation problème nouvelle peut aller rechercher dans sa mémoire diverses pistes de résolution. En bref, Il y a beaucoup trop d'éléments que l'élève doit analyser pour faire émerger une solution et il ne peut faire des liens entre eux, car il ne dispose que de trop peu de connaissances à lier en réseau. C'est la surcharge et l'échec face à la tâche. Une minorité d'élèves va réussir, car cette minorité dispose déjà des prérequis pour lier et analyser. Le succès de cette minorité ne doit alors pas masque l'échec de la majorité au risque de mettre en place une pédagogie du « bon élève » qui laisse de côté tous les autres. Ainsi, il apparaît plus profitable à tous les élèves de montrer, modéliser, expliciter en guidant et étayant avant que les élèves puissent aller plus loin en autonomie.

Les recherches ont nommé *« worked exemple effect »* le principe très explicite de débuter par observation, imitation, accompagnement puis pratique autonome. Il s'agit de commencer par l'étude de très nombreux exemples résolu et dont la démarche de résolution est elle aussi explicitée dans une phase de guidage ou l'enseignant et l'élève sont en interaction soutenue. Attention, l'enseignement PBL gagne en efficacité par la suite (quand les élèves disposent d'un bagage effectif dans le domaine ciblé) mais ne saurait être un point de départ car c'est une pratique experte qui nécessite, pour être optimisée, d'avoir emmagasiné une masse de connaissances et procédures.

À titre d'exemple, nous observons chez nos élèves que ceux qui ont les habiletés calculatoires les plus fortes sont ceux qui accèdent le plus vite à une compréhension fine des problèmes rencontrés. Nous le remarquons du CP au CM2, quand le calcul ne pose plus problème (mental, en ligne, posé), toutes l'attention est portée sur la compréhension des relations et des faits du problème arithmétique. La facilité à pouvoir opérer sur les nombres, par des automatismes, semble permettre à nos élèves d'acquérir une plus grande aisance dans la compréhension globale des problèmes rencontrés. Mais cela ne règle pas tout, il y a beaucoup de facteurs entrant en jeu dans la résolution de problème et

l'élimination d'un seul est favorable mais insuffisant. De même, entre 2 élèves qui ont des habiletés calculatoires semblables, celui qui a bénéficié d'un enseignement explicite des stratégies de résolution, de modélisation, de travail sur la traduction de l'énoncé est bien plus performant, car il a également automatisé des processus réflexifs.

Pour simplifier : L'élève est un débutant et il ne peut pas réfléchir et agir comme un expert qui lui a un fonctionnement très abstrait. L'expert à un mode de pensée d'expert qui est le fruit d'un long apprentissage de connaissances et de procédures (une grande pratique de son domaine). Le débutant peut comprendre alors que l'expert peut créer des connaissances. Au début de tout apprentissage, les élèves n'ont pas encore un ensemble de connaissances structurées sur le domaine dont il est question. Ils ne peuvent donc pas efficacement résoudre un problème de manière autonome, car ils doivent gérer les données, la structure du problème, les inconnues. Le but est donc, de manière progressive, d'affiner et d'automatiser des procédures et de stocker en mémoire des faits numériques essentiels (Tables, algorithmes…)

Notre projet étalé sur 5 années vise cette automatisation procédurale, la mise en mémoire des stratégies et des faits numériques pour libérer la réflexion. *In fine* nous cherchons à percer la surface du sujet pour l'étudier en profondeur. Les 5 années permettent aussi de remobiliser régulièrement les savoirs pour les ancrer et les affiner.

Critiques de la théorie[3] :

« Plusieurs chercheurs remettent actuellement en question ce modèle phare de la psychologie cognitive, avec plus ou moins de radicalité. Certains, dont Moreno, sont particulièrement virulents à l'égard de cette théorie et la considèrent désormais comme une impasse. D'autres chercheurs, De Jong par exemple, adoptent un point de vue plus modéré et n'entendent pas remettre en question l'ensemble de la théorie de la charge cognitive. Ces chercheurs reconnaissent les nombreux apports que cette théorie a amené à la psychologie cognitive et plaident pour l'émergence d'une théorie renforcée conceptuellement et méthodologiquement. »

À lire sur le sujet (en anglais) :

Kirschner, P. A., Sweller, J., Clark, R.E. (2006). « Why Minimal Guidance During Instruction Does Not Work : An Analysis of the Failure of Constructivist, Discovery, Problem-Based, Experiential, and Inquiry-Based Teaching. » EDUCATIONAL PSYCHOLOGIST 41(2) : 75-86.

Sweller, J., P. A. Kirschner, Clark, R.E. (2007). « Why Minimally Guided Teaching Techniques Do Not Work : A Reply to Commentaries. » EDUCATIONAL PSYCHOLOGIST 42(2) : 115-121.

Chanquoy, Tricot, Sweller « La charge cognitive » 2007. Armand Colin.

À lire en lien avec les études publiées dans le domaine de l'éducation : taxonomie d'Ellis et Fouts sur les niveaux des recherches en éducation.

3 http://edutechwiki.unige.ch/fr/Th%C3%A9orie_de_la_charge_cognitive

COGNITIVE LOAD THEORY *EFFECTS*

Springer

AN INFOGRAPHIC SUMMARY OF THE BOOK **COGNITIVE LOAD THEORY** BY JOHN SWELLER, PAUL AYRES, SLAVA KALYUGA [2011]

EFFECT 01

THE GOAL-FREE EFFECT

When novices solve a conventional problem, they will frequently work backwards from the goal to the givens using a means-end strategy.

Learners are more likely to acquire schemas under goal-free than conventional goal conditions.

EFFECT 02

THE WORKED EXAMPLE EFFECT

Studying worked examples provides one of the best, possibly the best, means of learning how to solve problems in a novel domain.

Worked examples can effectively provide us with problem solving schemas that need to be stored in long-term memory.

EFFECT 03

THE SPLIT-ATTENTION EFFECT

Split-attention occurs when learners are required to split their attention between at least two sources of information that have been separated either spatially or temporally.

Worked examples had no advantage over conventional problem solving when they were constructed in a split-source presentation.

EFFECT 04

THE MODALITY EFFECT

The amount of information that can be processed using both auditory and visual channels should exceed the processing capacity of a single channel.

The modality effect is usually stronger for measures of transfer rather than retention.

EFFECT 05

THE REDUNDANCY EFFECT

The redundancy effect occurs when information that includes redundant material results in less learning than the same information minus the redundant material.

Redundant information should be omitted to preclude an increase in extraneous cognitive load.

EFFECT 06

THE EXPERTISE REVERSAL EFFECT

The need for experts to establish connections between elements of presented information and their existing knowledge base can interfere with learning.

...to unnecessarily process the same information that is redundant for more knowledgeable learners.

EFFECT 07

THE GUIDANCE FADING EFFECT

The gradual reduction of instructional guidance as levels of learner expertise increase has proven to be a more effective instructional procedure than abrupt switches from worked examples to problems.

One possible means of a smooth transition from worked examples to problem solving practice is the use of completion tasks.

EFFECT 08

THE IMAGINATION & SELF-EXPLANATION EFFECT

Imagining or self-explaining a procedure can be regarded as a form of deliberate practice that requires intentional processing of information in working memory to strengthen schemas held in long-term memory.

The imagining technique was beneficial only for more knowledgeable learners.

EFFECT 09 A

THE TRANSIENT INFORMATION EFFECT

AUDITORY

We define the transient information effect as a loss of learning due to information disappearing before the learner has time to adequately process it.

Whenever a teacher orally explains something to a class a pupil... the information presented is transient.

EFFECT 09 B

THE TRANSIENT INFORMATION EFFECT

VISUAL

Whether viewed on a computer or a television screen, as frames roll from one to another, visual information disappears from sight.

Static diagrams could lead to more active learning. In a sequence of static diagrams, learners are required to mentally integrate the static diagrams.

EFFECT 10

THE ELEMENT INTERACTIVITY EFFECT

The fact that cognitive load effects tend to be obtainable only if intrinsic cognitive load is high, is referred to as the element interactivity effect.

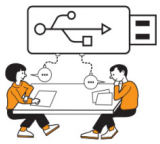
Element interactivity due to intrinsic cognitive load can be manipulated by changing the nature of a task.

EFFECT 11

THE COLLECTIVE WORKING MEMORY EFFECT

Such sharing will not be beneficial if the transaction costs exceed the advantages gained by off-loading some of the elements to other people.

Under appropriate conditions collaboration can enhance learning.



by Oliver Caviglioli | @olivercaviglioI | teachinghow2s.com

6 - 2 Les méta-analyses de Hattie, Les travaux de Rosenshine

Les Méta-Analyses de Hattie :

Les méta-analyses de Hattie[1] ont permis de quantifier les effets de plusieurs démarches pédagogiques selon leur efficacité auprès des élèves. Ces données peuvent proposer des pistes de travail et donc des pratiques qui cherchent une amélioration de l'efficacité.

Les pratiques mesurées sont liées à un facteur d'influence allant de 0 à 1,4 selon leur effet. L'effet moyen est de 0,4. Entre 0 et 0,2 la pratique en question ne nuirait pas à l'élève mais ne l'aiderait pas non plus, elle aurait donc peu d'impact. Entre 0,2 et 0,4 la pratique serait légèrement bénéfique à l'élève. Entre 0,4 et 0,6 l'aide serait visible. Au-delà de 0,6 l'aide serait vraiment importante. Ainsi, toutes les pratiques des enseignants ont un impact sur les élèves et ces pratiques pédagogiques vont faire progresser les élèves mais la progression ne sera pas semblable selon l'approche. La question n'est pas tant de savoir si une approche est efficace, mais de savoir à quel point elle l'est. **Selon les méta-analyses d'Hattie, l'apprentissage par problèmes a un effet d'ampleur de 0,15 (Problem-based learning = 0,15) alors que l'enseignement des stratégies en résolution de problèmes a un effet d'ampleur de 0,61 (Problem-solving teaching = 0,61)**. Comme nous l'avons déjà dit, l'ampleur faible (0,15) vient, selon nous, de la pratique trop précoce d'une démarche experte hors de portée des élèves pour être pleinement efficace (analyse personnelle de l'auteur).

Cela n'enlève pas sa possible pertinence sur un public âgé ayant un bagage « académique » plus étoffé. (Ainsi, les effets ne sont pas « généraux » mais sont variables selon les niveaux ciblés : élémentaire, secondaire, universitaire.)

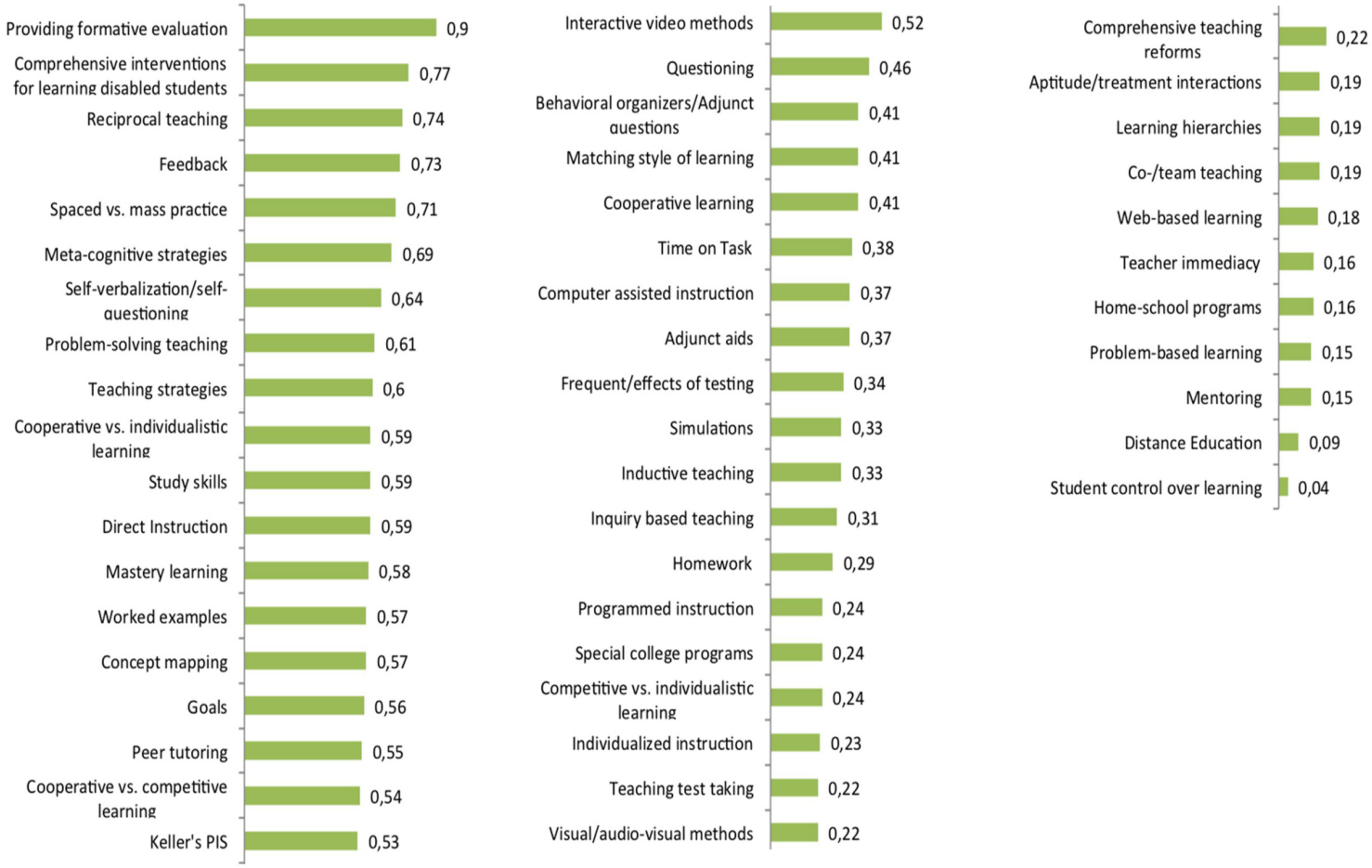
« That problem-based learning was less effective than alternative approaches, but that teaching students problem-solving strategies had a large impact on their subsequent results. » Hattie.

1 http://www.education.auckland.ac.nz/en/about/staff/j.hattie.html

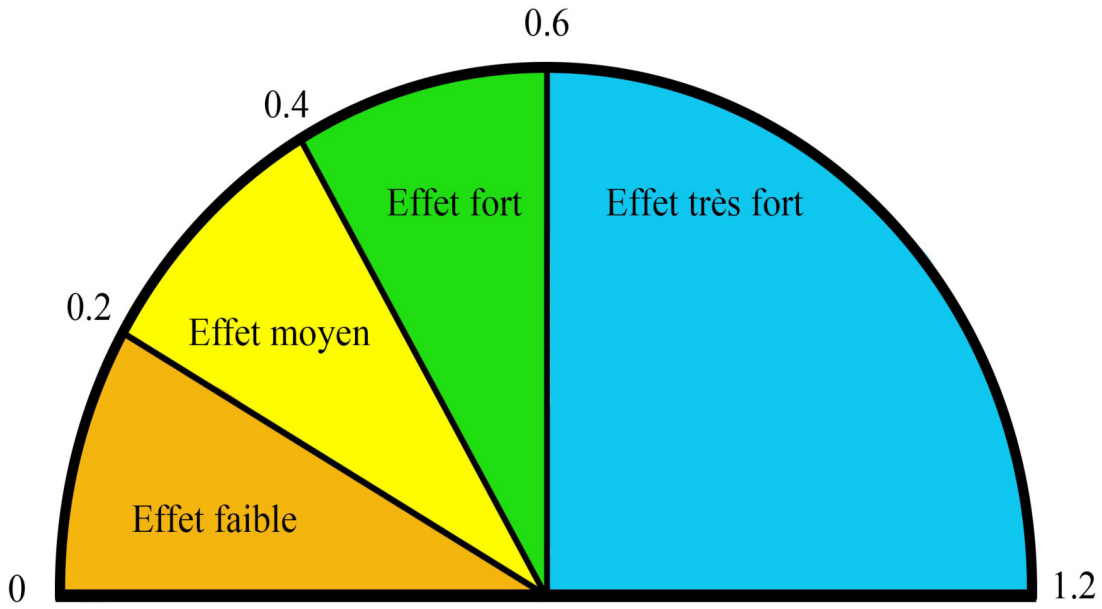
TEACHING EFFECTS

Influences and effect sizes related to student achievement

Source: Hattie (2009) Visible Learning
Diagram: www.visible-learning.org



Afin de mieux visualiser ces informations nous utiliserons la représentation suivante :



Apprentissage par situation problème : 0,15 (par découverte, tache complexe dès le départ)

Apprentissage coopératif : 0,41 (coopératif ≠ collaboratif)

Tutorat entre élèves :0,55

Apprentissage par l'exemple : 0,57 (worked exemple effect) (Pédagogie explicite)

Direct Instruction : 0,59 (Cf Siegfried Engelmann)

Apprentissage des stratégies de résolution de problème :0,61

Verbalisation des démarches et auto-questionnement : 0,64

Confiance entre l'enseignant et l'élève : 0,72

Ces données ne sont que quelques exemples des résultats issus des méta-analyses de Hattie (publication sous le titre « Visible Learning »).

Le principe d'étude utilisé ici est celui des pratiques basées sur la preuve (Evidence-based education). Cette approche vise à mesurer l'effet des pratiques et leur degré d'efficacité en analysant les différentes études mondiales publiées sur des facteurs relevant de la pédagogie. Cette démarche est appliquée en médecine et pharmacologie. Le principe des méta-analyses est donc de synthétiser toutes les observations et de rechercher les corrélations, les convergences ou divergences de manière à faire émerger les concepts solides. Les cohortes d'élèves concernés (entre 80 et 250 millions) offrent une base statistique fiable pour exprimer des tendances fortes. Néanmoins, des études continuent à être intégrées et les résultats des méta-analyses de Hattie ne sont donc pas figés. Cela implique qu'ils reflètent les connaissances actuelles mesurées, comparées et vérifiées concernant les pratiques pédagogiques. Mais aussi qu'un effet fort annoncé est lié à un

contexte plus ou moins généralisable et qu'il faut regarder le détail des études pour éviter les conclusions trop hâtives. Selon la cible (primaire ou lycée) une même pratique peut avoir des effets différents au niveau de l'efficacité. Ce qui fonctionne dans le secondaire peut être inadapté au primaire et vice versa.

Ces méta-analyses donnent une vue d'ensemble mais ne sont pas exemptes de possibles biais statistiques mais les années passant, elles sont renforcées et corrigées. Elles ne sont donc pas à prendre comme la « vérité » de la recherche mais comme une proposition de comparaison très étoffée qui doit être complétée et affinée mais qui fait ressortir des tendances très fortes sur les pratiques efficaces. Il existe environs 138 facteurs évalués dans les méta-analyses[2]. (actuellement, 2018, il y a 250 facteurs évalués)

2 http://visible-learning.org/

À chaque pratique pédagogique correspond le nombre de méta-analyses, d'études publiées, le nombre d'élèves concernés et l'effet concerné. Du bleu pour un effet très fort au rouge qui est faible ou sans effet. Nous tâchons d'utiliser les bleues et vertes pour la résolution de problèmes.

TABLE 5.1 Effect sizes from various programs

PROGRAMS	NO. OF METAS	NO. OF STUDIES	NO. OF PEOPLE	NO. OF EFFECTS	ES	SE	RANK
Reciprocal teaching	2	38	677	53	0.74		9
Vocabulary programs	10	442		1,109	0.67	0.108	15
Repeated reading programs	2	54		156	0.67	0.080	16
Study skills programs	19	1,278	135,778	3,450	0.63	0.090	20
Problem-solving teaching	6	221	15,235	719	0.61	0.076	22
Comprehension programs	16	657	38,393	3,146	0.60	0.056	24
Concept mapping	7	325	8,471	378	0.60	0.051	25
Cooperative vs individualistic learning	4	774		284	0.59	0.088	26
Direct instruction	4	304	42,618	597	0.59	0.096	27
Mastery learning	10	420	9,323	374	0.58	0.055	29
Providing worked examples	1	62	3,324	151	0.57	0.042	30
Peer tutoring	14	767	2,676	1,200	0.55	0.103	32
Cooperative vs competitive learning	7	1,024	17,000	933	0.54	0.112	33
Phonics instruction	19	523	21,134	6,453	0.54	0.191	34
Keller's Mastery PIS	3	263		162	0.53		38
Interactive video methods	6	441	4,800	3,930	0.52	0.076	44
Play programs	2	70	5,056	70	0.50		47
Second-/third-chance programs	2	52	5,685	1,395	0.50		48
Computer-assisted instruction	100	5,947	4,239,997	10,291	0.37	0.059	76
Simulations	10	426	10,934	550	0.33	0.081	85
Inductive teaching	2	97	3,595	103	0.33	0.035	86
Inquiry-based teaching	4	205	7,437	420	0.31	0.092	90
Teaching test taking and coaching	11	275	15,772	372	0.27	0.024	97
Competitive vs individualistic learning	4	831		203	0.24	0.232	103
Programmed instruction	8	493		391	0.23	0.084	104
Individualized instruction	10	638	9,380	1,185	0.22	0.060	108
Visual/audiovisual methods	6	359	2,760	231	0.22	0.070	109
Extracurricular programs	8	2,161		1,036	0.19	0.055	115
Co-teaching/team teaching	2	136	1,617	47	0.19	0.057	117
Web-based learning	3	45	22,554	136	0.18	0.124	123
Problem-based learning	9	367	38,090	747	0.15	0.085	126
Sentence-combining programs	2	35		40	0.15	0.087	127
Perceptual–motor programs	1	180	13,000	637	0.08	0.011	136
Whole language	4	64	630	197	0.06	0.056	137
Average/sum	**330**	**20,339**	**4,699,961**	**42,054**	**0.41**	**0.080**	–

La dernière analyse de PISA par l'OCDE conclue également à l'inefficacité, ou plutôt « efficacité moindre » des approches en jaune sur le tableau. Il faut lire à ce sujet le rapport sur les résultats de 2015 :

"Politiques et pratiques pour des établissements performants", volume II Pisa 2015[1] ou lire les extrait cités par le CaféPédagogique[2] :

« Les résultats de l'enquête PISA montrent que ***lorsque les enseignants expliquent et démontrent fréquemment les concepts scientifiques****, et* ***discutent des questions des élèves*** *(une méthode d'enseignement appelée communément* ***l'enseignement dirigé par l'enseignant)****,* ***les élèves obtiennent de meilleurs résultats en sciences****, affichent de plus fortes convictions par rapport au bien-fondé de la démarche scientifique (ou convictions épistémiques) et sont plus susceptibles d'envisager exercer une profession scientifique à l'âge adulte.* ***Lorsque les enseignants adaptent leurs pratiques aux besoins des élèves, par exemple en apportant une aide personnalisée quand un élève a des difficultés à comprendre un sujet ou un exercice, ou en modifiant leurs cours quand la plupart des élèves trouvent le sujet difficile à comprendre, les élèves obtiennent de meilleurs scores en sciences et affichent de plus fortes convictions épistémiques.*** *»*

Le rapport valide aussi la pratique du feedback*, sous ses 5 formes : « le professeur me dit quels sont mes résultats à ce cours » ; « le professeur m'indique quels sont mes points forts dans cette matière » ; « le professeur me dit dans quels domaines je peux encore m'améliorer » ; « le professeur me dit comment je peux améliorer mes résultats » ; et « le professeur me donne des conseils sur la façon d'atteindre mes objectifs scolaires »… Dans les pays de l'OCDE, plus les élèves estiment que leurs enseignants leur fournissent fréquemment un feedback, plus ils sont susceptibles d'envisager une carrière scientifique et plus leurs convictions épistémiques sont importantes".*

Inversement la démarche d'investigation, fortement promue en France, n'est pas efficace selon l'OCDE. *" Aussi surprenant que cela puisse paraître, il n'existe aucun système d'éducation dans lequel les élèves ayant déclaré être fréquemment exposés à l'enseignement fondé sur une démarche d'investigation (qui leur demande d'effectuer des expériences ou des travaux pratiques) obtiennent un score plus élevé en sciences. Après contrôle du statut socio-économique des élèves et des établissements,* ***une exposition plus importante à l'enseignement fondé sur une démarche d'investigation est corrélée à de moins bons résultats des élèves en sciences dans 56 pays et économies****".*

Ces données peuvent également nous interpeller sur nos pratiques pédagogiques lors de la résolution de problèmes où nous observons les mêmes effets auprès de nos élèves. Les pratiques que nous mettons en avant dans ce domaine spécifique, dans notre projet, se

1 http://www.keepeek.com/Digital-Asset-Management/oecd/education/resultats-du-pisa-2015-volume-ii_9789264267558-fr#.WnXzyKjiaUk

2 http://www.cafepedagogique.net/lexpresso/Pages/2017/03/28032017Article636262836215283914.aspx

trouvent ici confortées, mais il serait également réducteur de ne limiter les performances des élèves qu'a quelques postures. Nous dirions plutôt qu'il y a des pratiques efficaces que nous essayons d'atteindre autant que possible mais que ce n'est pas suffisant, il ne faut pas négliger le rapport élève/enseignant, le rapport école/famille, l'évaluation et sa prise en compte dans la progression des élèves (et la docimologie est un vaste domaine), la cohérence d'école sur un projet, sur des supports, l'accompagnement des élèves et des collègues, les discussions entre les enseignants. Bref, il y a des pratiques disciplinaires nécessaires pour mieux faire réussir, mais elles ne sont pas intrinsèquement suffisantes. Elles s'inscrivent dans un système plus global dans lequel l'enseignant n'a peut-être pas pouvoir pour agir. Disons que nous tentons de faire au mieux.

Nous pouvons également nous intéresser aux travaux de Robert J. Marzano[3] : *conférencier, formateur et chercheur en éducation aux États-Unis. Il a effectué des recherches pédagogiques et théoriques sur les thèmes de l'évaluation basée sur des normes , de la cognition, des stratégies d'enseignement à haut rendement et de la direction d'école, notamment en développant des programmes et des outils pratiques pour les enseignants.*

D'après ses recherches et publications, il propose également plusieurs stratégies qui, selon lui, sont efficaces avec les élèves.

Table 4.1: Using Structured Practice Sessions

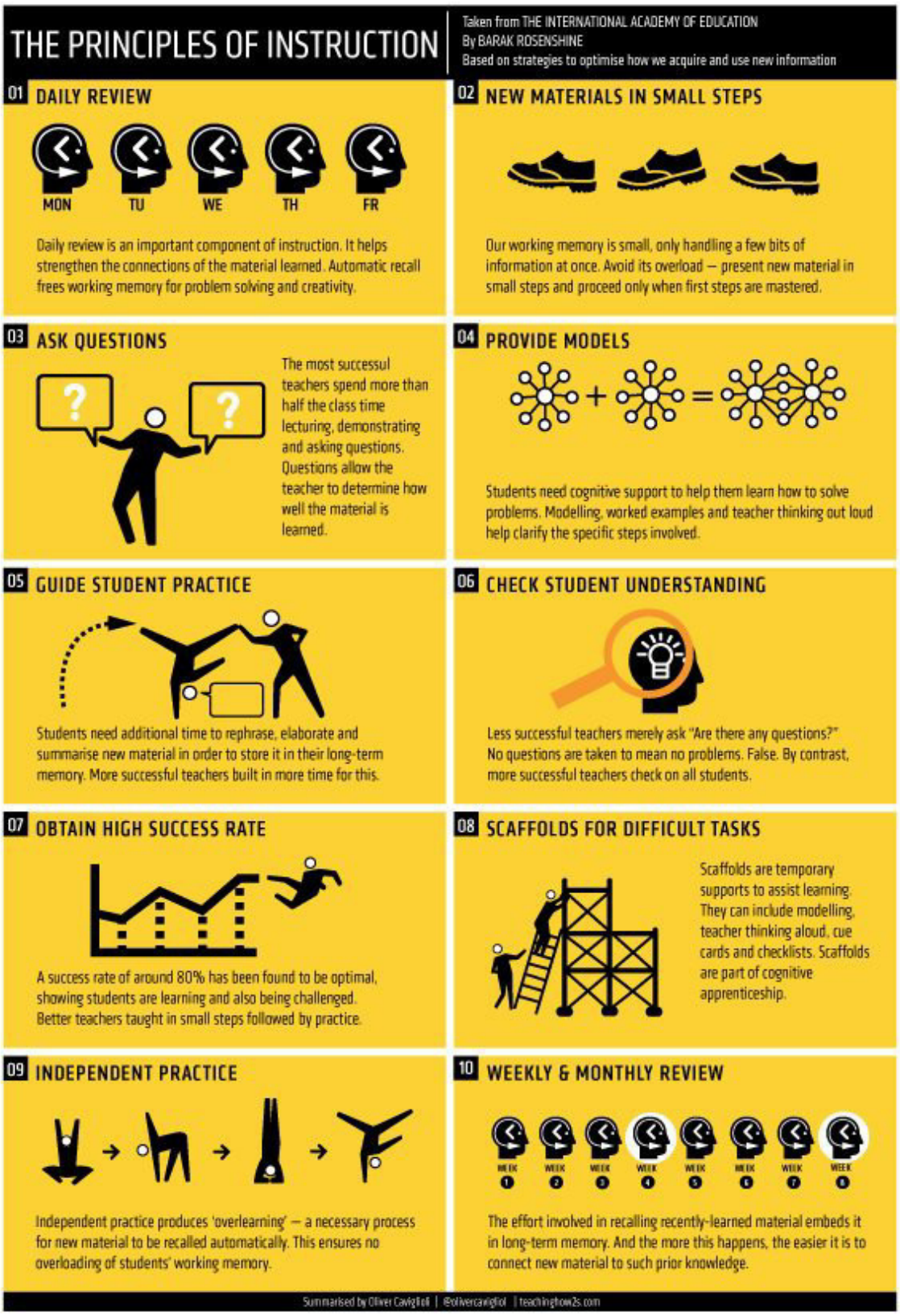
Strategy	Description
Modeling	When presenting any skill, strategy, or process to students, the teacher first models it for them. This involves the teacher walking through the steps involved in the skill, strategy, or process and thinking aloud as he or she does so.
Guided practice	The teacher provides well-structured opportunities for students to practice new skills, strategies, or processes. During these opportunities, activities move from very simple to more complex versions of the skill, strategy, or process.
Close monitoring	The teacher provides a highly structured practice environment and monitors students' actions very closely to correct early errors or misunderstandings.
Frequent structured practice	The teacher first provides a clear demonstration of the skill or process. After this demonstration, the teacher provides frequent opportunities to practice discrete elements of the skill or process and the skill or process as a whole in situations where students have a high probability of success.
Varied practice	The teacher provides opportunities to practice a skill or process in more challenging situations. Students still experience success, but they might be required to work a bit harder than was necessary during frequent structured practice.
Fluency practice	The teacher engages students in independent practice in which they focus on performing the skill or process skillfully, accurately, quickly, and automatically.
Worked examples	While students are practicing skills or processes, the teacher provides them with problems or examples that have already been worked out so they receive a clear image of the correct procedure.
Practice sessions prior to testing	The teacher sets up a practice schedule to ensure that students have a chance to review and practice skills or processes before they are tested or retested on them.

Source: Adapted from Marzano Research, 2016kk.

Sans entrer dans le détail de ses publications, et sur les discussions liées aux méthodologies employées, nous remarquons qu'il y a plusieurs points concordant avec les travaux de Barak Rosenshine[4]. À partir des expérimentations de Siegfried Engelmman[5] sur l'approche pédagogique nommée « Direct Instruction » et suite aux résultats du projet *Follow Through*[6], Rosenshine formalise progressivement la Pédagogie Explicite. Ses travaux sont poursuivis par des chercheurs canadiens Steve Bissonnette, Clermont Gauthier et Mario Richard[7].

3 https://en.wikipedia.org/wiki/Robert_J._Marzano
4 https://www.aft.org/sites/default/files/periodicals/Rosenshine.pdf
5 https://en.wikipedia.org/wiki/Siegfried_Engelmann
6 https://www.nifdi.org/what-is-di/project-follow-through
7 GAUTHIER C., BISSONNETTE S., & RICHARD M., *Enseignement explicite et réussite des élèves. La gestion des apprentissages,* Bruxelles, De Boeck, 2013.

Les principes qui animent l'approche de Rosenshine[8] sont présentés dans le résumé ci-dessous :



8 https://teacherhead.com/2018/06/10/exploring-barak-rosenshines-seminal-principles-of-instruction-why-it-is-the-must-read-for-all-teachers/

6 - 3 Manipulation – Modélisation - Abstraction

Manipulation – Modélisation – Abstraction.

Cette approche est nommée par les Anglo-Saxons (*Concrete – Representation – Abstraction*) et se retrouve également dans les manuels de Singapour sous le nom « Concret – Imagé – Abstrait » (Pour la version française). Ces 3 appellations définissent la même approche progressive. Son efficacité est reconnue pour les enseignements des concepts mathématiques. Les études relatives à cette approche sont majoritairement anglo-saxonnes :

– *Bruner (1960)*

– *Jordan, Miller & Mercer 1998*

– *Scheuermann, A. M., Deshler, D. D., & Schumaker, J. B. (2009).*

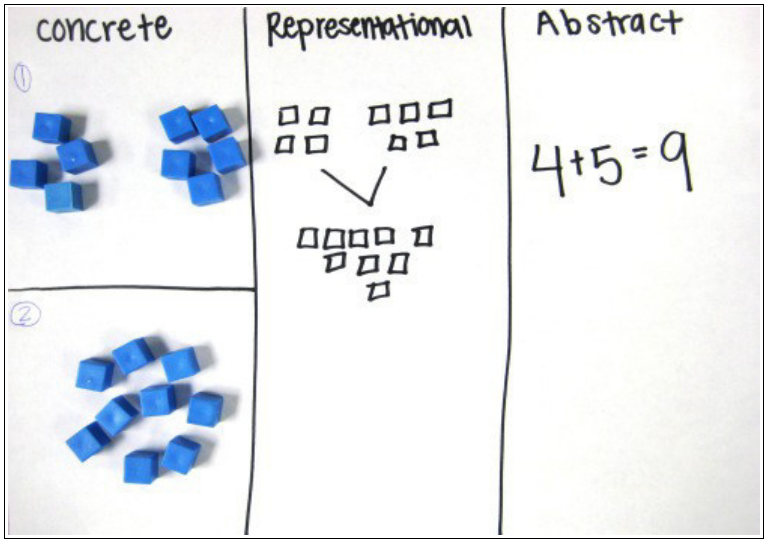
The effects of the explicit inquiry routine on the performance of students with learning disabilities on onevariable equations. Learning Disability Quarterly, 32(2), 103-120.

– *Bradley S. Witzel, Cecil D. Mercer and David Miller (2003)*

Teaching Algebra to Students with Learning Difficulties : An Investigation of an Explicit Instruction Model

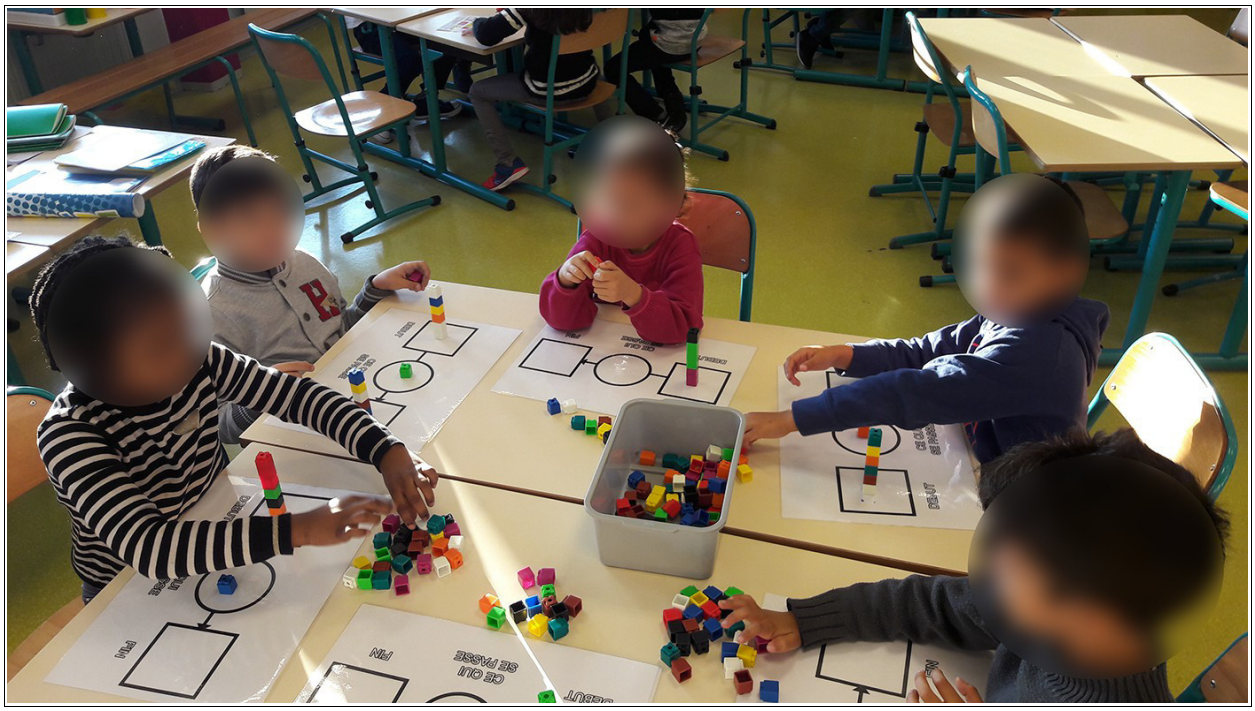
Il existe de nombreuses autres études sur l'approche CRA mais toujours en langue anglaise. Nous invitons donc le lecteur à découvrir ces approches tout comme les auteurs cités dans cette synthèse

<u>Exemple type :</u>

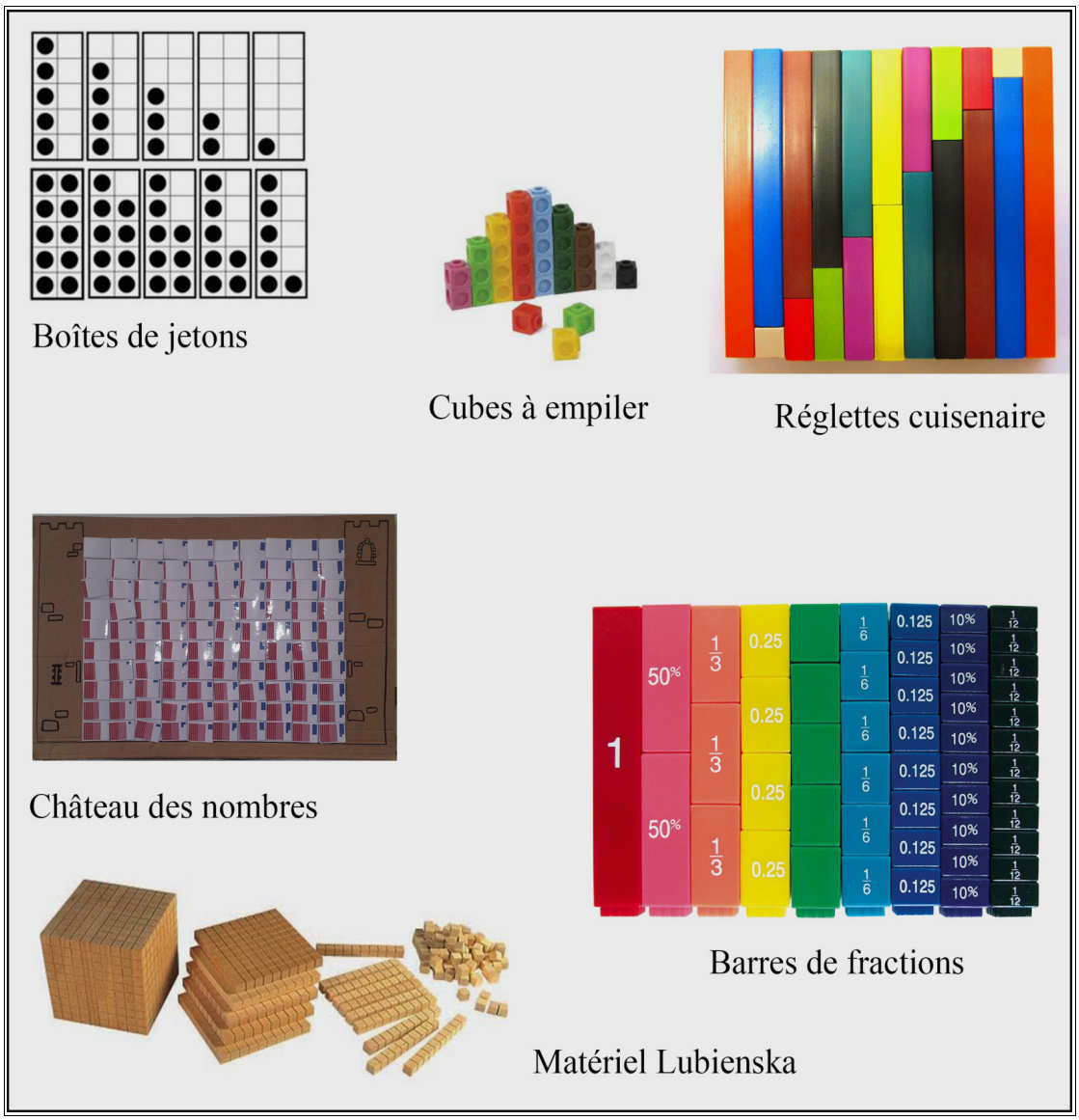


Exemple de déroulement :

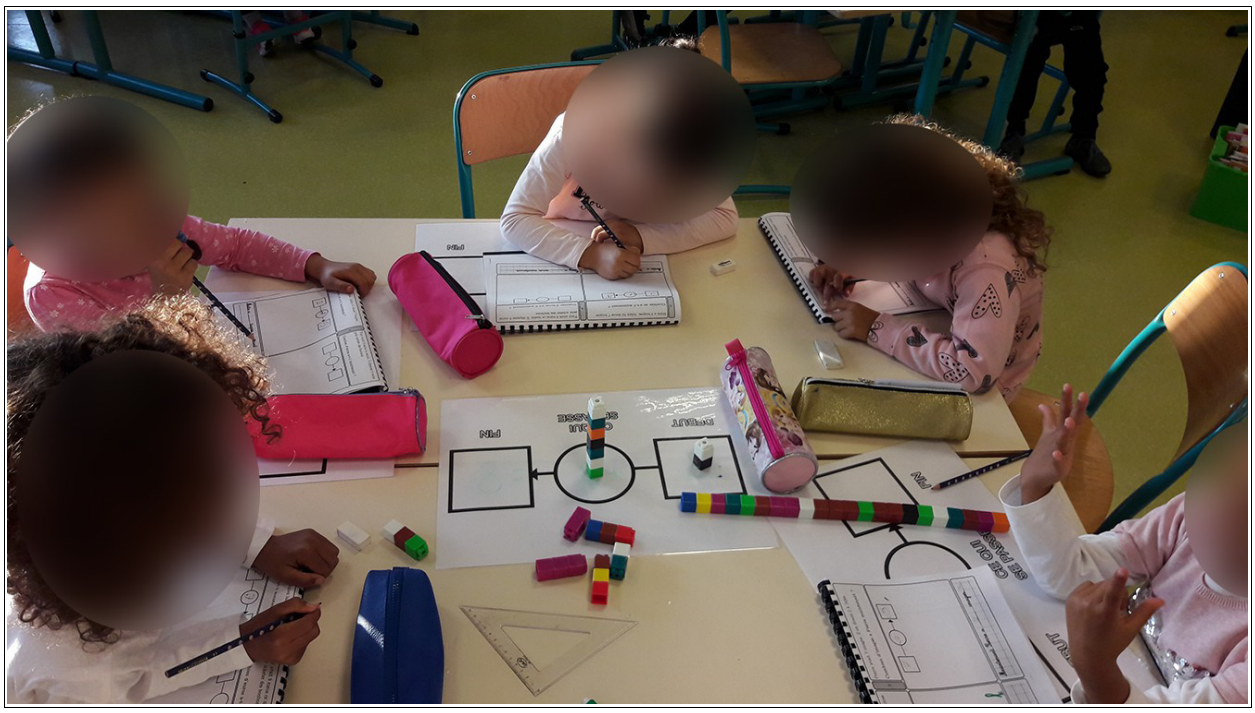
Manipulation : Une histoire est racontée par le maître. Cette histoire va être manipulable via des cubes, billes, du matériel divers. Manipulable à la fois physiquement et mentalement pour parler « sur ». C'est-à-dire parler explicitement de ce que l'on fait en nommant les ensembles et les relations. Cette histoire est très concrète pour les élèves. Elle peut être jouée, racontée, verbalisée par l'élève qui manipule les éléments de l'histoire pour concrétiser le déroulement logique. Entendons le terme « manipulation » comme manipulation mentale de concepts et d'éléments avec une verbalisation des processus (la manipulation est alors très abstraite). Il ne s'agit pas de bouger des éléments en ne manipulant que « physiquement ». Cette phase d'explicitation qui va amener à modéliser met en avant la pratique orale par l'enseignant puis par les élèves.



Matériel utilisable :



Modélisation de l'histoire : émergence d'un schéma sous-jacent qui permet de symboliser sa structure profonde en traversant la structure de surface. Création d'une « image » du problème. Les données passent à ce moment au stade chiffre/ nombre/ symbole. Les données sont implémentées dans le schéma qui, par sa lecture, redonne le sens logique de l'histoire, son déroulement et les opérations associées. La manipulation est toujours possible sur ou dans le modèle. C'est ce que nous appelons avec nos élèves raconter une histoire mathématique. Le schéma est le support logique de l'histoire. Les chiffres et symboles ne sont que la représentation abstraite des données concrètes présentes dans l'histoire.



Abstraction : c'est le processus final qui est visé sur le projet. Ce processus est long à être intégré. Il est également plus ou moins long selon les élèves. Le travail de modélisation continue et d'entraînement sur différents types de problèmes au cours de la scolarité va amener l'élève à construire une image mentale structurée et logique des problèmes et situations mathématiques rencontrées. L'élève va ainsi constituer une banque de données et d'habiletés cognitives. Le schéma sous-jacent qui a émergé auparavant va alors devenir un schéma mental structurant qui agira en tache de fond pour aider à la mise en équation du problème. À terme, la démarche de résolution paraît « évidente » à l'élève grâce aux automatismes qui se sont lentement mis en place.

Une définition en Anglais tirée du site : Strategies for Teaching Elementary Mathematics[1]

What is the Concrete-Representational-Abstract (CRA) Instructional Approach ?

The CRA Instructional Approach is "an intervention for mathematics instruction that research suggests can enhance the mathematics performance of students." (Hauser) The Approach is a "three-part instructional strategy, with each part building on the previous instruction to promote student learning and retention and to address conceptual knowledge." (Hauser) The three parts are as follows :

Concrete : *In this stage, the teacher begins instruction by modeling each mathematical concept with concrete materials. In other words, this stage is the "doing" stage, using concrete objects to model problems.*

Representational : *In this stage, the teacher transforms the concrete model into a*

1 https://mathteachingstrategies.wordpress.com/

representational (semi-concrete) level, which may involve drawing pictures ; using circles, dots, and tallies ; or using stamps to imprint pictures for counting. In other words, this is the "seeing" stage, using representations of the objects to model problems.

Abstract : *In this stage, the teacher models the mathematics concept at a symbolic level, using only numbers, notation, and mathematical symbols to represent the number of circles or groups of circles. The teacher uses operation symbols (+, –, x, /) to indicate addition, multiplication, or division. This is the "symbolic" stage, where students are able to use abstract symbols to model problems (Hauser).*

Singapour est célèbre pour ses programmes de mathématiques intégrant cette notion CRA ainsi que l'enseignement explicite (de même que les pays-bas ou la Corée). Dans les évaluations internationales, Singapour survole régulièrement les autres participants par ses scores de réussite dans le domaine mathématique. Sans entrer dans le détail du système scolaire et de la culture est-asiatique, les scores des élèves Singapouriens sont stables et élevés comme le montre les études TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study). Cela démontre la mise en place d'un système efficace (encore une fois nous nous limitons à « efficace pour le domaine mathématique » sans juger l'intégralité du système scolaire et politique en place). TIMSS mesure l'impact des programmes et des méthodes mises en place alors, selon TIMSS, la méthode mise en place à Singapour est très efficace. TIMSS cible les mathématiques et les sciences et mesure les performances dans ces 2 domaines. TIMSS se base sur les programmes et PISA sur les compétences. Cette étude concerne les élèves de 10/11 ans et de 14/15 ans.

Voici l'évolution des résultats pour les élèves de 10/11 ans entre 1995 et 2011

1995 : 1er, 2003 :1er, 2007 :2e, 2011 : 1er

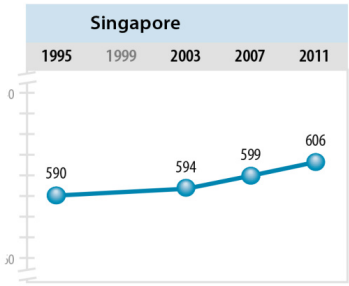
.

Exhibit 1.7: Trends in Mathematics Achievement – 1995 Through 2011*

TIMSS 2011 Mathematics 4th Grade

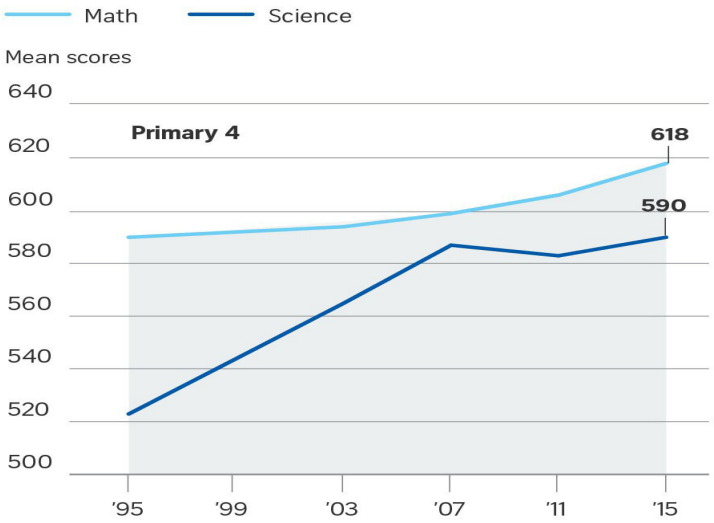
Includes only 2011 participants with comparable long term trend data beginning in 1995, ordered by most to least improvement in average achievement. Exhibit 1.5 provides details including statistical significance.

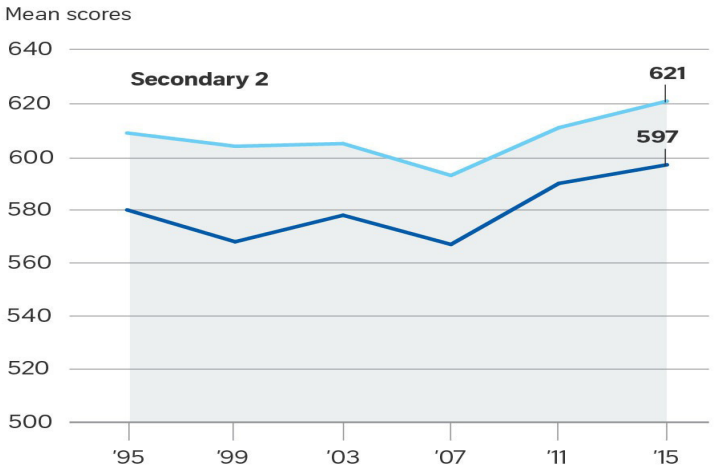
IMSS 2011



TIMSS & PIRLS International Study Center
Lynch School of Education, Boston College

Singapore's results over the years





Top five performers in Timss 2015

Grade 4 Mathematics

Education system	Mean score
Singapore	**618**
Hong Kong	615
South Korea	608
Chinese Taipei	597
Japan	593

Grade 8 Mathematics

Education system	Mean score
Singapore	**621**
South Korea	606
Chinese Taipei	599
Hong Kong	594
Japan	586

6 - 4 La mémoire, l'entraînement

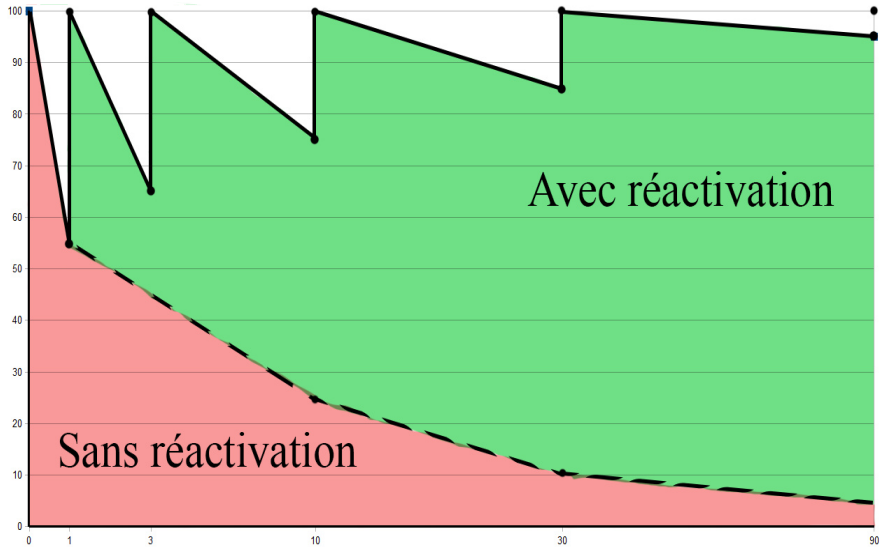
Ce thème est abordé, car le travail de mémorisation et d'entraînement est essentiel pour la rétention de faits mathématiques et leur utilisation au quotidien. Il est primordial d'aider nos élèves à mieux mémoriser et nous devons alors essayer de mettre en place des fonctionnements, des routines, qui favorisent la mise en mémoire et la reprise d'informations déjà étudiées pour consolider les connaissances. Il ne s'agit pas ici de trop développer un domaine qui ne relève pas de l'expertise de l'auteur mais de présenter quelques principes et ouvrages de référence qui peuvent aider les enseignants à organiser leurs progressions.

Afin de garder dans la mémoire à long terme les différentes connaissances et habiletés, il faut prendre conscience que l'entraînement, la répétition, est essentiel. Nous oublions tous, tout le temps, de grandes quantités d'informations. Une réactivation régulière est nécessaire pour « remettre en mémoire » ces informations. Sans réactivations régulières et espacées, une notion étudiée se perd (chaque enseignant a déjà été confronté à des élèves qui semblent remettre à zéro leur mémoire après chaque vacances). Rien n'est donc définitivement acquis avec la mémoire, il faut s'y remettre avec régularité. Ainsi, pour ne pas perdre cette connaissance ou habileté il va falloir aller la rechercher de manière régulière dans sa mémoire pour l'utiliser. Pas simplement l'évoquer, l'utiliser. Faire l'effort de la rechercher pour l'utiliser.

Ainsi, l'entraînement régulier est essentiel pour consolider ses savoirs. L'entraînement va permettre d'être « à l'aise », d'aller « plus vite » mais surtout de réussir une tâche « sans y penser », sans effort apparent. Ce n'est donc pas la quantité de travail qui est mise en avant ici mais la régularité du travail. À volume égal de travail, le fractionnement est beaucoup plus efficace pour affermir la connaissance. Une révision régulière est donc plus efficace pour ancrer un souvenir qu'une grosse et unique révision. Régularité et espacement sont les deux termes à retenir.

Prenons pour exemple la courbe théorique de l'oubli d'Ebbinghaus[1] :

Perte d'informations mémorielles (%) sur un temps donné (90 jours) selon qu'il y ait ou non réactivation mémorielle.



Cette courbe montre le fonctionnement global et théorique de la réactivation d'un souvenir ou sa non activation sur un laps de temps de 1 à 90 jours. Quasiment 50 % de l'information est perdue au bout d'un jour. Cette perte s'accentue pour atteindre environ 90 % de perte au bout de 30 jours si aucune réactivation n'intervient. A contrario, s'il y a activation mémorielle, la perte est moins importante mais surtout, elle est plus lente. Ainsi, à force de réactivation régulière d'une notion, nous l'oublions quantitativement moins et nous la maintenons de plus en plus longtemps en mémoire.

Il faut absolument lire « Make it stick »de Peter C. Brown, Henry L. Roediger III, Mark A. McDaniel. Traduction française disponible. Vous y trouverez énormément d'explications sur le fonctionnement de la mémoire est les implications possibles dans les pratiques de classe.

1Philosophe allemand souvent considéré comme le père de la psychologie expérimentale de l'apprentissage

Résumons :

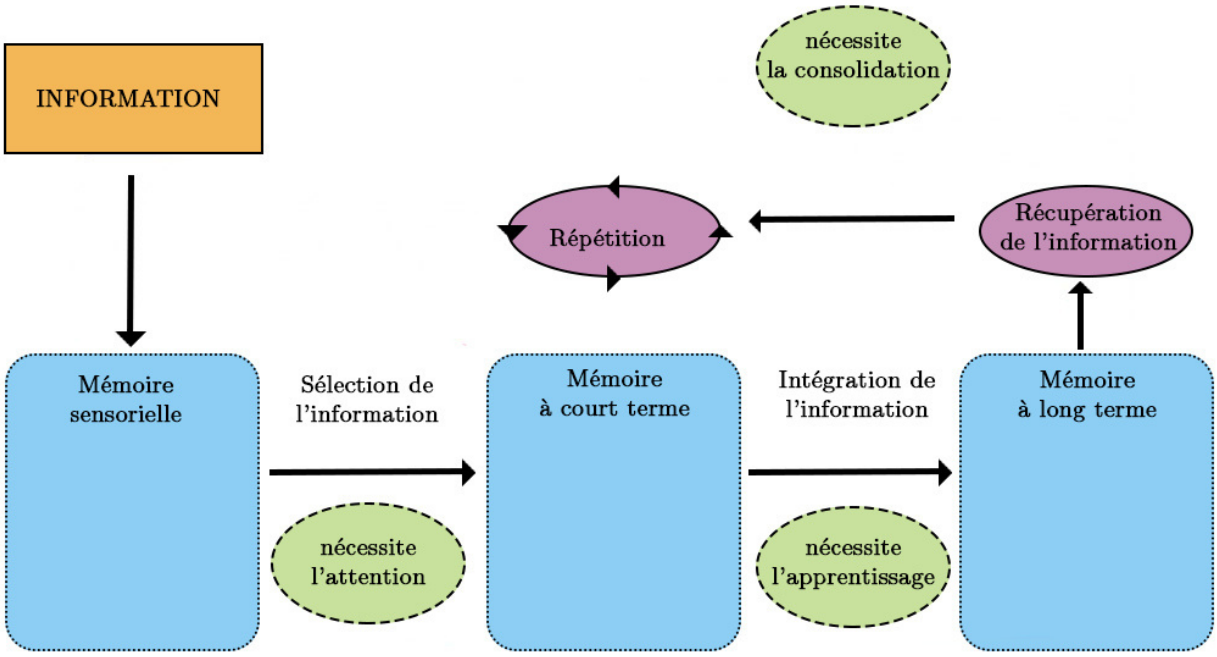
- Plus nous nous entraînons moins nous utilisons notre mémoire de travail qui se libère.
- Plus nous nous entraînons plus nous pouvons approfondir nos connaissances.
- Plus nous nous entraînons plus nous nous souvenons.

La courbe d'**Ebbinghaus** est théorique et les pourcentages ne reflètent pas quantitativement la réalité. Elle a le mérite d'expliquer simplement un principe. Néanmoins, des études robustes existent qui valident sa représentation. La pente d'oubli sera donc différente mais la structure de la courbe ne change pas. Voir par exemple l'étude de **H.P Barhick et L. K. Hall**[1] qui montre que le temps passé à étudier un sujet est un facteur déterminant même 50 ans après l'étude du sujet en question.

Ce principe est donc essentiel pour la connaissance de faits mathématiques :

Les compléments à 10. Les compléments à 20. Les tables d'addition. Les tables de multiplication. Il faut donc se confronter régulièrement à ces faits et s'évaluer par la même occasion. Ce qui implique donc d'apprendre, d'utiliser dans différents contextes, de s'évaluer et de mesurer ses progrès pour améliorer, corriger, maintenir ses connaissances et habiletés. Sans mettre de côté tout le travail systématique sur la compréhension de ces notions ! La fréquence de confrontation avec évaluation permet de réaliser une courbe de progrès qui matérialise jours après jours les avancées des élèves. C'est à la fois un guide pour eux (ils voient l'effet de leur travail, ils voient leurs progrès, ils voient les objectifs qu'ils se fixent) et pour l'enseignant qui voit clairement chaque jour où en sont ses élèves. Cette approche est utilisée pour le calcul mental dans l'école via des générateurs de calculs que les enseignants peuvent calibrer et via une feuille de saisie qui aide à l'analyse des progressions des élèves.

1 https://www.researchgate.net/publication/232547229_Bahrick_HP_Hall_LK_Lifetime_maintenance_of_high_school_mathematics_content



Ce schéma est une représentation simplifiée du passage de l'information vers la mémoire à long terme. Pour ancrer un savoir, qui est une information reçu par plusieurs canaux sensoriels, il faut de l'attention pour cibler l'information. Il faut également un apprentissage pour intégrer l'information et la transférer dans la mémoire à long terme. L'ancrage dans la mémoire à long terme nécessite la récupération de cette information pour la consolider à force de répétitions.

7 - 1 Grammaire, démarches et stratégies

Pourquoi ce terme de grammaire ?

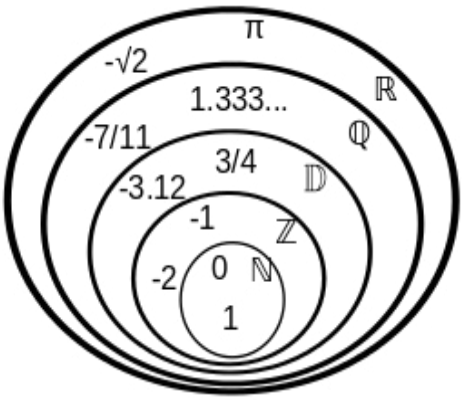
La grammaire est l'étude des éléments constitutifs d'une langue. Elle permet de comprendre un langage dont les éléments sont ordonnés entre eux. La grammaire étudie donc de manière systématique les éléments constitutifs d'un langage et les liens entre ceux-ci qui caractérisent le système d'une langue.

Ce que nous tentons de faire en transcrivant un énoncé en schéma puis en équation est une « grammaire mathématique » qui a pour but de traduire un langage en un autre langage. Pour cela, il faut établir des codes pour les éléments constitutifs de ce nouveau langage. Le schéma est l'établissement des relations structurées entre des éléments déterminés dans le but de décrire une situation mathématique.

Dans nos fichiers nous utilisons des schémas qui ont pour objectif de traduire le plus exactement possible la situation énoncée en expression mathématique. Les élèves apprennent ce codage afin de cibler les informations pertinentes et les relations entre elles. Les élèves apprennent également à construire ce codage afin de pouvoir comprendre et représenter une situation structurée dans un langage mathématique. Afin de voir au-delà de l'habillage sémantique du problème Cette « grammaire » est donc soumise à un codage explicite des éléments et des relations. Ce codage doit donc s'apprendre via une utilisation progressive pour le comprendre et le manipuler comme dans tout langage. Cela se fait par le guidage de l'enseignant.

Dans le tableau suivant nous montrons le codage utilisé pour représenter les éléments et les liens qui les unissent. Ce codage permet la création de schémas simples ou complexes pouvant retranscrire les situations rencontrées en exprimant explicitement tous les constituants du problème comme une phrase ou un texte vont retranscrire des informations explicites.

Rappel sur les ensembles des nombres :



ℕ désigne l'ensemble des nombres naturels
ℤ désigne l'ensemble des nombres entiers
𝔻 désigne l'ensemble des nombres décimaux
ℚ désigne l'ensemble des nombres rationnels
ℝ désigne l'ensemble des nombres réels

Codage des éléments et des relations :

Nature	Symbole	Description
$\mathbb{N}$	□	Une quantité. Un état. Une mesure.
$\mathbb{Z}$	○	L'expression de la transformation. L'expression de la relation.
	→	La transformation d'un élément vers un autre.
	⇅	La comparaison / la relation entre des éléments.
	<	La composition d'éléments.

Parmi ces éléments, il est nécessaire de revenir plus précisément sur le codage des états et des transformations. Ces éléments retranscrivent des situations caractérisées par un lexique. Nous allons nous attacher à préciser ce lexique particulier.

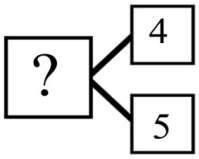
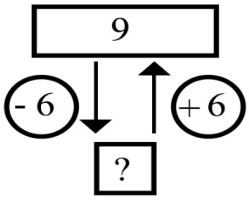
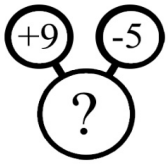
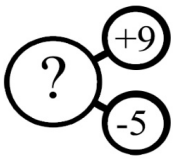
Nature	Définition
$\mathbb{N}$	Les entiers naturels (0, 1, 2, 3, 4)
$\mathbb{Z}$	Les entiers relatifs (-2 ;-1 ; 0 ; +1 ; +2)

Symbole	Description	Lexique
□	Une quantité. Un état. Une mesure.	**<u>Les verbes qui signifient un état, une possession, un fait :</u>** **Verbe avoir :** J'ai, il a, il y a, etc. **Verbe posséder :** Je possède, etc. **Verbe mesurer :** Je mesure… cm, etc. **Verbe être :** Mon âge est…, Ma taille est…etc Le plus petit, le plus grand, le plus…, le moins…
		<u>Les mots qui déterminent un état temporel :</u> Avant, jadis, au début, autrefois, ce matin, auparavant, il y a… ans, il y a… années, hier, après, plus tard, ensuite, puis, ultérieurement, après coups, à la suite, derrière, maintenant, cet après-midi, ce soir, actuellement, dorénavant, désormais, aujourd'hui, demain.
		<u>Les mots qui déterminent le tout ou la partie d'un tout :</u> Le total, la totalité, globalement, en tout, une partie, parmi, dont, entier, chaque, plein, un morceau.

Symbole	Description	Lexique
○	L'expression de la transformation. L'expression de la relation.	**<u>Les verbes conjugués qui signifient une action par rapport à l'objet étudié :</u>** additionner, ajouter, rajouter, gagner, donner, mettre, recevoir, soustraire, enlever, retirer, ôter, perdre, prendre, acheter, vendre, baisser, augmenter, multiplier, diviser.
		<u>Les mots exprimant la relation entre les éléments :</u> de plus que, plus que, de moins que, moins que, en plus, en moins, fois plus, fois moins.

Ainsi, en exploitant totalement le codage proposé, il est possible de parvenir aux 6 catégories de problèmes additifs. Nous faisons le choix de n'en étudier de manière systématique que quatre parmi cet ensemble. Les deux catégories supplémentaires représentent des problèmes extrêmement rares qui peuvent néanmoins être abordés et modélisés.

Les deux catégories supplémentaires ont une représentation schématique extrêmement proche et nécessitent une plus grande finesse de compréhension à cause des éléments qui les caractérisent (liens entre des relations donc imbrications de valeurs relatives à des états implicites). De plus, par la proximité de la représentation, il est possible de les confondre avec une des catégories déjà existante.

Représentation schématique	Catégorie	Exemple
	**Compositions d'états**	Jean a 4 billes vertes et 5 billes rouges. **Combien de billes a-t-il en tout ?**
	**Comparaisons d'états**	Jean a 9 billes et Tom en a 6 de moins. **Combien de billes a Tom ?**
	Transformations d'état	Jean avait 9 billes. Il gagne 5 billes. **Combien de billes a-t-il maintenant ?**
	**Composition de transformations**	Jean a gagné 9 billes hier et perdu 5 billes aujourd'hui. **Combien a-t-il gagné ou perdu en tout ?**
	Transformations de relations	Jean devait 9 billes à Tom. Il en rend 5 à Tom. **Combien doit-il encore de billes a Tom ?**
	**Compositions de relations**	Jean doit 9 billes à Tom. Tom doit aussi 5 billes à Jean. **Combien Jean doit-il réellement de billes ?**

Dans le carré ci-dessous se trouve le lexique type des états. Il y a des redondances, peut-être des manques, mais il permet de créer avec les élèves une banque de mots « indices » afin de caractériser cet élément.

J'ai, il a, il y a, Je possède, Je mesure … cm, Mon âge est..., Ma taille est..., Le plus petit, le plus grand, le plus..., le moins..., Avant, jadis, au début, autrefois, ce matin, auparavant, il y a … ans, il y a … années, hier, après, plus tard, ensuite, puis, ultérieurement, après coups, à la suite, derrière, maintenant, cet après-midi, ce soir, actuellement, dorénavant, désormais, aujourd'hui, demain, Le total, la totalité, globalement, en tout, une partie, parmi, dont, entier, chaque, plein, un morceau. J'ai, il a, il y a, Je possède, Je mesure … cm, Mon âge est..., Ma taille est..., Le plus petit, le plus grand, le plus..., le moins..., Avant, jadis, au début, autrefois, ce matin, auparavant, il y a … ans, il y a … années, hier, après, plus tard, ensuite, puis, ultérieurement, après coups, à la suite, derrière, maintenant, cet après-midi.

Dans le cercle ci-dessous se trouve le lexique type des transformations et relations. Il y a des redondances, peut-être des manques, mais il permet de créer avec les élèves une banque de mots « indices » afin de caractériser cet élément.

Additionner, ajouter, rajouter, gagner, donner, mettre, recevoir, soustraire, enlever, retirer, ôter, perdre, prendre, acheter, vendre, baisser, augmenter, multiplier, diviser, de plus que, de moins que, en plus, en moins, fois plus, fois moins, additionner, ajouter, rajouter, gagner, donner, mettre, recevoir, soustraire, enlever, retirer, ôter, perdre, prendre, acheter, vendre, baisser, augmenter, multiplier, diviser, de plus que, de moins que, en plus, en moins, fois plus, fois moins, additionner, ajouter, rajouter, gagner, donner, mettre, recevoir, soustraire, enlever, retirer, ôter, perdre, prendre, acheter, vendre, baisser, augmenter, multiplier, diviser, de plus que, de moins que, enplus.

7 – 2- 1 Rôle de l'enseignant, rôle de l'élève dans la démarche d'apprentissage des stratégies de résolution de problèmes.

La résolution de problème implique, dans notre projet, que l'enseignant et l'élève aient des rôles clairs pour aborder, approfondir et consolider les apprentissages. La part de chacun est donc variable selon le degré d'expertise de l'élève et selon l'activité proposée. Nos gardons toujours à l'esprit que l'élève est un novice et l'enseignant est expert et que le fonctionnement de l'expert et du novice est différent. Plus le gain en expertise est élevé moins il est nécessaire de guider et montrer et plus l'expertise est faible plus il est nécessaire de modéliser et montrer explicitement. L'enseignant et l'élève vont donc évoluer entre ces deux extrêmes avec des propositions de guidage plus ou moins fort selon le niveau de maîtrise.

Afin d'amener les élèves à un haut degré de compréhension du domaine et de réussite dans celui-ci nous proposons d'articuler les différentes phases selon la progression ci-après. Cette progression peut être abordée au niveau de la séance, comme une proposition de déroulé pour aborder une notion ou sur une durée plus longue. Le travail des élèves via nos supports s'intègre dans cette progression mais dans une dimension annuelle et pluriannuelle.

Cette proposition, qui va reprendre les grandes étapes de la Pédagogie Explicite, correspond aux observations menées auprès de nos élèves depuis plusieurs années sur tous les cycles. L'expérience sur le long terme (empirique, au niveau d'une école de 460 élèves par an sur 5 ans) nous laisse à penser que cette approche est hautement efficace pour enseigner les stratégies de résolution, aider les élèves à utiliser ces stratégies, à mémoriser des faits et procédures et à gagner en autonomie pour résoudre des problèmes de plus en plus complexes.

Ce déroulé est entièrement corroboré par le document suivant (en anglais) qui traite de l'apprentissage des stratégies méta-cognitives chez l'élève et leur enseignement :

Métacognition and self regulated learning[1]

Notre document de travail est donc une traduction du document original dont nous partageons par expérience les conclusions quant aux étapes essentielles. L'objectif est de donner un ordre d'idée quant à la part de chacun à chaque étape, le but n'est pas de mesurer et mettre des bornes. La régulation, souple, s'installe avec l'expérience et permet de mieux articuler les phases d'activité. L'idée est de dire « Voilà comment nous nous organisons selon les étapes de nos pratiques ».

1 https://educationendowmentfoundation.org.uk/tools/guidance-reports/metacognition-and-self-regulated-learning/

Enseigner des stratégies efficaces pour la résolution de problèmes arithmétiques

Les déroulé ci-dessous reprend les grandes phases de la Pédagogie Explicite en les incluant dans une démarche progressive et structurée pour enseigner une méthodologie de résolution des problèmes arithmétiques. Ce déroulé est une proposition guidante pour les séances journalières et pour une progression annuelle. Nos fichiers vont donc naturellement s'inclure dans les points IV à VII.

I	Vérification, activation et reprise des **connaissances préalables.** Chercher et questionner sa mémoire.	
II	**Enseigner explicitement les stratégies** pour résoudre, étape par étape. Rendre «visible» l'activité.	
III	**Montrer** comment résoudre en situation en faisant et en explicitant les processus successifs.	
IV	**Mémoriser les stratégies** enseignées par un questionnement permanent et la discussion.	Enseignant / Elève
V	**Pratique guidée** par l'enseignant. Seul ou en coopération avec des rétroactions nombreuses.	
VI	**Pratique autonome** de l'élève qui vise l'automatisation des stratégies.	
VII	**Objectivation:** Structurer ses connaissances et les questionner pour les expliquer avec ses mots.	

I Vérification des connaissances préalables :

En début d'année, et autant que possible pour démarrer les séances, l'enseignant mobilise activement les élèves pour faire émerger toutes les connaissances (et procédures) de ceux-ci et qui vont être utilisées dans l'activité à venir. La « part enseignante » importante ne signifie pas qu'il est en position magistro-centrée descendante. L'enseignant mène le début de séance en interrogeant les élèves, en animant les échanges pour rendre explicite tous les attendus du travail, Il clarifie, présente et fait reformuler, rendant visible tout ce que les élèves connaissent et qui leur sera nécessaire. L'enseignant est central, car il est le tisseur régulateur entre les élèves mais ceux-ci alimente les échanges.

II Enseigner explicitement les stratégies :

À partir des connaissance et compétences nécessaires pour l'activité, l'enseignant présente les procédures qu'il va utiliser et qu'il va enseigner. Pour la résolution de problèmes, il peut s'agir de présenter aux élèves comment catégoriser un problème à partir des connaissances préalables. Encore une fois, l'enseignant questionne activement les élèves afin de montrer les liens entre les procédures qui vont être utilisées et les connaissances des élèves. Quand il présente une démarche, il convient de toujours questionner les élèves sur les connaissances nécessaires, ils sont mentalement actifs car sollicités. Si l'enseignant indique qu'il va falloir rechercher un verbe, le questionnement vers les élèves portera sur la reconnaissance de celui-ci ou son rôle afin de faire des rappels. Bien sur, cette démarche peut paraître évidente, mais il s'agit simplement de veiller à ne rien laisser de côté, d'éviter les malentendus avec les élèves. L'enseignant indique donc ici comment il va faire et ce qui lui sera nécessaire pour le faire.

III Montrer comment résoudre et IV mémoriser les stratégies :

L'enseignant réalise l'activité qui sera proposée aux élèves en explicitant systématiquement ses procédures. Il oralise tout ce qu'il fait en résolvant. Il fait ce qu'il dit et il dit ce qu'il fait. L'enseignant questionne aussi les élèves aux étapes clefs de son activité. Il réalise plusieurs fois l'activité en engageant les élèves à chaque fois. Il fait réémerger toutes les connaissances et compétences nécessaires. D'une explicitation de l'enseignant on passe alors à une explicitation des élèves sur ce qu'il convient de faire et comment le faire. L'enseignant corrige, précise, refait, fait reverbaliser jusqu'à s'assurer de la compréhension maximale des élèves.

V La pratique guidée :

Les élèves réalisent l'activité (il peut s'agir du travail sur les fichiers ou d'un travail coopératif) tandis que l'enseignant est avec eux pour apporter un étayage, une

explicitation, une correction, une rétro-action. Il circule entre les élèves, questionne, apporte une correction rapide, valide les procédures et encourage les élèves. L'enseignant peut aussi réaliser l'activité des élèves, avec les mêmes supports, pour offrir un modèle possible, modèle qui sert de rappel mémoriel des procédures et de référence pour les élèves qui en ont besoin. Le guidage de l'enseignant est donc progressivement réduit à mesure que les élèves montrent leur capacité à réussir en autonomie. À mesure que les élèves gagnent en autonomie et en réussite, l'enseignant peut accorder un temps de plus en plus important aux élèves qui auraient encore besoin d'étayage.

VI La pratique autonome :

Les élèves sont alors dans une phase de perfectionnement et d'automatisation des procédures. C'est une phase d'entraînement qui vise la maîtrise la plus forte possible du domaine d'apprentissage ciblé et son ancrage en mémoire. Exemple : Les élèves de Cm2, lors du travail sur les fichiers sont totalement dans cette phase. Ils ont les connaissances, connaissent les procédures mais s'exercent sur des niveaux de difficulté qui vont croissant. L'enseignant valide et accompagne les élèves qui ont besoin d'un étayage ponctuel. Cette pratique plus autonome (elle ne l'est jamais totalement) peut être une activité coopérative des élèves.

Il faut néanmoins garder à l'esprit que si ce travail de plus en plus autonome est l'objectif visé, cet objectif n'est ne doit pas être confondu avec un moyen d'y parvenir. En simplifiant, travailler de manière autonome n'apprend pas à travailler de manière autonome. Le travail autonome est une finalité visée qui débute par un fort guidage de l'enseignant dont le positionnement va se modifier à mesure que l'élève gagne en expertise à la fois dans ses connaissances que ses compétences. L'autonomie s'apprend, elle ne se décrète pas au risque de laisser l'élève dans une situation dont il n'a pas les clefs pour réussir. L'objectif est de construire réellement l'autonomie de l'élève avec des connaissances et compétences solides.

VII L'objectivation :

L'objectivation est pour nous un bilan, un point d'étape pour analyser son activité, la structurer et l'expliciter. Il s'agit donc également d'une évaluation du travail des élèves, pour les élèves et par les élèves. Cette évaluation se fait également à chaque étape par une vérification de la compréhension des concepts par les élèves, par une vérification des connaissances nécessaires, et part l'analyse des réussites et échecs pour y remédier. L'objectif est d'aider l'élève à cibler ses réussites, ses faiblesses et d'exprimer ses besoins, qu'ils soient en « connaissance » ou « compétences » Le but est d'également de reprendre l'activité pour mettre l'accent sur les éléments qui sont pertinents pour réussir. Il est possible de réaliser un support qui témoigne de l'activité accomplie avec les points de vigilance. L'enseignant s'adapte selon le contexte et les objectifs à long terme qu'il vise.

7 – 2- 2 Enseigner explicitement des stratégies pour préparer la pratique guidée et la pratique autonome.

Nous aborderons ici les différentes étapes qui nous semblent nécessaires pour résoudre un problème arithmétique. Ces étapes prennent en compte la construction / la reconnaissance du schéma pour catégoriser les problèmes. Cette étape est essentielle à nos yeux pour que l'élève montre qu'il comprend la structure du problème (sa « grammaire ») afin qu'il puisse signifier ce qu'il sait, les liens entre les éléments qu'il connaît et ce qu'il cherche. Cette étape de catégorisation est un support pour la pratique langagière d'explicitation. Cela peut se faire en accompagnant l'élève par le questionnement, en groupe classe lors d'une phase de résolution commune et guidée ou encore par l'enseignant pour expliciter ses stratégies. Cette structure permet d'établir une stratégie de résolution selon l'équation qui se met en place.

L'explicitation de la démarche de résolution est un point à ne jamais négliger. L'élève doit être amené à justifier ses choix, à expliciter sa démarche. Cela est nécessaire pour structurer sa pensée, ordonner des informations, apprendre à expliquer aux autres pour, si l'occasion se présente, développer le tutorat et la coopération.

Cette démarche vise à apprendre, petit à petit, à formaliser des raisonnements de plus en plus complexes. Nous pensons que nos élèves y gagnent pour la poursuite de leur parcours scolaire.

1) Lecture et compréhension :

Quand l'élève est lecteur : Lire l'énoncé ainsi que la question plusieurs fois pour s'en faire une image mentale cohérente et essayer de comprendre les termes du problème (travail sur le lexique spécifique et non spécifique), puis pouvoir verbaliser à l'enseignant ce dont parle l'énoncé et ce que pose la question. L'élève doit donc lire, chercher des indices lexicaux pour comprendre, se représenter l'énoncé et peut ensuite expliciter la situation. Cela doit donc faire l'objet d'une étude explicite et régulière afin que l'élève apprenne à reformuler, détailler et expliquer aux autres.

L'élève est donc en capacité de « dire » le problème. Dire le problème c'est être capable d'énoncer les éléments de celui-ci et les relations entre les éléments puis de verbaliser ce qu'il va chercher. Par exemple, l'élève doit être amené petit à petit à expliquer de quoi parle le problème ; *« Dans ce problème il y des grenouilles, il y a 8 grenouilles. Il est écrit que 5 grenouilles partent donc ça veut dire que je vais enlever 5 grenouilles aux 8 du départ, c'est une soustraction. Je vais chercher combien de grenouilles il me reste à la fin. »*

Ce travail de lecture / compréhension / explicitation est mené à tous les niveaux. Un élève de CM1 doit lui aussi être amené à expliquer que, par exemple, s'il connaît

l'altitude de l'Everest et celle du Mont Blanc, il va chercher la différence d'altitude entre les deux. La recherche de cette différence implique une soustraction donc il va soustraire l'altitude du Mont Blanc de celle de l'Everest pour déterminer la différence entre les deux montagnes.

Cette capacité à expliquer s'apprend et se travaille sur le long terme. Pour aider l'élève à gagner en précision et en structuration il convient de lui montrer comment le faire (proposer un modèle d'explicitation, lui montrer les stratégies), de l'accompagner quand il le fait (la pratique guidée) et enfin de lui proposer des situations riches et multiples qui nécessitent cette explicitation afin qu'il puisse automatiser ces procédures.

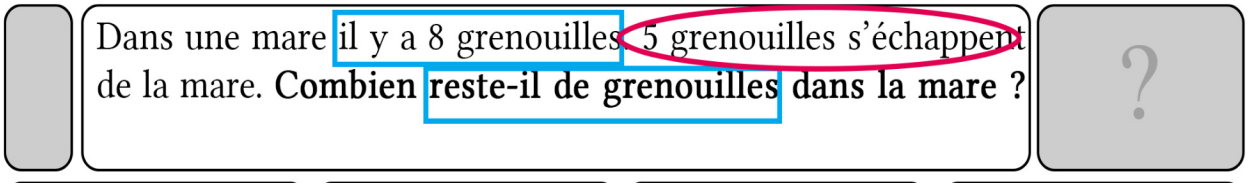
Quand l'élève est non-lecteur : Ce qui est le cas fréquent au début du CP et qui ne nous empêche pas de pratiquer la résolution de problèmes dès la première période avec des supports riches et une activité de langage exigeante. Ce travail débute au CP avec comme objectif une acquisition rapide de la lecture. La résolution de problèmes débutera par une première phase orale jusqu'à autonomie de l'élève face aux énoncés. L'enseignant est, au départ, celui qui lit mais l'élève va reformuler, expliquer, verbaliser l'histoire mathématique. L'élève va aussi raconter à son tour des « histoires mathématiques » en manipulant sur un support afin de s'entraîner à dire aux autres avec de plus en plus de précision. Cela peut faire l'objet d'un atelier dirigé au CP (Atelier que mène l'auteur régulièrement).

Un schéma au tableau ou sur feuille A3 va pouvoir servir de support d'explicitation pour « jouer » le problème, pour « manipuler » les quantités et « verbaliser » les relations et les procédures.

Pour un élève lecteur : s'entraîner à **encadrer** en bleu les **états** et **entourer** en **rouge** les actions et les relations. Il s'agit ici d'utiliser la grammaire pour structurer les éléments du problème.

Exemples : *« Je sais combien j'ai en tout et ce qu'il y a dans la poche gauche. On cherche combien il y a de billes dans la poche droite. » « Je connais le début de l'histoire et ce qui se passe, je vais chercher la fin ». « Je connais le prix d'un yaourt et je cherche le prix de 12 yaourts donc je dois multiplier le prix unitaire par 12 ». « Si je partage mes bonbons entre 4 enfants, je vais donc diviser en 4 parts égales pour trouver le nombre de bonbons d'un seul enfant. »*

Étape 1 : Lecture et prise d'indices.



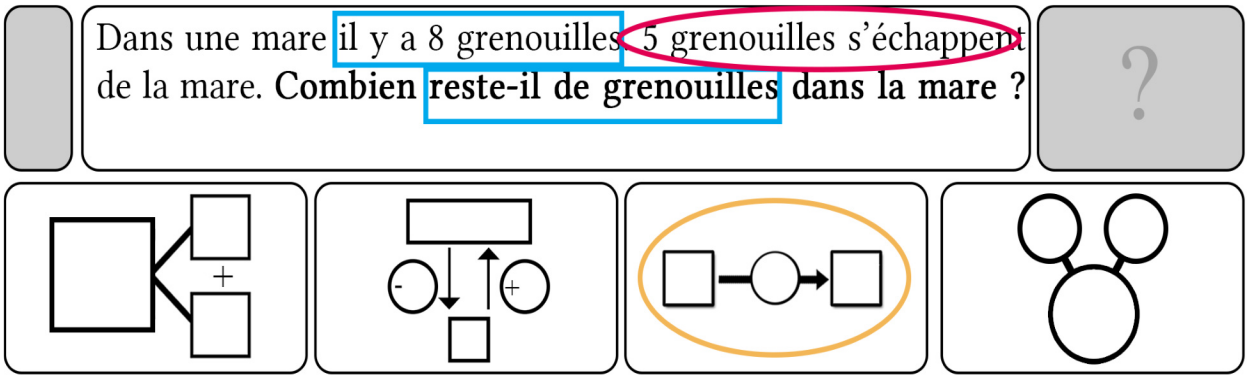
2) Reconnaître la structure du problème.

Pour cela il faut souligner, surligner, encadrer, entourer les indices textuels afin de faire émerger la structure sous-jacente. Il est aussi possible d'utiliser le codage (□ et ◯) de manière à rendre visible les éléments. Le but est de faire émerger parmi plusieurs propositions le schéma type / la catégorie du problème ou de réaliser la représentation type du problème comme étape du raisonnement. La recherche du schéma type n'est pas l'objectif, final c'est un produit dérivé de la traduction de l'énoncé car c'est le fait de traduire cet énoncé par le codage qui ferra apparaître la structure profonde (le schéma) et donc la catégorie du problème. La compréhension du problème fait apparaître sa catégorie et donc enclenche les stratégies de résolution adaptées.

Exemple : *« J'ai un tout et je connais une partie, c'est donc une composition. Je peux dessiner le schéma ou organiser les éléments entre eux. »* Les éléments constitutifs sont des cadres qui s'agencent de manière à recréer le schéma type.

La construction d'un modèle s'apprend et fait l'objet d'un travail ponctuel. L'enseignant réalise de nombreuses modélisations devant les élèves, avec les élèves, en étayant les élèves, en validant le travail des élèves. Ainsi, chaque séance de résolution de problème va faire travailler spécifiquement la catégorisation selon une grammaire établie mais va aussi permettre de faire modéliser des situations par les élèves et les enseignants. Les exemples résolus sont essentiels pour montrer les stratégies, pour transférer ces stratégies, pour se créer une banque de procédures efficaces, une sorte de lexique de résolution. Un atelier tournant sur un temps court peut convenir à cette activité, surtout avec les plus jeunes. Cela peut devenir également un rituel des élèves. L'enseignant modulera l'activité selon les besoins.

Étape 2 : reconnaître la structure (catégoriser).



3) Compléter la structure : Mettre en équation.

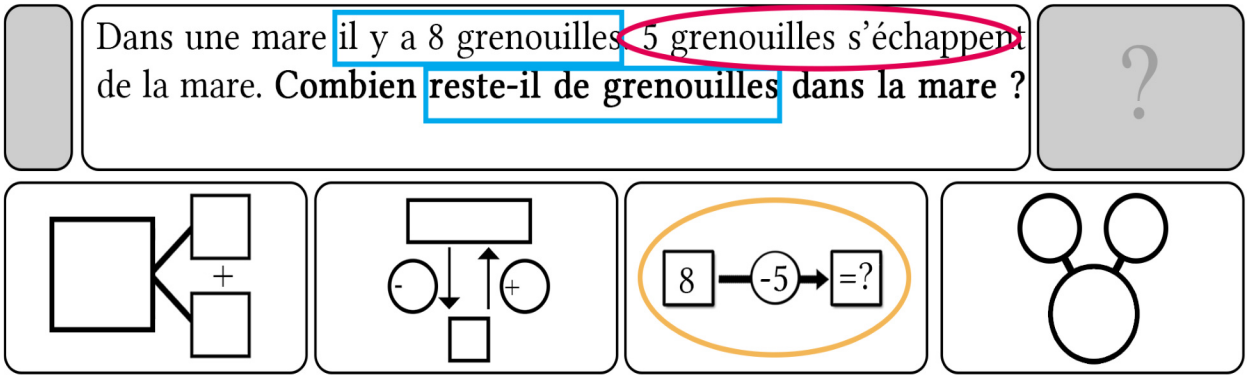
Compléter la structure schématique, c'est indiquer explicitement ce que je sais, ce que je cherche et les liens entre ce qui est connu et inconnu. C'est représenter géométriquement une équation avec une inconnue.

Exemple : *« Je complète mon schéma avec le tout que je connais ainsi qu'avec la partie connue. Je sais que je cherche la partie manquante. »*

Compléter un schéma revient à montrer que, dans une structure que l'on perçoit, l'on sait agencer les éléments pour qu'ils prennent sens. C'est aussi créer un support d'explicitation pour verbaliser les informations essentielles et les relations mathématiques. L'équation établie nous amène alors immédiatement vers une stratégie de résolution qui a pour objectif d'être automatisée. Le schéma est une base d'explicitation, il permet d'indiquer clairement ce que je sais, les relations et ce que je cherche. Cette structuration permet d'éviter les raccourcis du type « je perds, c'est moins », « je gagne c'est plus ». Compléter un schéma, c'est prendre le temps de rendre visible les relations et d'élaborer une procédure, c'est ralentir pour affermir sa réflexion. *« Je perds 3 billes et il me reste 5 billes, combien avais-je de billes avant ? »* Le schéma va rendre visible le *« je perds, c'est moins »* mais il va également, et surtout, rendre visible cette relation par rapport à des éléments connus. Il va rendre visible le fait que l'inconnue se place avant la perte et que la quantité initiale est plus grande.

Cette structuration systématique freine volontairement les premiers instincts (« je veux faire vite ») pour construire un raisonnement. L'entraînement et l'automatisation procédurale va ensuite permettre d'aller vite mais en ayant la garantie que la compréhension est installée fortement chez l'élève. L'utilisation du schéma impose une routine réflexive nécessaire qui plus tard sera de moins en moins nécessaire à mesure que cette routine est automatisée.

Étape 3 : Mettre en équation, structurer par le schéma.



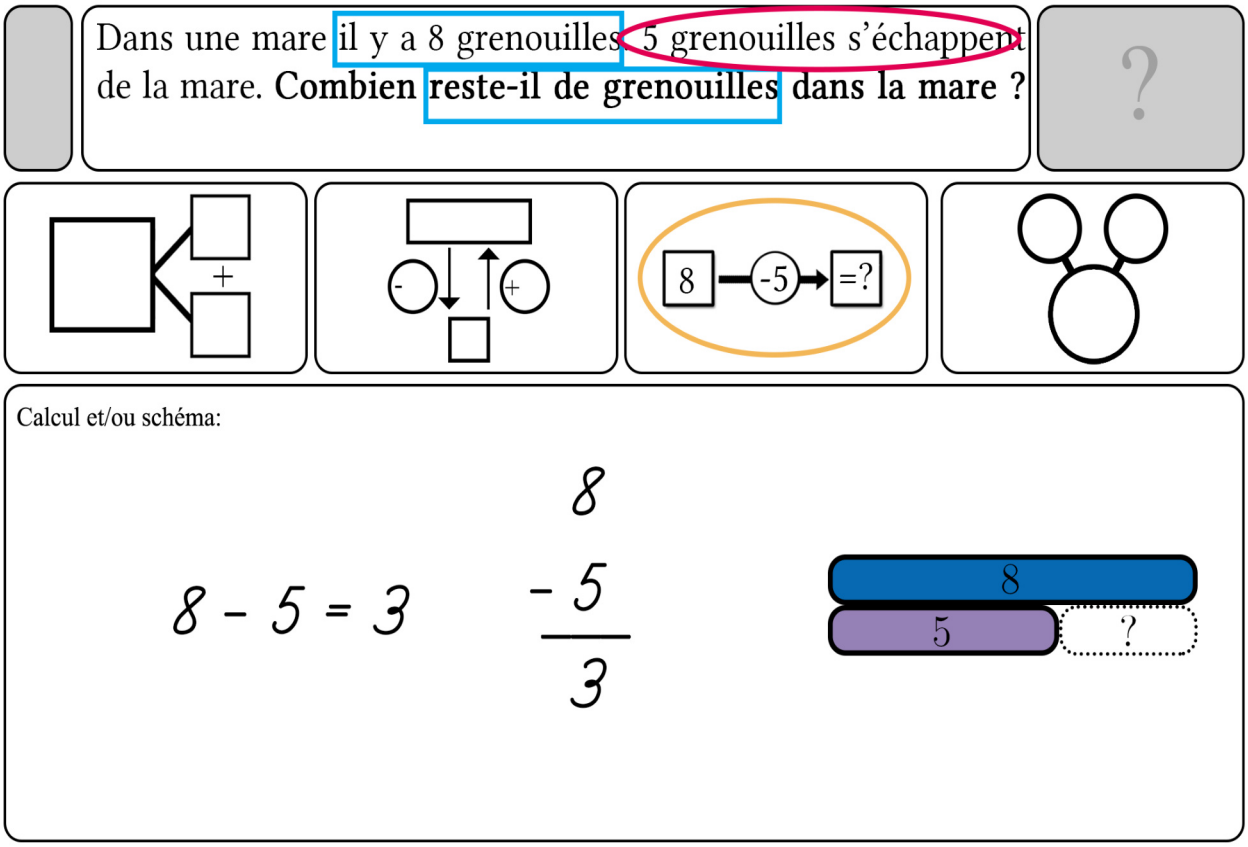
4) Résoudre cette équation.

Avec l'équation posée apparaît une stratégie de résolution par le calcul. Chaque configuration implique une stratégie. Une addition à trou implique une soustraction (dans la mesure ou le résultat serait difficilement atteignable mentalement). Par la même une multiplication à trou implique une division. Avant une perte, la quantité est plus importante donc cette quantité se retrouve par l'addition. Encore une fois, le schéma est une base d'explicitation qui va permettre d'élaborer un raisonnement. C'est le chaînon manquant entre le texte et l'écriture de l'équation. Ce chaînon permet de rendre visible le « pourquoi » des relations et des procédures et il permet également de montrer les stratégies, de les expliquer et de les justifier.

Exemple : Dans le problème donné j'ai un tout et une partie. Les 2 parties formant le tout, je suis en présence d'une addition à trou. Je peux aussi observer que le fait d'ôter une partie laisse l'autre, je suis donc en présence d'une soustraction. (intérêt du modèle qui rend concret les liens addition/soustraction entre les éléments) Le travail sur le parallélisme des calculs (addition / soustraction ; multiplication / division) permet de lier les deux qui ne sont qu'une variation de la même procédure.

Exemple : *« Sur le schéma j'ai une addition à trou donc je pose une soustraction »* ou *« Sur le schéma j'enlève une partie pour garder l'autre donc je pose une soustraction ». » Après ma soustraction je complète mon addition à trou pour vérifier la réciprocité »*

Étape 4 : Résoudre par le calcul



5) Exprimer le résultat, la réponse.

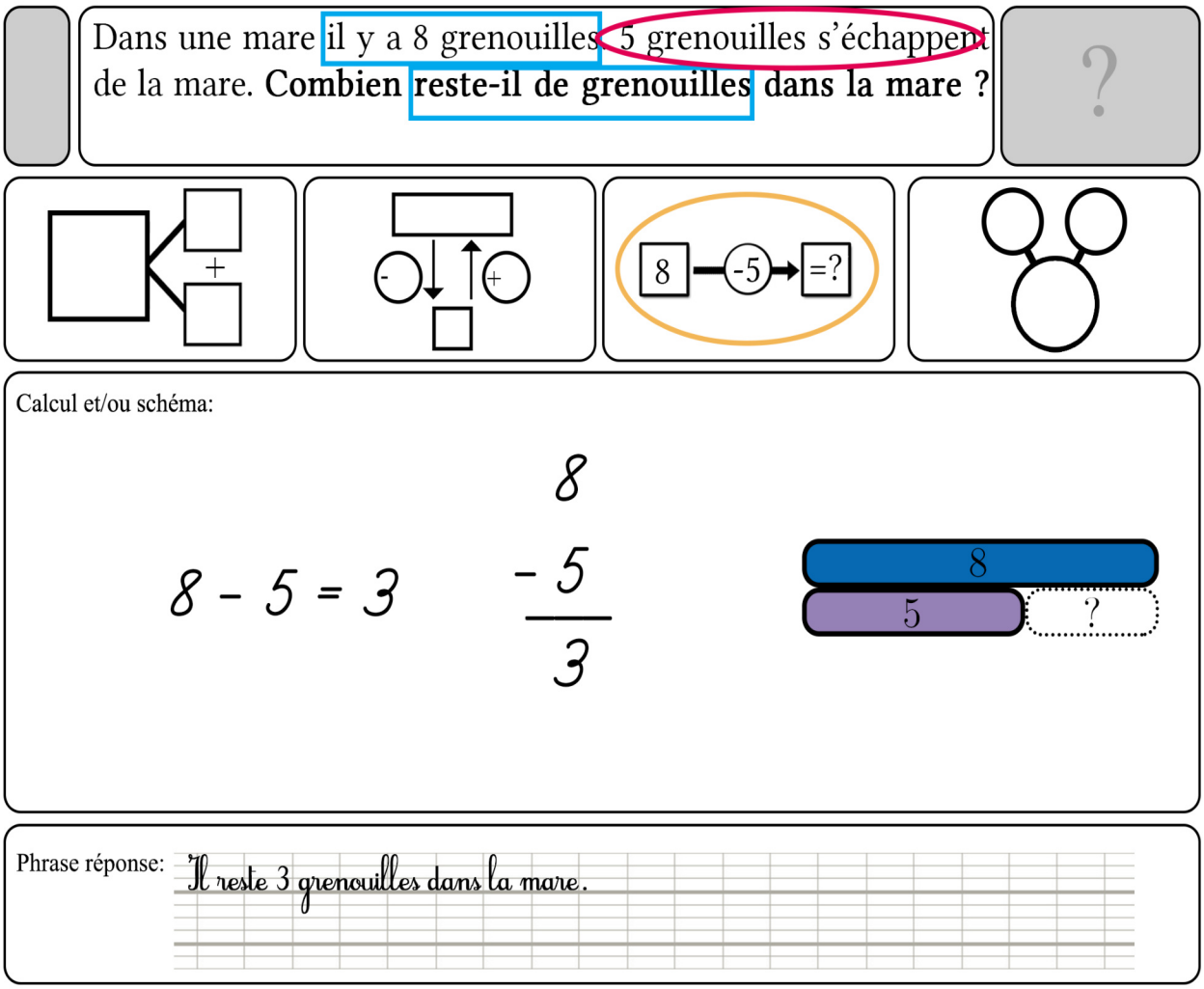
L'équation étant résolue, il convient de transmettre son résultat de manière correcte. La transmission d'un résultat est à la fois orale et écrite. Donner une réponse juste et construire sa réponse en la liant à la question posée fait l'objet d'un apprentissage explicite (progressif, structuré et modélisant) Ainsi, la construction d'une phrase réponse et sa transcription orale fera l'objet d'un travail progressif du CP au CM2. D'une phrase à trou à une phrase simple vers une phrase complexe. La question posée implique des éléments de réponse, des impératifs syntaxiques, une concordance des temps, le genre, le nombre. Il faut y être attentif et encore une fois, cela s'enseigne. Il faut expliciter, montrer, s'entraîner.

La rédaction d'une phrase réponse et sa correction permet à l'enseignant de faire avancer le questionnement orthographique : Ne pas corriger à la place de l'élève (mais faire réaliser la correction) mais le questionner pour qu'il se corrige et l'amener vers une autonomie orthographique plus grande. Dire simplement *« Ce n'est pas une phrase »* peut signifier qu'il manque un point, une majuscule, que la syntaxe est défaillante. Les élèves connaissent les règles élémentaires et nous indiquons juste qu'il faut être vigilant avec quelques mots clefs pour la correction. Pour la correction nous faisons le choix de dire sans trop en dire, nous utilisons des mots clefs :

- « Est-ce une phrase ? »
- « Les accords »
- « Le genre »
- « Les unités » (variable : Des chips ?, des framboises ?, des chaussettes ?)

L'élève va effectuer la correction nécessaire pour faire valider sa réponse. Est-ce efficace ? Après plusieurs années d'observation de cette pratique : Oui, indéniablement. Nous ne faisons pas disparaître toutes les erreurs, il y aura toujours ponctuellement des erreurs, mais elles sont bien plus rares.

Étape 5 : Répondre à la question initiale.



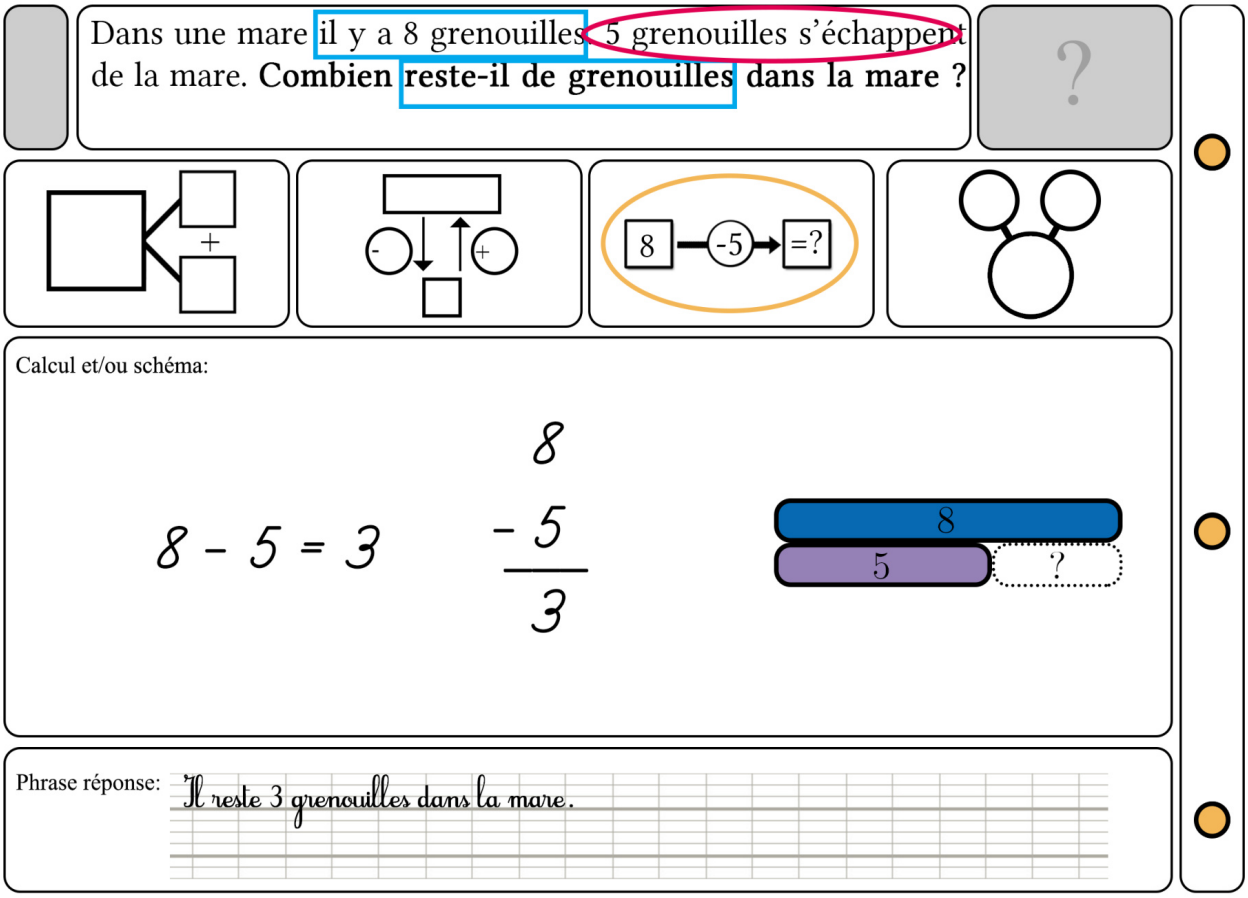
6) Expliciter sa démarche :

La verbalisation des stratégies de résolution est essentiel. Reprenons la citation de Boileau « *Ce que l'on conçoit bien s'énonce clairement, Et les mots pour le dire arrivent aisément.* ». Un calcul juste avec un schéma juste et structuré, ainsi qu'une phrase réponse correcte ne saurait être une fin en soi. Il faut prendre le temps (même s'il est rare) de questionner les élèves dès que possible. Il faut en quelque sorte forcer l'explicitation par l'élève, qu'il dise le *« comment »*, le *« pourquoi »* pour agir avec une pleine conscience de sa propre réflexion, mais il faut donc également lui enseigner comment le faire, comment se questionner, comment se réguler, lui enseigner comment structurer une réponse.

Exemple : *« Explique-moi le problème. Qu'est-ce qu'on sait ? Qu'est-ce que tu cherches ? Explique-moi ton schéma. Pourquoi ce calcul ? Etc. »*

Un élève qui explicite clairement son raisonnement sera d'autant plus capable de coopérer efficacement avec ses pairs pour les étayer si nécessaire. La pratique du tutorat ne saurait être efficace qu'avec un tuteur montrant une réelle maîtrise, il faut donc amener tous les élèves au plus haut niveau de maîtrise possible afin qu'il puisse coopérer avec plus d'efficience. Durant la validation de son travail, l'élève peut être amené par l'enseignant à verbaliser ce qu'il vient de produire. Il y a double validation, par l'écrit produit par l'élève et par l'oral avec la verbalisation des démarches. L'enseignant valide (ou non) tout en interrogeant l'élève sur ses procédures.

Étape 6 : Expliciter sa démarche.



Pour développer la capacité des élèves à verbaliser les raisonnements pour s'engager dans un tutorat efficace, nous pensons qu'il faut veiller à ne pas négliger les principes suivants et les travailler en continue du CP au CM2 :

– **L'enseignant explique clairement, posément, les étapes de sa (ses) stratégie pour résoudre. C'est une explicitation de ce que l'enseignant, expert, va effectuer physiquement et mentalement. C'est le plan de bataille. Il montre ce qui fonctionne et ce qui ne fonctionne pas, il évite de laisser des implicites et s'assure de la compréhension des élèves très régulièrement.**

– **L'enseignant va rendre les étapes de sa stratégie « visibles et concrètes » en verbalisant lui aussi sa réflexion à mesure qu'il avance dans sa démarche de résolution *« Je vois que…donc je vais… et alors je vais faire ça parce que… et alors je pense à… »*. Le but est de rendre visible le fonctionnement mental qui était caché pour éviter les malentendus de compréhension. Le but est de clarifier cognitivement l'activité pour les élèves.**

– **L'enseignant et l'élève vont reprendre petit à petit ce processus de réflexion oralisée en se confrontant à des problèmes et en s'explicitant l'un l'autre les processus. Lors des bilans, les élèves pourront expliciter la démarche, les processus mentaux utilisés pour résoudre, accompagnés par l'enseignant puis de moins en moins jusqu'à pouvoir le faire de manière autonome. Le tutorat nécessite cette capacité d'explicitation. Nous ne demandons donc pas à l'élève de faire seul après une simple présentation, il faut l'accompagner pour qu'il assimile la démarche. (mémoire et entraînement)**

– **En fonctionnant ainsi, l'enseignant va pouvoir accéder plus fréquemment à la réflexion des élèves. Il va donc pouvoir apporter un « feedback » immédiat pour éviter qu'un élève persiste dans des malentendus ou qu'un élève ancre durablement une difficulté. En aidant l'élève à montrer et expliciter ce qu'il fait et comment il le fait, l'enseignant est plus à même de l'aider, de corriger, de valoriser objectivement. Ce retour sur la pratique de l'élève se fait en deux instants : dans le moment, pour corriger et valider afin d'affermir la compréhension et dans un second temps de manière plus globale et générale avec le groupe pour que les expériences de quelques-uns profitent à tous.**

En plus de ces stratégies qui doivent être enseignées et entraînées, de nombreuses compétences liées à la résolution de problèmes sont mobilisées. Voici une liste de propositions pour mener à bien ce projet.

– Catégoriser ponctuellement des problèmes pour se créer une banque de données, une référence commune. Catégoriser pour ancrer en mémoire les caractéristiques des catégories de problèmes c'est se créer un lexique de référence pour l'étayage. (en plus de la catégorisation dans les fichiers)

– Modéliser / Représenter ponctuellement des situations en respectant la « grammaire ». C'est un entraînement visant à repérer et lier entre eux les éléments du problème pour en établir l'équation. Modéliser pour structurer, structurer pour expliciter. (exemples résolus). On peut également modéliser en ciblant uniquement sur la relation entre les nombres et un modèle en barre suffit alors. C'est l'aspect « relation numérique » qui est alors ciblé et qu'il est également nécessaire de travailler.

– Développer ses compétences en calcul mental par un travail régulier et exigeant qui doit montrer les progrès et encourager à aller plus loin.(évaluation positive et régulière)
Par exemple en créant une courbe de progrès en s'évaluant tous les jours sur les tables. (On ne néglige bien sur pas le travail sur les stratégies calculatoires, et la construction du nombre, qui permettent de gagner en efficience dans ce registre)

– Développer ses compétences en calcul posé pour automatiser toutes les techniques en débutant précocement leur étude dans l'année, pour se donner le temps de maîtriser, mais en liant toujours avec le calcul en ligne et le calcul mental. Aborder une technique opératoire relativement tôt dans l'année permet d'avoir du temps pour que les élèves la maîtrise avant la coupure estivale. Débuter par exemple la soustraction posée en juin, c'est courir le risque de devoir tout reprendre en septembre, car il se peut que beaucoup d'élève n'aient pas automatisé l'algorithme. En débutant plus tôt, il y aura de toute façon une reprise en septembre mais avec un socle de maîtrise beaucoup plus affirmé.

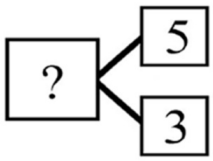
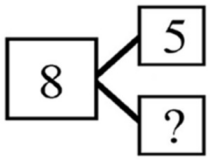
– Aborder en parallèle et non séquentiellement les opérations, addition et soustraction, multiplication et division pour construire le nombre sous ces différents aspects. (4 c'est 3+1, c'est 5-1, c'est 2×2, c'est $8 \div 2$). Le champ additif implique la soustraction, le champ multiplicatif implique la division, il est donc extrêmement important à nos yeux de ne pas séparer ces éléments. Le nombre se construit par le +1 mais également le -1.

La manipulation/explicitation se déroule en parallèle de la démarche globale de résolution. Cette activité présentée, animée, guidée par l'enseignant fait l'objet d'un apprentissage explicite. L'élève manipule physiquement et mentalement les représentations physiques des quantités pour comprendre la situation, pour la raconter et pour résoudre efficacement. Cette phase de manipulation vient aider l'élève pour comprendre, structurer/catégoriser la situation, à mettre en équation les données puis à résoudre. C'est un accompagnement plus ou moins fort selon les élèves mais qui n'aide que si l'élève en a réellement besoin.

7 – 2- 3 Un questionnement simplifié : les questions que je me pose quand je résous un problème.

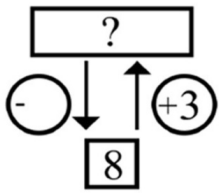
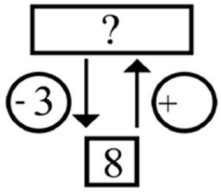
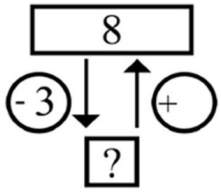
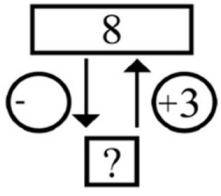
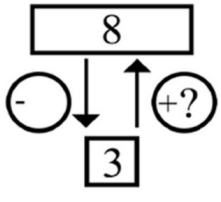
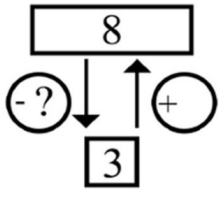
Bien souvent, les questions que l'élève se pose vont nous guider vers une question du type : **est-ce que je recherche une plus grande ou une plus petite quantité ?**

Il faut donc aussi travailler le questionnement. Nous ne partons pas du principe que l'élève va se poser systématiquement les bonnes questions, sinon la résolution de problèmes serait une formalité. Selon le questionnement de l'élève nous pouvons lui donner des pistes, des exemples nombreux où un questionnement simple et progressif peut le guider. C'est en quelque sorte une mise en place d'un algorithme de résolution qui obéit à des opérations simple du type : Si, Et, donc, Oui, Non. Chaque réponse induit une procédure qui est automatisée chez l'expert. Ici nous rendons visible cet algorithme que pratique l'expert afin que le débutant puisse se l'approprier de manière progressive et structurée.

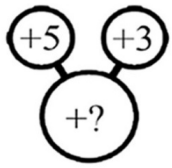
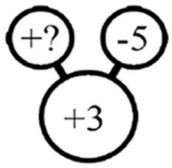
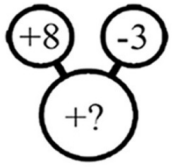
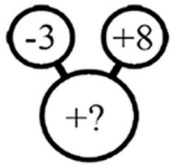
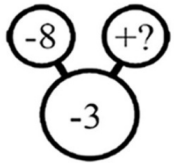
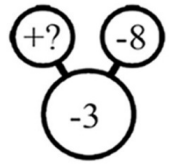
Type	Exemple	Modélisation	
1	Paul a 5 billes en verre et 3 billes en acier. Combien a-t-il de billes en tout ? **Est-ce que le total est un plus grand nombre ? Oui, donc j'additionne les parties.**		Compositions
2	Alice a invité 8 enfants pour son anniversaire. 5 d'entre eux sont des garçons. Combien y a-t-il de filles ? **Pour trouver une partie, est-ce que j'ajoute encore l'autre ? Non. Donc je la retire. Je soustrais la partie.**		

Prenons l'exemple 2 : Pour trouver le nombre de filles est-ce que je rajoute les garçons ? Est-ce que j'enlève les garçons ? Le questionnement juste vient aussi d'une modélisation mentale de la situation. Le schéma permet de poser par écrit ce qui est en jeu dans le problème, mais il y a aussi la construction mentale du problème. Les deux se construisent en parallèle et s'enrichissent d'autant plus que l'on montre aux élèves comment le faire en enlevant tous les implicites du questionnement.

Type	Exemple	Modélisation	
1	Max avait 5 billes, il en gagne 3. Combien en a-t-il maintenant ? **J'ai 5 billes et je gagne, en ai-je plus ? Ou moins ? Plus, donc j'additionne.**	5 —(+3)→ ?	Transformations
2	Tom joue au jeu de l'oie. Il recule de 3 cases et se retrouve sur la case 5. De quelle case est-il parti ? **Avant de reculer, le nombre était-il plus grand ? Oui, donc j'additionne.**	? —(-3)→ 5	
3	Hugo avait 8 bonbons, il en mange 3. Combien lui en reste-t-il ? **Je mange des bonbons donc en ai-je plus ou moins ? Moins, donc je soustrais.**	8 —(-3)→ ?	
4	Lucie vient de recevoir 3 € de sa tante. Elle a maintenant 8 €. Combien avait-elle avant ? **Avant de recevoir l'argent, en avais-je plus ou moins ? Moins, donc je soustrais.**	? —(+3)→ 8	
5	Léo avait 3 billes avant de jouer. Il a maintenant 8 billes. Combien en a-t-il gagné ? **J'avais 3, j'ai 8. Je cherche ce qui manque pour avoir 8. Je soustrais pour trouver le manque.**	3 —(+?)→ 8	
6	Léo a 3 billes. Avant de jouer, il en avait 8. Combien a-t-il perdu de billes ? **Je cherche ce que je perds, donc je soustrais.**	8 —(-?)→ 3	

Type	Exemple	Modélisation	
1	Lise a 8 billes. Léa a 3 billes de plus que Lise. Combien Léa a-t-elle de billes ? **Léa a plus de billes que lise donc j'additionne.**		Comparaisons
2	Léa a 8 billes. Elle a 3 billes de moins que Lise. Combien Lise a-t-elle de billes ? **Léa à moins que lise donc ? Donc Lise a plus que Léa. Donc j'additionne.**		
3	Charlotte a 8 billes. Nina a 3 billes de moins que Charlotte. Combien Nina a-t-elle de billes ? **Nina a moins ou plus que Charlotte ? Moins, donc je soustrais.**		
4	Charlotte a 8 billes. Elle a 3 billes de plus que Nina. Combien Nina a-telle de billes ? **Charlotte a plus que Nina donc ? Donc Nina en a moins. Donc je soustrais.**		
5	Muriel a 8 billes. Sarah en a 3. Combien de billes Muriel a-t-elle de plus ? **Nous cherchons quoi ? La différence entre Muriel et Sarah . Donc je soustrais.**		
6	Muriel a 3 billes. Sarah en a 8. Combien de billes Muriel a-t-elle de moins ? **Nous cherchons quoi ? La différence entre Muriel et Sarah. Donc je soustrais.**		

Toute la difficulté réside dans l'identification de la quantité connue comme « plus grande » ou « plus petite » et donc de sa relation avec celle qui est inconnue afin de répondre à cette simple question : La quantité que je cherche est-elle plus grande ou plus petite ?

Type	Exemple	Modélisation	
1	Axel a joué deux parties de billes. À la première, il en a gagné 5 et à la seconde, il en a gagné 3. Combien a-t-il gagné en tout ? **Il gagne et il gagne, donc j'additionne les gains.**		Composition de transformations
2	Bruno joue deux fois aux billes. Au second jeu, il perd 5 billes. Après les deux jeux, il a gagné 3 billes. Combien a-t-il gagné au premier jeu ? **Il perd, mais il gagne au total. Il a donc gagné plus que ses pertes. Donc, j'additionne les données.**		
3	Bill a joué deux parties. À la première, il a gagné 8 billes et à la deuxième, il en a perdu 3. Combien a-t-il gagné de billes en tout ? **Il gagne plus qu' il ne perd. Je soustrais pour connaître le total.**		
4	John a joué deux parties. À la première, il a perdu 3 billes et à la seconde, il en a gagné 8. Combien a-t-il gagné de billes en tout ? **Il perd moins que ce qu'il gagne. Je soustrais pour connaître le total.**		
5	Rachel a joué deux parties de billes. À la première, elle a perdu 8 billes. Elle a perdu en tout 3 billes. Combien en a-t-elle gagnées à la deuxième ? **Indice : s'extraire des signes ou inverser la situation** **Donc je recherche l'écart/différence entre 8 et 3.**		
6	Axel a joué deux parties de billes. À la deuxième, il en a perdu 8. En tout, il a perdu 3 billes. Combien a-t-il gagné de billes à la première partie ? **Indice : s'extraire des signes ou inverser la situation** **Donc je recherche l'écart/différence entre 8 et 3.**		

Les deux documents suivants sont des aides à l'analyse et à la hiérarchisation des informations pour déterminer une catégorie de problème et le signe opératoire correspondant.

Analyser un problème arithmétique simple pour construire un raisonnemment.

Identifier le champ concerné: Additif ou multiplicatif ?

+ / **-**
- gains
- pertes
- augmentations
- diminutions

x / **÷**
- parts égales
- «fois» plus
- «fois» moins

Champ additif: Identifier la structure profonde de la situation.

Dans le problème rencontré, y a-t-il une variable temporelle ? Y a-t-il une action sur une quantité ?

NON Un état temporel stable.

- J'ai, je suis, le grand le petit, le total, de plus, de moins.

OUI Un état qui varie dans le temps.

Verbe d'action conjugué qui affecte un état.
- Gagne, perds, ajoute, retire...

Composition
- Le total.
- Le tout.
- Une partie.

Comparaison
- Le plus, de plus.
- Le moins, de moins.
- Le plus petit.
- Le plus grand.

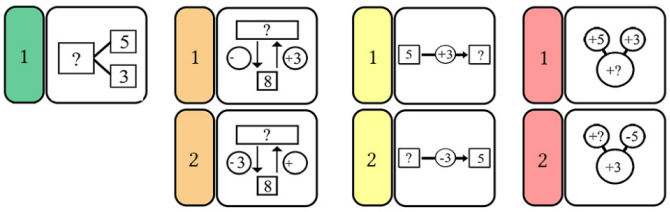
Transformation
- Départ, début, avant.
- Gain ou perte.
- Fin, après.

Composition de tranformations
- Plusieurs gains.
- Plusieurs pertes.
- La perte totale
- le gain total.

Champ additif: Identifier l'opération, addition ou soustraction ?

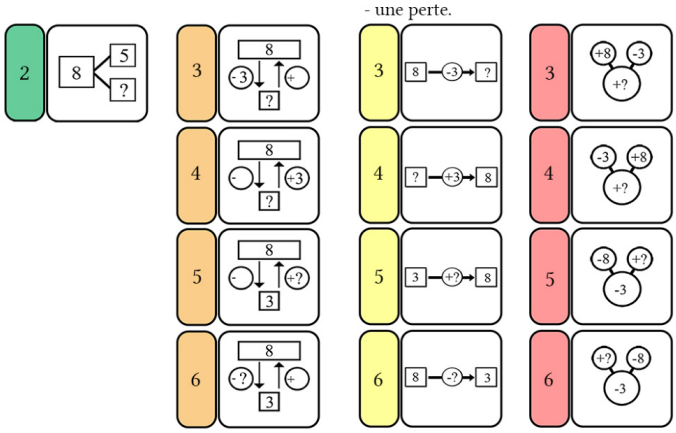
+ Dans le problème rencontré, je cherche :

1. - le tout.
   - le total.
2. - le plus grand.
3. - le résultat d'un gain.
   - l'état avant une perte.
4. - la composition de 2 gains.
   - l'action avant une perte.



- Dans le problème rencontré, je cherche :

1. - une partie.
2. - le plus petit.
   - la différence.
3. - le résultat d'une perte
   - l'état avant un gain.
   - un gain.
   - une perte.
4. - le résultat d'une perte
   - La réduction d'une perte.



ADDITION

SOUSTRACTION

Analyser un problème arithmétique simple pour construire un raisonnemment.

Identifier le champ concerné: Additif ou multiplicatif ?

+ / **-**
- gains
- pertes
- augmentations
- diminutions

x / **÷**
- parts égales
- «fois» plus
- «fois» moins

Champ multiplicatif: Identifier la structure profonde de la situation.

Dans le problème rencontré, il y a une inconnue que je cherche mais y a-t-il 2 ou 3 données connues ?

2 Un problème ternaire.

3 Un problème quaternaire.

Comparaison multiplicative
- fois plus.
- fois moins.

Transformations multiplicatives
- départ, origine.
- agrandir, rétrécir.
- fin.

Composition de transformations multiplicatives
- plusieurs agrandissements
- plusieurs rétrécissements

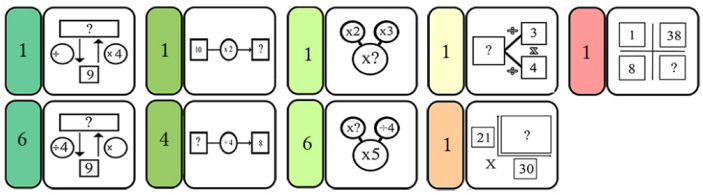
Produit cartésien
- ensemble.
- produit.
- possibilités.
- aires
- longueur, largeur

Proportionnalité
- part.
- partage.
- éléments.
- coefficient.

Champ multiplicatif: Identifier l'opération, multiplication ou division ?

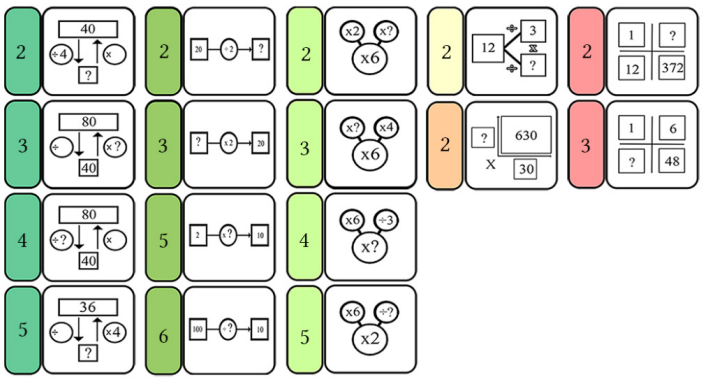
x Dans le problème rencontré, je cherche une situation qui s'approche d'une réitération :

- le plus grand.
- après agrandissement
- avant rétrécissement
- la composition de 2 agrandissements
- l'agrandissement avant un rétrécissement
- l'ensemble produit
- l'ensemble total
- l'aire.
- les éléments de plusieurs parts



÷ Dans le problème rencontré, je cherche une situation qui s'approche d'un partage d'éléments:

- le plus petit.
- la différence.
- après rétrécissement
- avant agrandissement
- agrandissement
- rétrécissement
- un des agrandissements
- le résultat d'un rétrécissement
- le rétrécissement entre 2 agrandissements
- une partie d'un ensemble
- un des facteurs du produit
- longueur
- largeur
- la valeur d'une part
- le nombre de parts



MULTIPLICATION

DIVISION

7 - 3 Illustration de quelques démarches pour modéliser et catégoriser

Pourquoi cette démarche ? Pourquoi s'entraîner à catégoriser les problèmes ?

Au-delà du fait de reconnaître la situation mathématique rencontrée et de faire des liens avec des exemples déjà étudiés et mémorisés, il s'agit surtout de comprendre la structure profonde d'un problème arithmétique. Nous entendons par structure profonde les éléments constitutifs du problème ainsi que les relations entre ces éléments. C'est comprendre ce qui va lier les données, comment elles s'articulent, d'où le terme de grammaire. La catégorisation d'une situation est donc intimement liée à sa modélisation. Ici la modélisation proposée est basée sur une grammaire qui impose un travail langagier d'explicitation en symbolisant les données et les relations entre les données. Il est possible de coupler cette modélisation de compréhension avec une modélisation de calcul. Nous reviendrons sur cette différenciation. Comprendre la structure profonde revient à voir au-delà de la consigne et des informations textuelles ; c'est reconnaître la construction logique interne du problème, ses éléments et ses liens par-delà son apparence. C'est un travail de traduction d'un langage vers un autre.

Le travail de reconnaissance des structures internes permet, face à un nouveau problème textuellement différent, d'entreprendre une approche de résolution qui est pertinente car basée sur le sens de la situation. Malgré la différence des contextes, qui va ralentir / bloquer le débutant qui y voit une structure nouvelle, l'expert va quant à lui reconnaître ce qu'il y a « au-delà des apparences ».

Nous visons donc ici l'apprentissage explicite de ces stratégies de reconnaissance, par la mise en place de démarches logiques et structurées. Cet apprentissage est long et demande de la pratique, le passage du statut de débutant à expert requiert patience et persévérance mais l'entraînement régulier, ritualisé permet d'affermir cette reconnaissance et de développer des automatismes. Cet entraînement doit être repris afin, encore une fois, de mobiliser sa mémoire, de fixer les structures et libérer sa mémoire de travail.

Reconnaître sa structure profonde, et la modéliser, est un gage d'expertise. L'utilisation de nos schémas est une entrée possible vers la mise en équation d'un problème qui en est la forme la plus abstraite. La schématisation permet une première mise en ordre logique des éléments en concrétisant les relations mathématiques sous-jacentes et en pouvant aider à expliciter ces relations.

Les documents suivant sont des photos prises lors de séances proposées par différents enseignants dans des classes du CE1 au CM1.

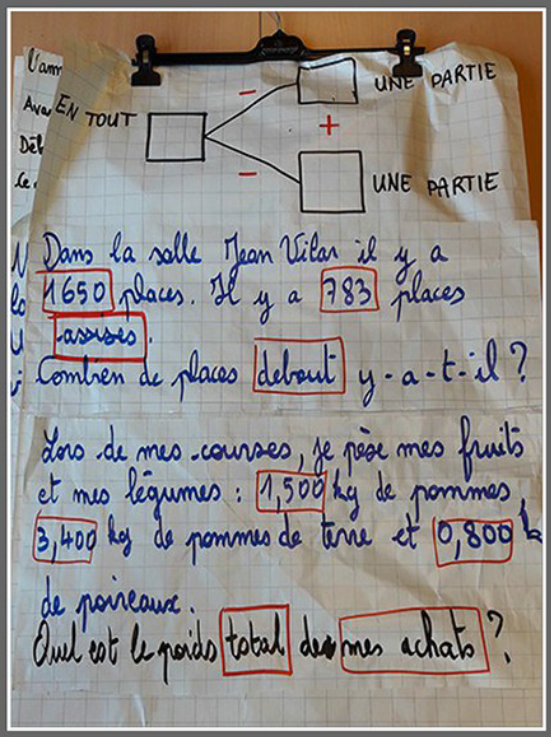
– Sur paperboard le travail mené par l'enseignant qui encadre ou entoure les indices textuels afin d'expliciter sa stratégie.

– Sur feuille quadrillée, un bilan réalisé par un élève.

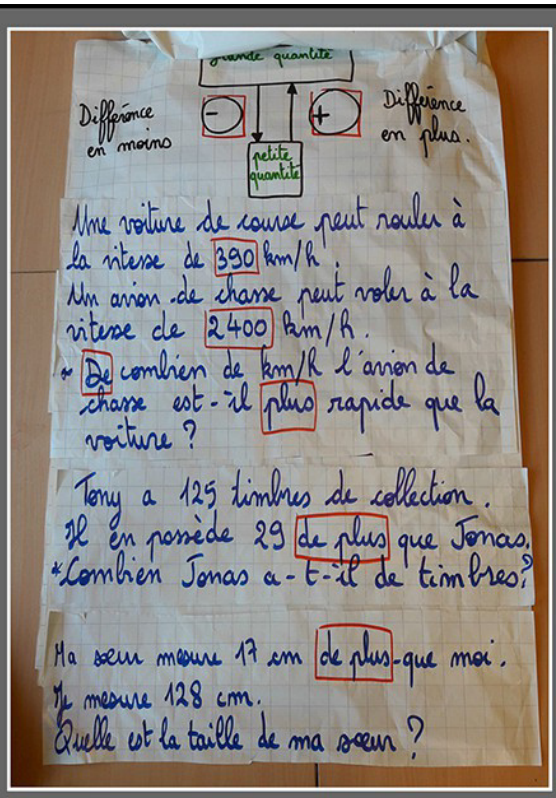
– Le bilan réalisé par les élèves sert de document ressource. Ce document a vocation à être utilisé et complété régulièrement.

– Ce travail peut être mené à tous les niveaux, les CE1 vont par exemple débuter par la distinction « composition » / « transformation » avant d'étudier les autres situations. L'enseignant propose donc une activité « la catégorisation » qu'il adapte aux contraintes de son niveau de classe.

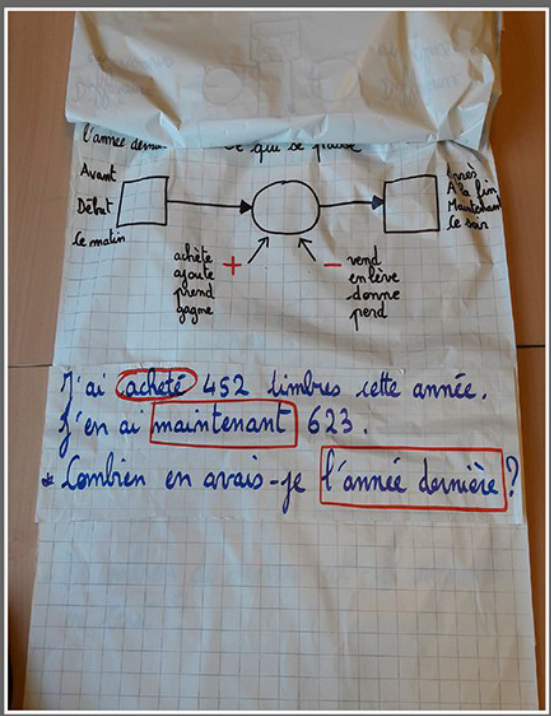
– Ce travail va servir à travailler la grammaire des énoncés par la reconnaissance des verbes et la distinction entre action et état. Les élèves devront symboliser les indices qui permettent de déterminer les relations entre les éléments du problème. Ce travail de traduction de l'énoncé est le point de départ des activités de compréhension et de modélisation des relations entre les données.



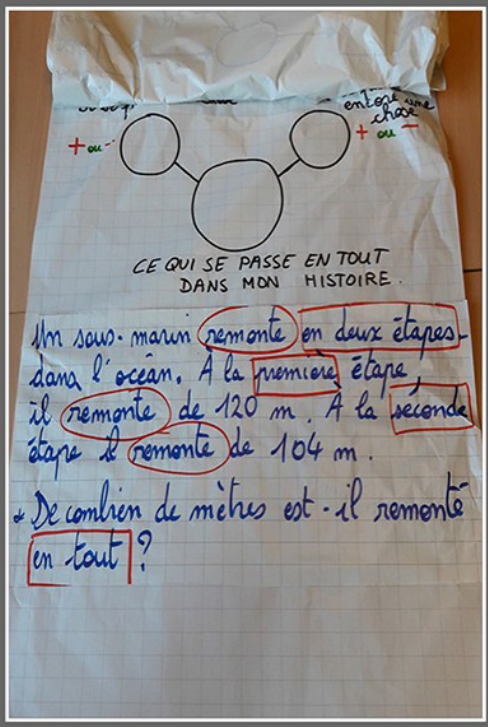
Composition



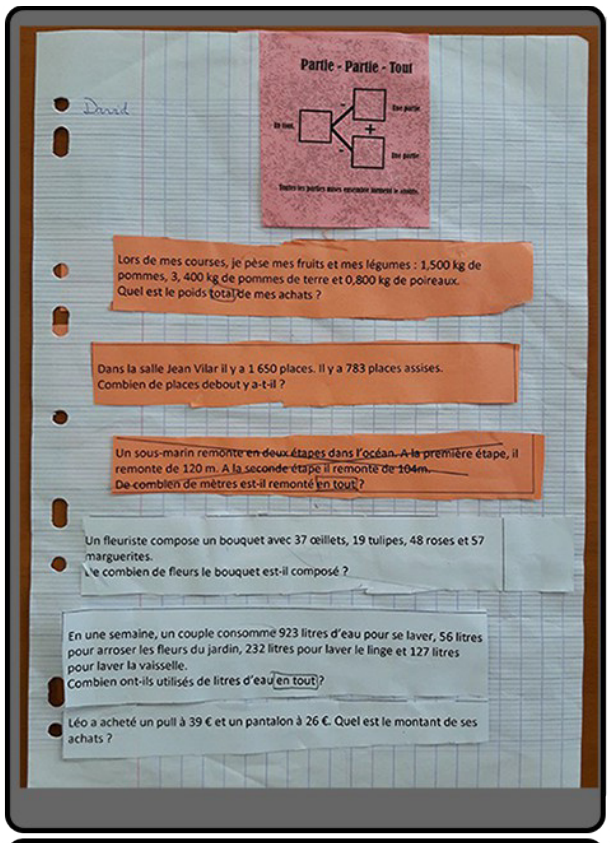
Comparaison



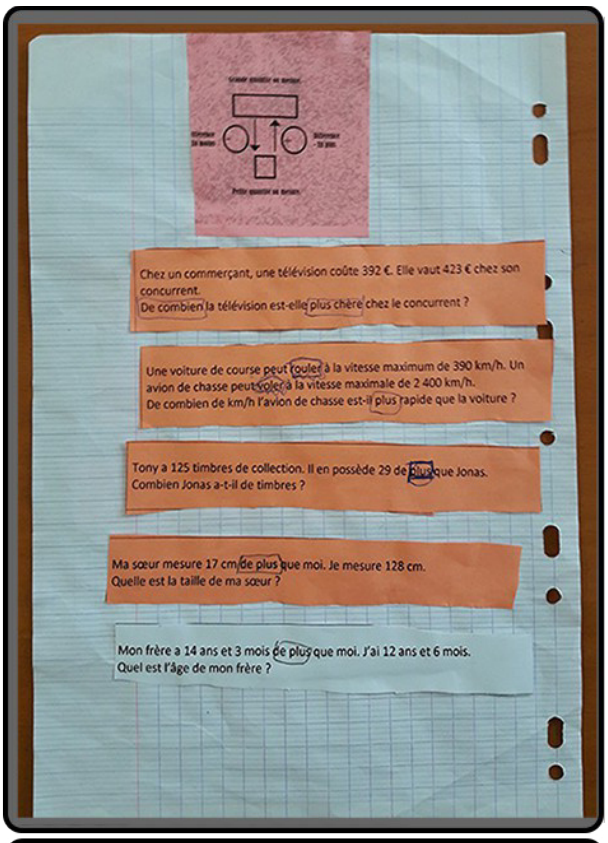
Transformation



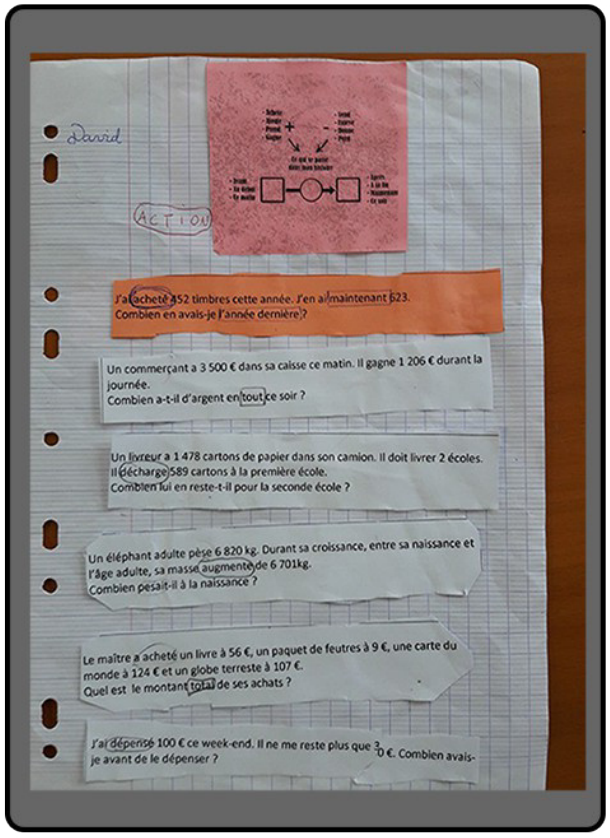
Composition de transformations



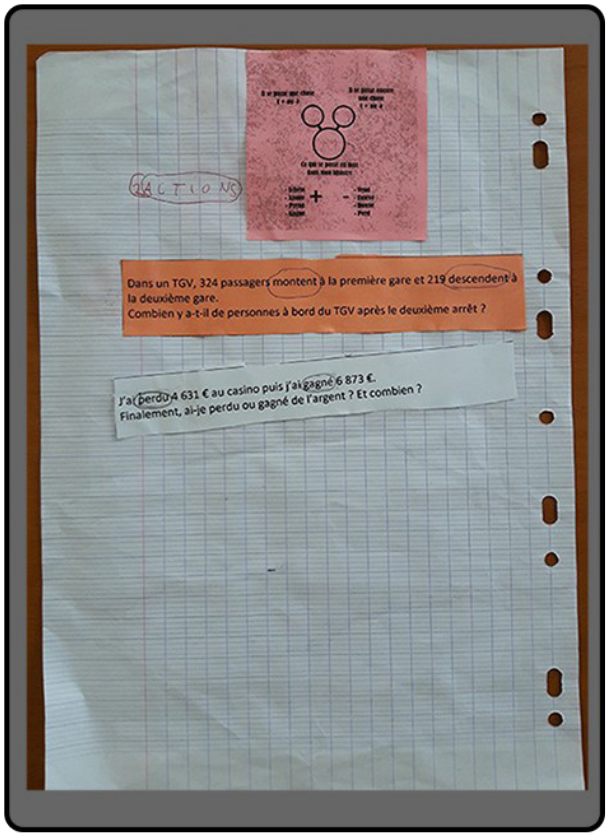
Composition



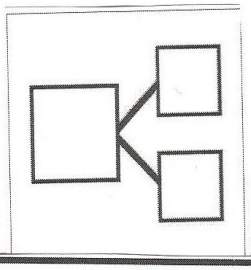
Comparaison



Transformation



Composition de transformations



Pour faire un gâteau j'ai acheté 20g de beurre, 30g de chocolat et 25g de sucre. **Quel est le poids total de mes achats ?**

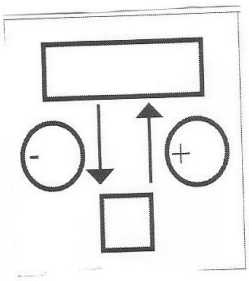
J'ai 12 euros dans mon sac et 7 euros dans ma main. **Combien d 'argent ai-je en tout ?**

Marc a 5 chats blancs, 3 chats noirs et 2 chats gris. **Combien de chats Marc a-t-il ?**

Dans un bocal il y au total 20 poissons. 7 poissons sont verts. **Combien sont oranges ?**

Dans ma trousse il y a 8 feutres rouges et des feutres bleus. J'ai 12 feutres en tout. **Combien y a-t-il de feutres bleus ?**

Dans la classe il y a 13 filles et 12 garçons. **Combien d'élèves y a-t-il en tout dans la classe ?**



Ma sœur a 5 ans de plus que moi. J'ai 6 ans. **Quel âge a ma sœur ?**

Léa à 8 billes, elle en a 3 de moins que Lise.

Combien de billes Lise a-t-elle ?

Mon immeuble a 14 étages. Celui de mon cousin a 4 étages de plus. **Combien l'immeuble de mon cousin a-t-il d'étages ?**

J'ai 36 ans et mon frère 33 ans. **Quelle est notre différence d'age ?**

Un jouet vaut 24 euros dans un magasin et 35 euros dans un autre. **De combien est-il plus cher dans le deuxième magasin ?**

Jules a 19 images. Son camarade en a 15 de moins que lui. **Combien son camarade a-t-il d'images ?**

J'ai mangé 6 gâteaux et il me reste donc 8 gâteaux. **Combien de gâteaux y avait-il dans le paquet ?**

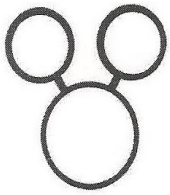
Dans un bocal il y avait 20 poissons. 7 poissons sont nés. **Combien y a-t-il de poissons maintenant ?**

Marc a perdu 5 chats blancs et 3 chats noirs. Il lui reste 2 chats gris. **Combien de chats Marc avait-il avant ?**

J'ai 12 euros dans mon sac maintenant. J'avais 7 euros hier. **Combien d 'argent ai-je gagné ?**

Dans ma trousse j'ai ajouté 8 feutres rouges et j'ai 15 feutres désormais. **Combien de feutres avais-je avant ?**

Il y avait 13 filles ce matin à l'école et il y a 25 filles maintenant. **Combien de filles sont arrivées ?**



J'ajoute 15 fleurs fraîches puis je retire des fleurs du bouquet. J'ai maintenant 3 fleurs de plus dans mon bouquet. **Combien de fleurs ont été enlevées?**

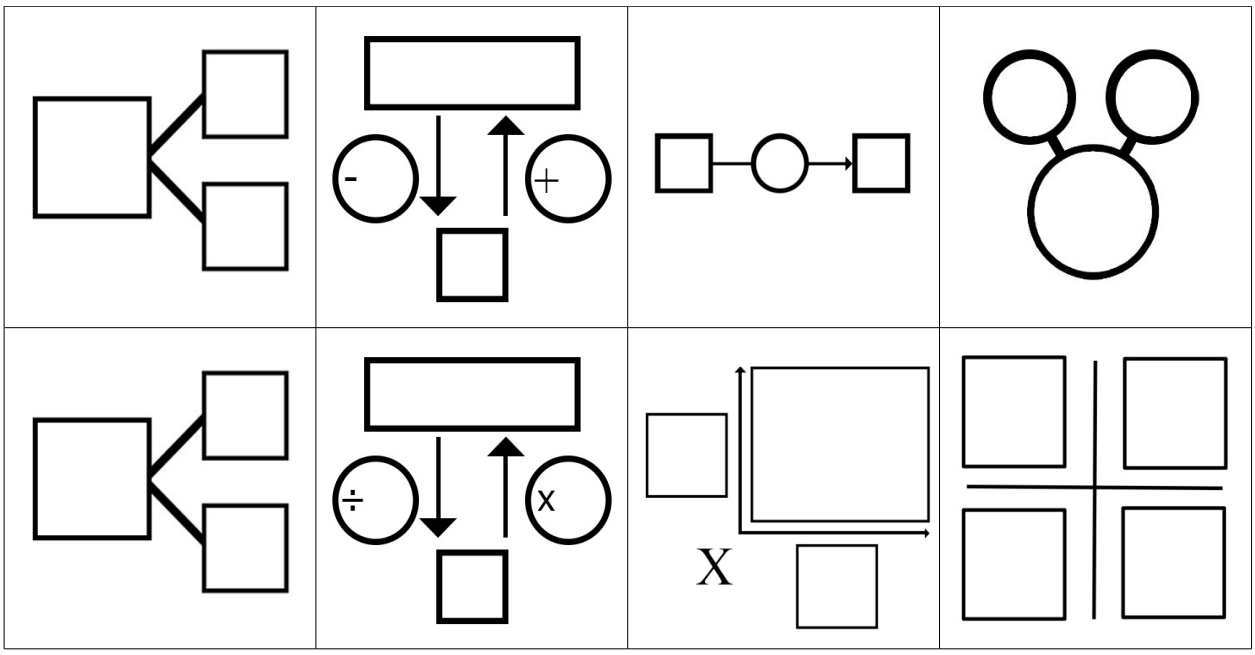
Dans un vase, j'ajoute 15 fleurs fraîches. Puis je retire 7 fleurs fanées. **En tout, ai-je ajouté ou enlevé des fleurs?**

A la première partie Marc gagne 7 billes. A la deuxième, il en perd 5. **Combien de billes a-t-il réellement gagné ou perdu ?**

A la première partie je gagne 7 billes et à la deuxième je gagne 14 billes.
Combien ai-je gagné en tout ?

J'enlève 5 poissons, puis je rajoute 12 poissons dans l'aquarium. **Y a-t-il plus ou moins de poissons?**

12 personnes montent dans le bus. Plus tard 6 personnes montent dans le bus. **Combien de personnes sont montées dans le bus?**



Des enseignants mettent en place des activités de catégorisation en utilisant les schémas ci-dessus. Le but peut être de lier un schéma type et un énoncé, de justifier son choix, de l'expliciter. Travail seul ou en groupe ? L'enseignant fera le choix, selon ses objectifs, entre ces modalités pour maximiser le temps de verbalisation des stratégies et d'explicitation de la tâche effectuée.

Un travail basé sur le choix du modèle ou le fait de le compléter peut alors être une activité de classe ou se faire dans un dialogue enseignant/élève où le questionnement de l'adulte guide l'élève vers la mise en place d'un modèle structurellement juste. L'aspect « calculatoire » venant après ce travail langagier. L'enseignant peut alors adapter le support (modèle donné ou non, catégorisation plus ou moins poussée, etc.) à ses besoins et proposer une activité avec un guidage très régulé selon ses objectifs. D'un étayage fort et modélisant vers un étayage moindre et une pratique guidée puis autonome.

Savoir catégoriser les problèmes permet dans un premier temps de se constituer physiquement une ressource d'étayage (un vrai lexique, une banque de données) afin d'avoir à terme cette catégorisation mentale et langagière automatisée. C'est aussi un appui pour l'enseignant afin qu'il dispose d'une feuille de route organisée afin de modéliser les stratégies de compréhension puis de résolution. Cette approche n'a pas pour objectif d'enfermer l'enseignant dans une suite de procédures standardisées, l'objectif est ici d'avoir un support d'explicitation structurellement juste et simple pour permettre à l'enseignant d'expliquer et d'articuler les informations au mieux d'un seul coup d'œil. Il faut le prendre ici comme un gain de temps sur le long terme pour étayer au mieux nos nombreux élèves

L'élève, à terme, se constitue une banque de problèmes résolues accessibles qui peuvent servir de référence pour en résoudre des nouveaux. Le principe est de pouvoir aller reprendre ce qui a déjà été réalisé par l'élève et de l'utiliser comme aide si besoin. Nos fichiers/recueils de problèmes peuvent jouer ce rôle et servir de banque de données

évolutive pour l'élève. Ce travail sur les analogies, pour automatiser des processus de résolution, implique que l'élève doit résoudre souvent et suffisamment pour gagner en expertise et soulager progressivement sa mémoire à mesure qu'il automatise les raisonnements. Nous entendons « souvent » dans le sens « tous les jours » et « suffisamment » par au moins 4 à 5 problèmes. Et parce que le travail se fait ici sur la compréhension de la structure du problème, il faut donc veiller à calibrer les données numériques de manière à ce qu'elles ne soient pas un frein. Cette activité complète l'utilisation des recueils de problèmes comme un « échauffement cognitif ».

Cette activité de catégorisation, guidée par l'enseignant, a pour finalité de créer un outil qui fait correspondre à une catégorie une représentation type et un énoncé type. Nous créons donc ici un « lexique », un « dictionnaire », une « référence » des problèmes où ceux-ci sont classés en fonction de leur structure interne (catégorie et représentation) et des énoncés types de ces problèmes. Nous constituons une grammaire simple et accessible des problèmes arithmétiques.

Les énoncés types présentent des invariants syntaxiques. Même en purgeant au maximum un énoncé des informations explicites, il reste toujours un élément permettant de catégoriser (mais des exceptions permettraient de préciser encore plus ces modèles). Il convient donc de pratiquer cette activité de catégorisation de manière progressive et réfléchie du CP au CM2 en allant d'un énoncé très explicite vers une formulation de plus en plus implicite. La reconnaissance de la catégorie induit la présence d'une structure type et donc de ses éléments et des interactions entre eux.

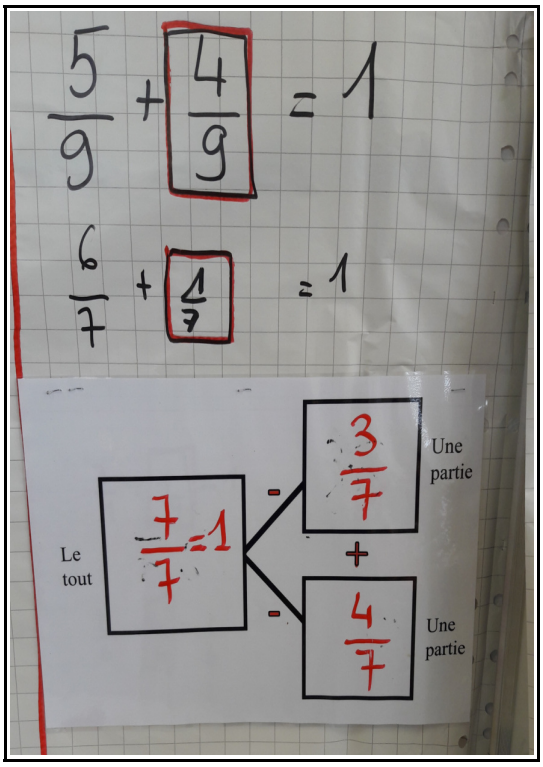
Exemple : Si l'énoncé propose un verbe conjugué traduisant la transformation d'un état temporel établi et si l'énoncé donne des indices de temps (matin, début, etc.), nous sommes en présence d'une transformation d'états. La connaissance de ce fait implique qu'il y a un état initial, final et une transformation. J'ai donc la structure de l'équation qui est en place, je connais des éléments et je connais aussi l'élément manquant. Comme je sais ce qu'il manque, je sais comment le trouver, car les stratégies ont été enseignées.

La connaissance des imbrications entre ces éléments, liés par la structure, induit une procédure de résolution. Voilà une phrase d'élève qui résume ce processus :

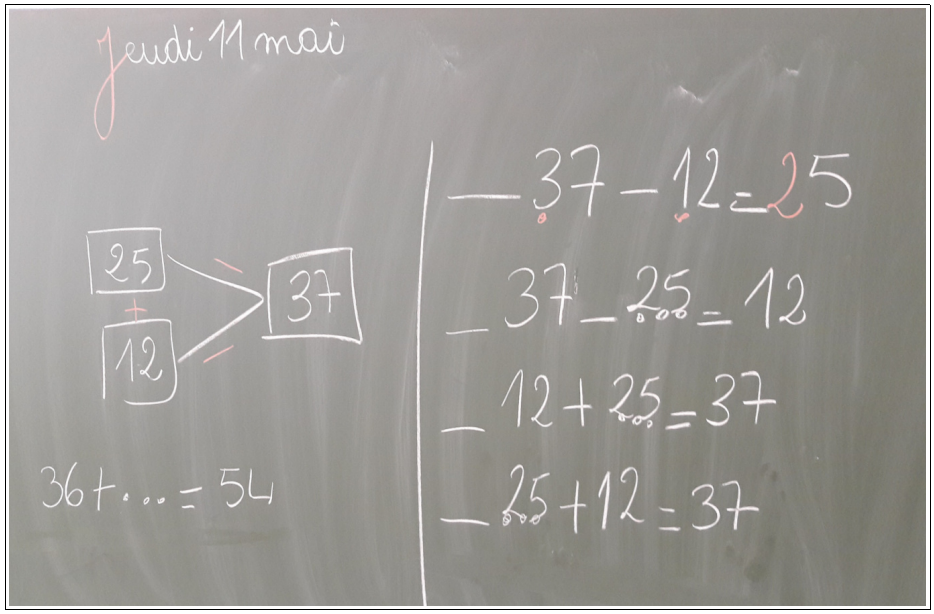
« Je connais le début et je connais la fin. Je sais qu'il a gagné, mais je sais pas combien. C'est donc une addition à trou donc je fais une soustraction pour trouver. Après je peux refaire l'addition pour vérifier. »

Ces énoncés types peuvent aider l'élève à re-catégoriser, c'est un support d'aide. Si l'élève hésite sur la structure d'un problème, il aura ainsi à disposition une banque de référence pour s'aider. Ce travail de catégorisation implique aussi un travail de lecture, de recherche d'indices (reconnaître un verbe conjugué, des connecteurs, des pronoms) en surlignant ou soulignant. Il est important de prévoir des séances de ce type chaque année et de ne pas négliger la grammaire au sens large car c'est un point clef de la compréhension des énoncés des problèmes arithmétiques.

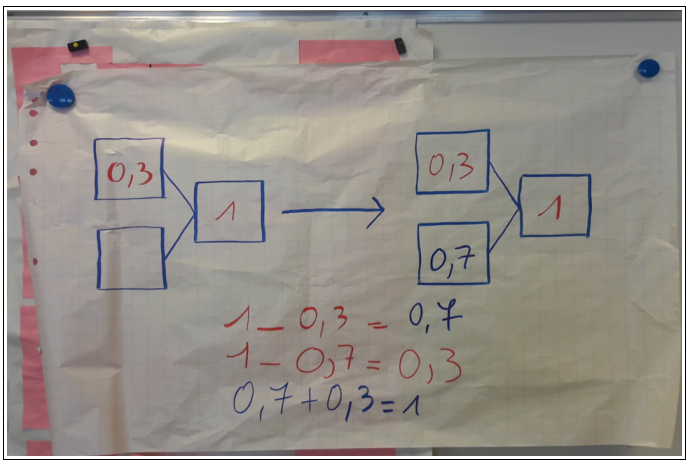
En parallèle, il faut insister sur le sens de l'équation, sa signification : addition à trou = soustraction pour résoudre (expert). C'est une aide méthodologique importante à travailler au-delà de la séance de résolution de problèmes.



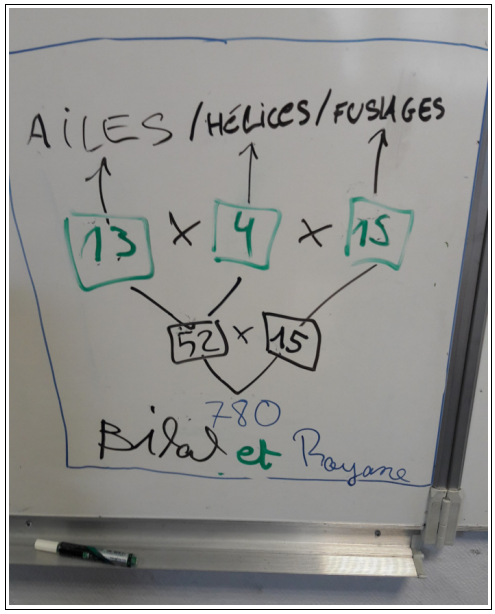
Dans cette classe de CM1, l'enseignante ré-utilise le schéma de composition pour l'étude des fractions. Cela lui permet de travailler le concept de partie et tout en utilisant la structure analogue de la fraction. L'ensemble des parts forme un tout, ce tout est ici le dénominateur.



Un schéma pour représenter les liens entre addition et soustraction dans une classe de CP-CE1

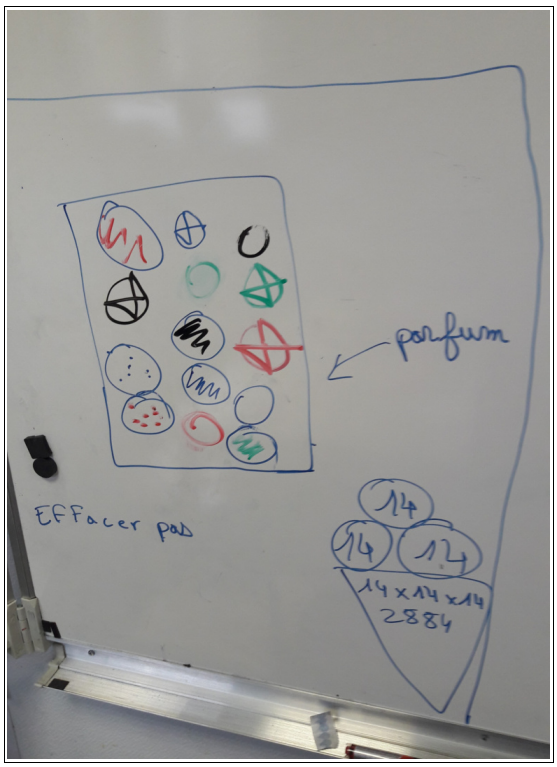


Les fractions et les décimaux, formation d'un tout sur la base d'un schéma.



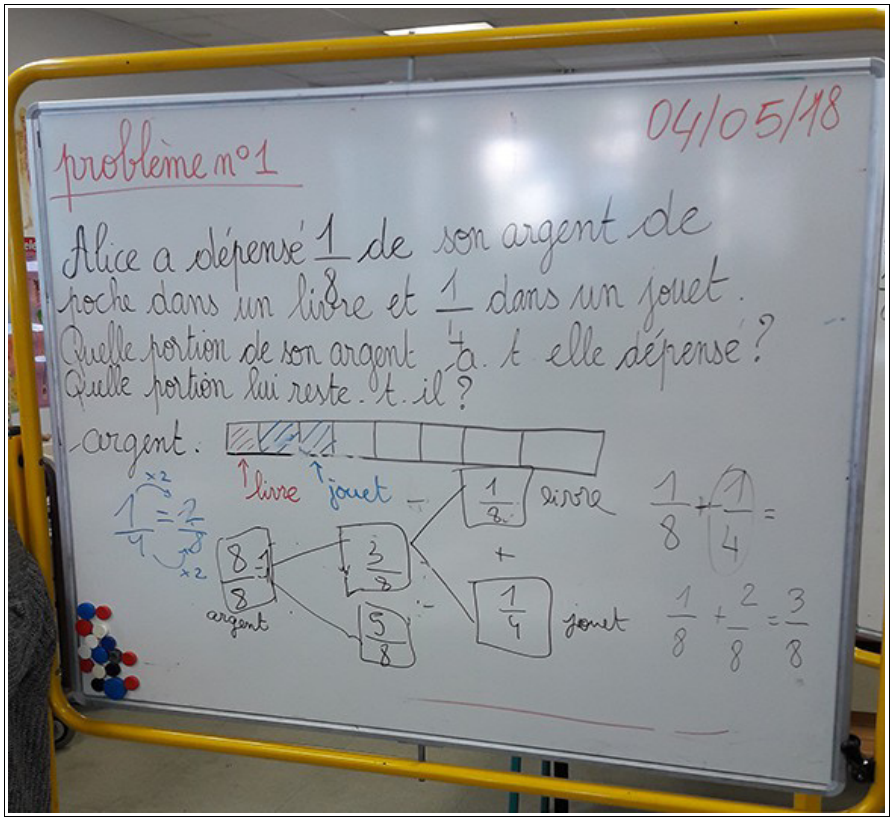
Travail de 2 élèves sur le tableau lors d'une séance de résolution de problèmes (CM1). En connaissant le nombre des éléments (ailes, hélices, fuselages) combien de maquettes différentes sont possibles ?

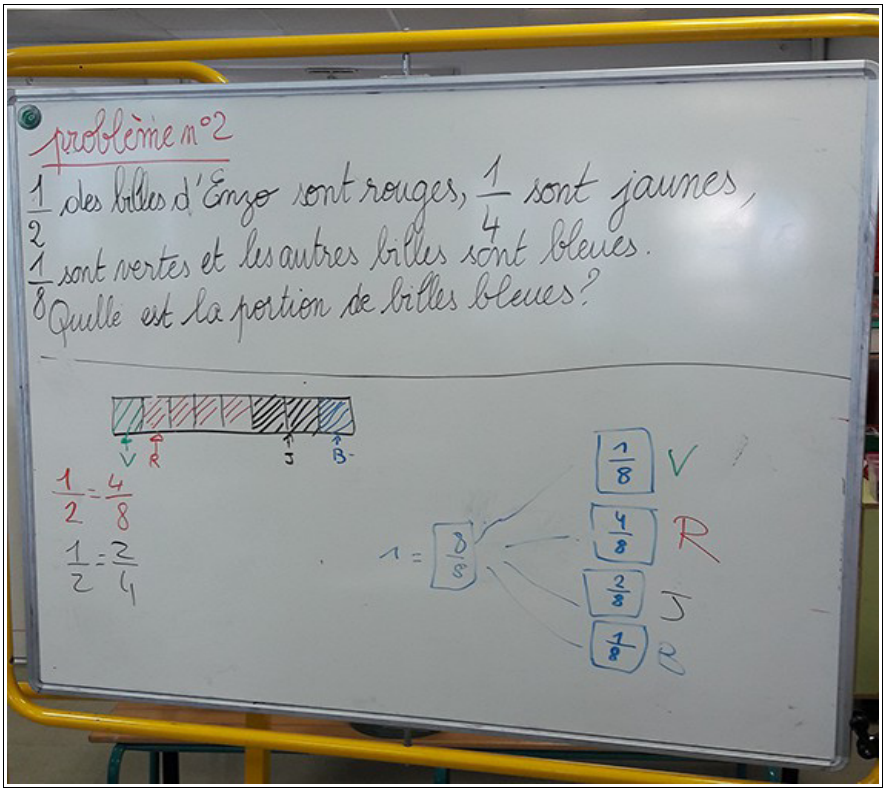
La représentation se base sur la structure du produit cartésien. Les élèves coopèrent pour résoudre s'ils travaillent sur le même problème ou s'ils peuvent faire à deux ce qui semble trop complexe seul. Les modalités de travail vont varier selon les enseignants ou au sein même de la classe. Les élèves ont la possibilité de travailler en binôme sur un temps variable, l'enseignant adapte selon ce qu'il estime le plus efficace. Mais, un travail coopératif ne se résume à mettre plusieurs élèves ensemble, nous y reviendrons dans un prochain chapitre.

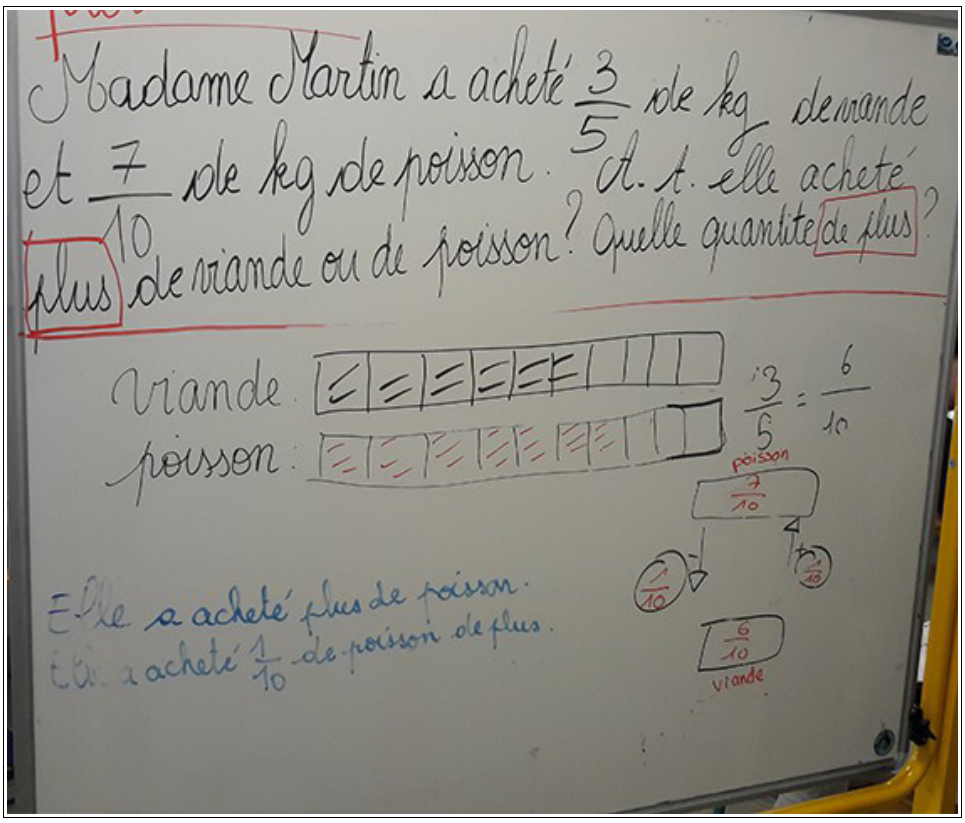


Travail d'une élève face à un problème de type « produit cartésien » (CM1). Nombre de glaces différentes ayant 3 boules et 14 parfums au choix, avec possibilité de prendre le même parfum plusieurs fois. Les élèves passent du tableau au fichier, et vice versa. La classe dispose de plusieurs tableaux utilisés par les élèves. Pour le PDM, il est intéressant de pouvoir suivre ainsi de loin le travail de plusieurs élèves (ou binômes, groupes) sur les différents tableaux et avoir ainsi une vue d'ensemble de ce que font les élèves à tout moment. Cela permet un rapide feed-back, une ré-explicitation des procédures, une correction, une aide. Cela permet également de vérifier l'effectivité du travail et de réagir pour recentrer si nécessaire.

Ci-dessous des problèmes étudiés en classe de Cm2 où l'enseignante demande aux élèves de modéliser la situation et de la représenter sous forme schématique afin d'en expliciter toutes les composantes.







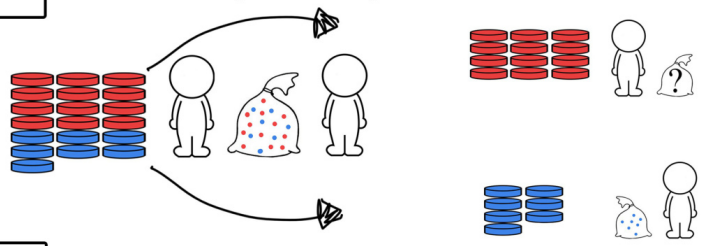
Vous trouverez à suivre plusieurs démarches proposées selon le déroulement : « **Manipulation, Modélisation, Abstraction** » pour les 4 grands types de problèmes additifs. Ces démarches sont à adapter selon les variances internes des types rencontrés mais peuvent servir de base de réflexion concernant le déroulement des séances visant leur découverte et leur approfondissement. Ce type de démarche structurée permet de visualiser où en est l'élève de sa compréhension d'une situation. La modélisation permet toujours de s'assurer d'une compréhension fine des situations rencontrées.

Question

« J'ai 7 billes et avec mon copain Norbert nous en avons **19 au total. Combien de billes a Norbert ?»**

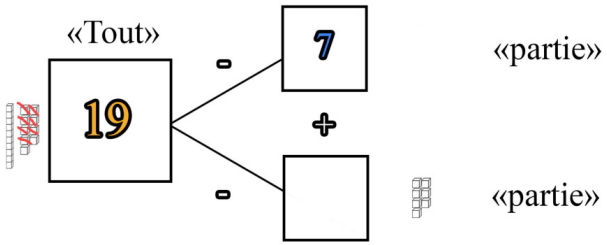
Manipulation

Dessin et manipulation d'objets.



Modélisation

Mise au point d'un modèle logique.



Abstraction

Mise en équation du problème grâce au modèle.

$$19 - 7 = 12$$

Conclusion

« Norbert a 12 billes.»

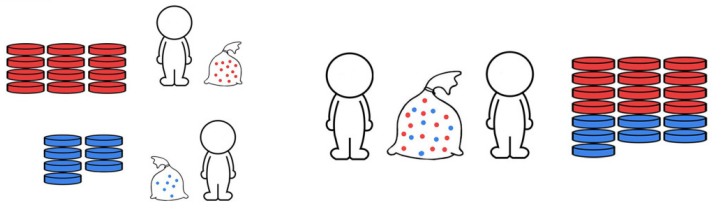
KEVIN GUEGUEN: MAITRE SUPPLEMENTAIRE

Question

« J'ai 12 billes. Mon copain Norbert en a 7. **Combien en avons-nous ensemble ?** »

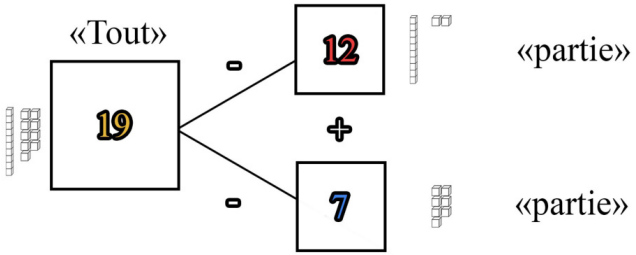
Manipulation

Dessin et manipulation d'objets.



Modélisation

Mise au point d'un modèle logique.



Abstraction

Mise en équation du problème grâce au modèle.

$$12 + 7 = 19$$

Conclusion

« Ensemble, nous avons 19 billes. »

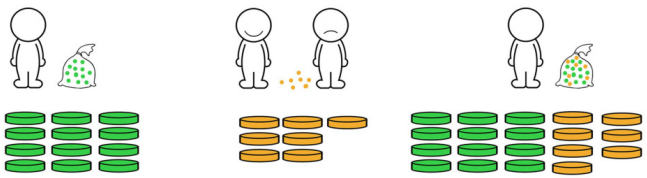
KEVIN GUEGUEN: MAITRE SUPPLEMENTAIRE

Question

« J'arrive ce matin à l'école avec 12 billes. J'en gagne 7 durant la récréation. **Combien en ai-je maintenant ?** »

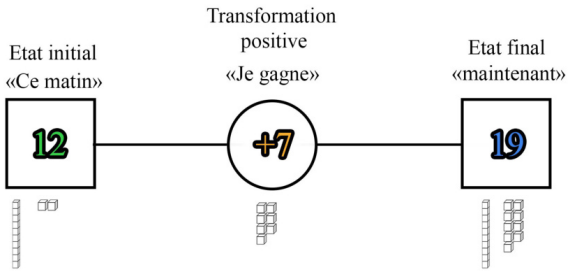
Manipulation

Dessin et manipulation d'objets.



Modélisation

Mise au point d'un modèle temporel logique.



Abstraction

Mise en équation du problème grâce au modèle.

$$12 + 7 = 19$$

Conclusion

« Maintenant j'ai 19 billes. »

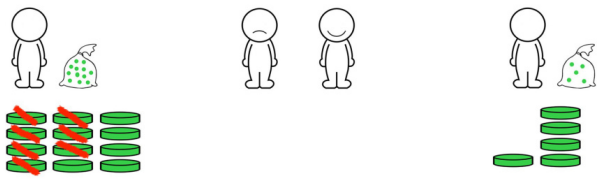
KEVIN GUEGUEN MAITRE SUPPLEMENTAIRE

Question

« J'arrive ce matin à l'école avec 12 billes. J'en perds 7 durant la récréation. **Combien de billes ai-je maintenant ?»**

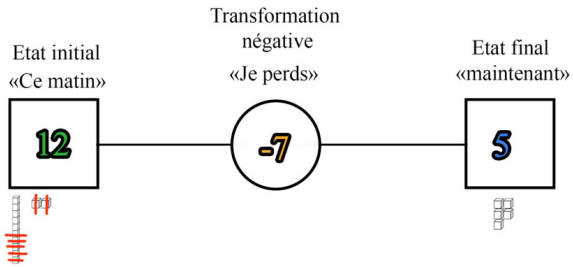
Manipulation

Dessin et manipulation d'objets.



Modélisation

Mise au point d'un modèle logique.



Abstraction

Mise en équation du problème grâce au modèle.

$$12 - 7 = 5$$

Conclusion

« Maintenant j'ai 5 billes.»

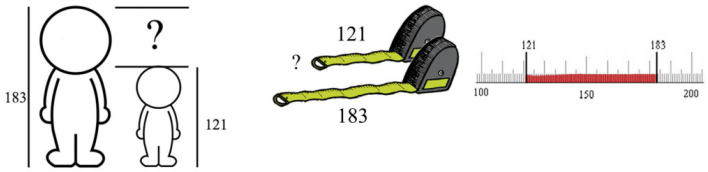
KEVIN GUEGUEN MAITRE SUPPLEMENTAIRE

Question

« Je mesure 183 cm alors que mon frère mesure 121 cm. **Quelle différence de taille y a-t-il entre nous ?** »

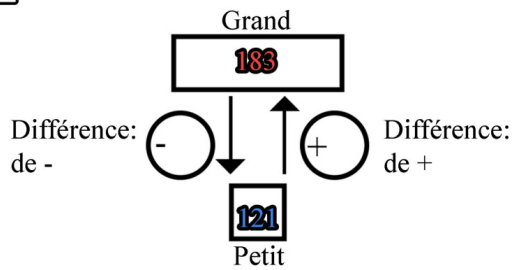
Manipulation

Dessin et manipulation d'objets.



Modélisation

Mise au point d'un modèle logique.



Abstraction

Mise en équation du problème grâce au modèle.

183 - ... = 121
121 + ... = 183
183 - 62 = 121
121 + 62 = 183

→ 183 - 121 = 62

Vérification

Conclusion

« Notre différence de taille est de 62 cm. »

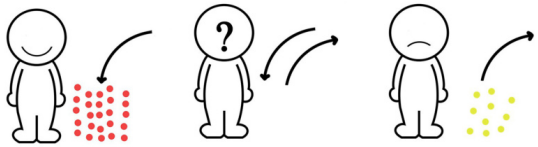
KEVIN GUEGUEN: MAITRE SUPPLEMENTAIRE

Question

« J'ai gagné 25 euros ce matin mais globalement j'ai perdu 10 euros aujourd'hui. **Combien ai-je gagné ou perdu cet après midi ?»**

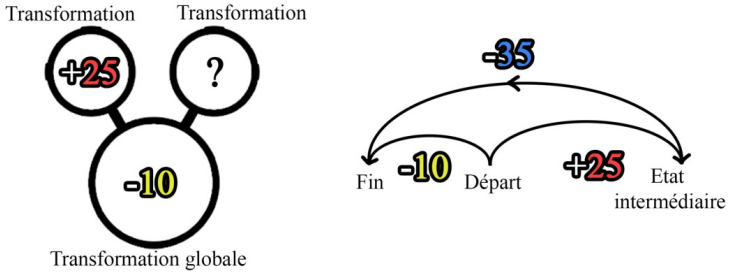
Manipulation

Dessin et manipulation d'objets.



Modélisation

Mise au point d'un modèle logique.



Abstraction

Mise en équation du problème grâce au modèle.

25 + 10 = 35
25 + (- 35) = - 10

Conclusion

« Cet après-midi j'ai perdu 35 euros. »

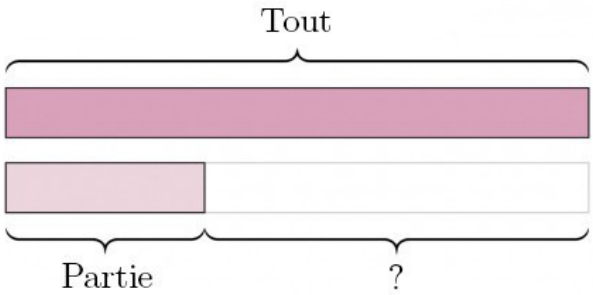
KEVIN GUEGUEN: MAITRE SUPPLEMENTAIRE

Deux approches pour modéliser : Une modélisation via l'aspect langagier pour expliciter et faire apparaître la structure profonde du problème en signifiant les relations entre les éléments. Une modélisation calculatoire qui vise à organiser entre elles les quantités mise en jeu dans une optique d'ajout ou de retrait (et d'itération de ceux-ci pour l'aspect multiplicatif). Il ne s'agit pas selon nous de choisir l'une ou l'autre, car la cible travaillée n'est pas la même. L'organisation calculatoire est liée à la traduction langagière de l'énoncé aussi, selon nous, il s'agit d'une double approche nécessaire pour l'enseignant et l'élève afin d'aller progressivement vers une compréhension des structures profondes via ces intermédiaires.

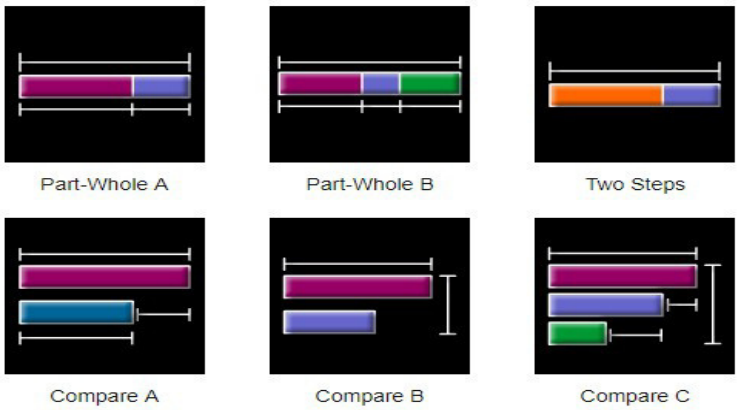
Comme nous le précisions plus haut, cette modélisation langagière a pour but de travailler très précisément sur la structure du problème en favorisant la mise en place d'un support d'explicitation pour l'élève. Ce support est donc codé pour rendre visible les éléments et les relations entre les éléments afin de systématiser le travail langagier, la compréhension fine et le repérage des interactions entre les données. Mais il est également possible d'utiliser en parallèle la modélisation « calculatoire » des quantités pour représenter l'ajout ou le retrait en se basant uniquement sur la grandeur des données du problème en faisant abstraction de la catégorisation. La modélisation est alors identique quel que soit le type de problème rencontré et ne se focalise essentiellement que sur la différenciation entre addition et soustraction. Cette approche peut venir compléter la précédente pour l'aspect calculatoire.

Quelques exemples de modélisations par l'entrée « calculatoire » :

Méthode de Singapour[1] :

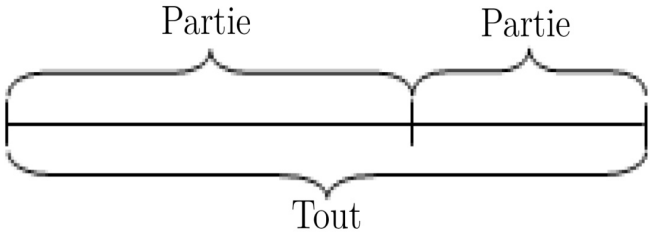


Mathsplayground[2] :

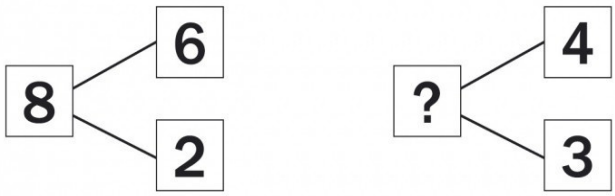


1 https://www.lalibrairiedesecoles.com/methode-singapour/
2 https://www.mathplayground.com/thinkingblocks.html

Circulaire éducation nationale du 25-04-2018 [3] :



Quelques exemples de modélisations par l'entrée « langage » :
Gérard Vergnaud.
École JJ Rousseau et Kevin GUEGUEN
Méthode de Singapour[4] :



Dans la modélisation « calculatoire », le modèle en barre est toujours celui qui émerge. Les réglettes cuisenaires sont à ce titre très adaptées pour représenter les premières quantités et modéliser les premiers problèmes rencontrés. Ce modèle en barre est visuellement simple, utilisable avec un minimum de matériel et permet de manipuler et expliciter les relations entre les nombres pour calculer. La difficulté pour l'élève résidera néanmoins dans sa capacité à associée les quantités au « Tout » et aux « parties ».

Dans le problème suivant « Dans une classe de 10 élèves il y a 6 garçons. Combien y a-t-il de filles ? » il n'est pas rare (loin de là) de rencontrer des élèves qui ne voient pas 10 comme le tout et vont associer les deux quantités alors qu'il s'agit d'un retrait. Le modèle en lui-même ne garantit pas la compréhension de la situation, car il ne faut pas négliger l'importance de la compréhension de l'énoncé et donc la traduction d'un langage en un autre. Il faut donc une multitude d'exemples, de modélisations, de travail sur les problèmes analogues pour intégrer les modèles. Cela nécessite un travail de résolution quotidien et nécessite d'enseigner explicitement comment utiliser ce modèle et faire utiliser ce modèle (représenter et oraliser) pour que l'élève intègre les structures.

Le deux approches de modélisation (et donc de catégorisation) peuvent être menées en parallèle, l'une venant renforcer l'autre. Voici quelques modèles simples réalisés par l'auteur que nous pouvons utiliser avec les modèles « langage » :

3 https://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=128735
4 https://www.lalibrairiedesecoles.com/methode-singapour/

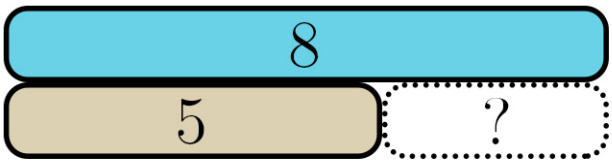
Des problèmes de soustraction dans 4 catégories de problèmes :

– J'ai 8 billes, je perds 5 billes. Combien ai-je de billes ?

– J'ai 8 billes en tout, 5 sont rouges. Combien sont bleues ?

– J'ai 8 billes, mon ami en a 5 de moins. Combien de billes a-t-il ?

– J'ai gagné 8 billes puis j'ai perdu 5 billes. Combien ai-je gagné de billes ?



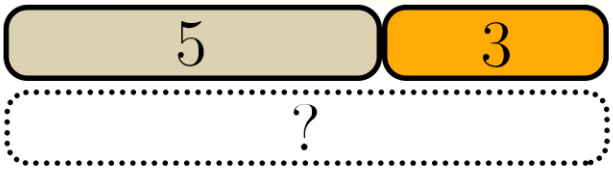
Des problèmes d'addition dans 4 catégories de problèmes :

– J'ai 5 billes, je gagne 3 billes. Combien ai-je de billes maintenant ?

– J'ai 5 billes bleues et 3 billes rouges. Combien ai-je de billes en tout ?

– J'ai 5 billes, mon ami en a 3 de plus. Combien de billes a-t-il ?

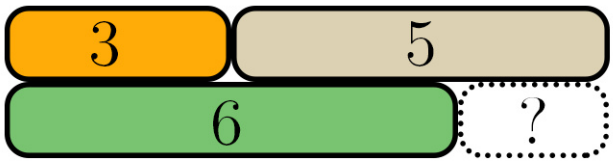
– J'ai gagné 5 billes puis j'ai gagné encore 3 billes. Combien ai-je gagné de billes ?



Des problèmes d'addition et de soustraction dans 4 catégories de problèmes :

– J'ai 3 billes, je gagne 5 billes puis je perds 6 billes Combien ai-je de billes ?

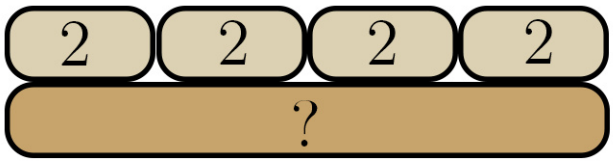
– Je gagne 3 billes puis je gagne encore 5 billes avant de perdre 6 billes. Combien ai-je gagné de billes ?



Il est également possible de modéliser de manière semblable des problèmes arithmétiques qui relèvent de la multiplication ou de la division. Cela permet de signifier une fois de plus les liens entre les 4 opérations élémentaires. Néanmoins, cette modélisation perd en pertinence à mesure que les quantités mises en jeu augmentent et il conviendra de modifier les modèles dans ces cas précis.

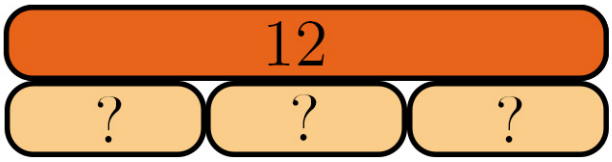
Des problèmes de multiplication :

– J'ai 4 sacs de 2 billes, Combien ai-je de billes ? (lien avec l'itération de l'addition)



Des problèmes de division :

– J'ai 12 billes que je range équitablement dans 3 sacs, Combien ai-je de billes ? (lien avec l'itération de la soustraction)



La limite se trouve dans le nombre d'éléments inclus dans le tout (le nombre de parties qu'il faut représenter). Cette modélisation est donc une première approche d'un concept, qui a une grande pertinence mais qui n'a pas vocation à être généralisée à toutes les situations.

Question : Pourquoi une modélisation horizontale ? Pourquoi les barres sont-elles dessinées de gauche à droit ? Nous pourrions en effet opter pour une modélisation en barre « verticale ». Celle-ci est peut-être plus adaptée pour les problèmes de comparaison dans le cas d'un « grand » et d'un « petit » mais serait moins adaptée pour un « long » et un « court ». Il serait également possible de proposer une modélisation hybride avec les problèmes statiques (composition et comparaison) représentés par des barres verticales et les problèmes temporels (transformation et composition de transformations) représentés par des barres horizontales. Dans ce cas précis le choix de l'auteur pourrait paraître arbitraire or il n'en est rien. Nous faisons le choix de la clarté et de la simplicité absolue en gardant le même modèle en barre pour toutes les situations, car le modèle horizontal est plus facilement utilisable dans les problèmes multiplicatifs. De plus, comme nous travaillons cette modélisation dès le CP, il semble préférable d'utiliser un modèle solide mais souple qui s'adapte à différents contextes (additif et multiplicatif).

Pour conclure, il y a donc plusieurs manières de modéliser, en ciblant la compréhension des structures des problèmes ou en ciblant le calcul associé. Les deux peuvent êtres amenées conjointement selon les nécessités en sachant que la modélisation « calcul » est dans la modélisation structurelle mais que l'enseignant peut faire le choix de la rendre plus « visible » pour maximiser la compréhension et l'explicitation si un élève éprouve des difficultés. La modélisation « structure » développera de prime abord l'aspect compréhension fine et différenciation des situations avec un travail sur la grammaire et le sens pour amener à une construction plus explicite des relations entre les données et donc une compréhension des calculs. La modélisation « calcul » viendra renforcer la première en mettant une focale sur ce qui va lier les quantités et quel calcul choisir. Mais la modélisation « structure » va aussi renforcer la modélisation « calcul » car pour agencer les données (savoir si la grande quantité est donnée ou si elle est à chercher par exemple. Plus simple : savoir si je connais une partie ou un tout) et induire le calcul il faudra être capable de comprendre le sens du problème via ses indices lexicaux. Les deux sont donc très complémentaires et sont des outils au service de l'élève.

Mais dans le cas d'un problème avec des fractions ?

L'erreur, selon nous, serait de se focaliser dans un premier temps trop fortement sur le terme « fraction » car cela relève de la surface du problème et ne modifie par sa structure sémantique. Si la fraction est remplacée par un entier, le problème semblera probablement plus abordable à l'élève, surtout s'il n'est que peu familiarisé avec cette notion. Tout l'enjeu est encore une fois de se focaliser sur la structure du problème pour dépasser cette difficulté. Il y a donc deux éléments à cibler lors de la résolution : la modélisation pour comprendre la structure et la modélisation pour résoudre.

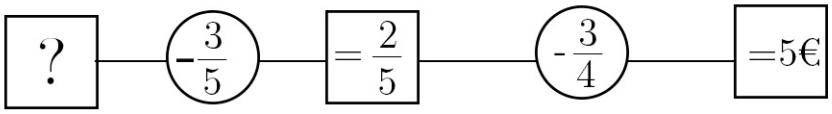
Les problèmes faisant intervenir des écritures fractionnaires sont d'excellents supports pour modéliser afin de faire percevoir ce que représente plus « concrètement » cette fraction.

Exemple : *« Dimitri dépense les* $\frac{3}{5}$ *de son argent de poche pour acheter un livre. Il donne les* $\frac{3}{4}$ *de ce qui lui reste pour rembourser son frère. »*

Quelle fraction de son argent est allouée au remboursement ?
Quelle fraction de son argent lui reste-t-il ?
Il lui reste alors 5€, quelle était la somme initiale ?

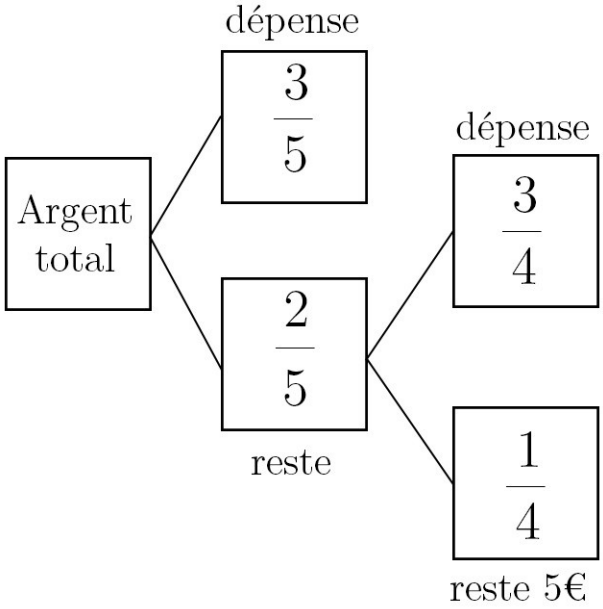
Modélisons d'abord pour comprendre puis pour résoudre :

Cette modélisation permet de représenter la chaîne des événements dans une optique temporelle. Nous codons ici les états et les transformations.

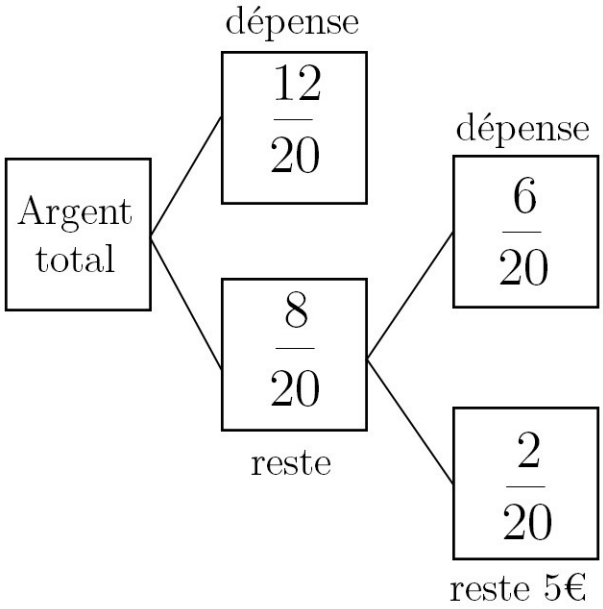


Puis nous simplifions encore plus pour obtenir une chaîne d'événements qui servira de base de travail pour entamer le processus de résolution, car les fractions qui s'enchaînent représentent des portions d'états différents : les $\frac{3}{5}$ sont une partie de l'état initial et les $\frac{3}{4}$ sont une portion de l'état final intermédiaire.

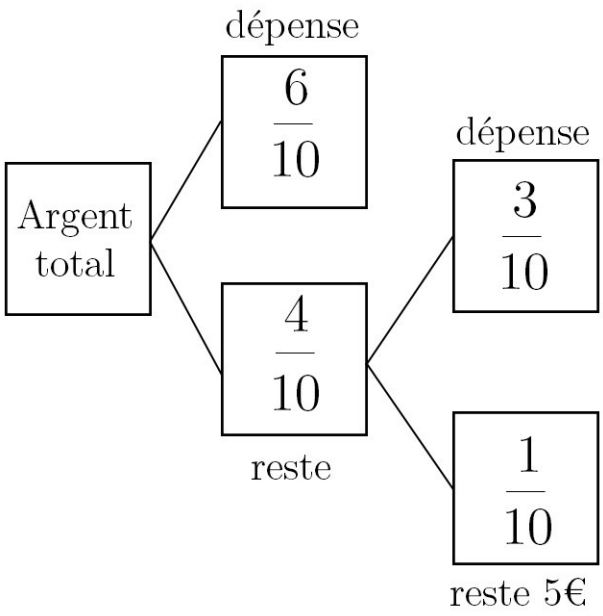
Nous pouvions également choisir de modéliser les fractions comme des parties d'un ensemble initial sans tenir compte des variables temporelles.



La mise au même dénominateur facilite la compréhension des étapes et rend les pertes ou gains plus simples à percevoir dans la globalité du problèmes. La mise au même dénominateur se fait en partant des informations finales. Le reste final de 5 € est équivalent à $\frac{1}{4}$ des $\frac{2}{5}$ soit à $\frac{2}{20}$. De proche en proche, les fractions sont modifiées et simplifiées si possible (ce que nous n'avons pas fait ici).

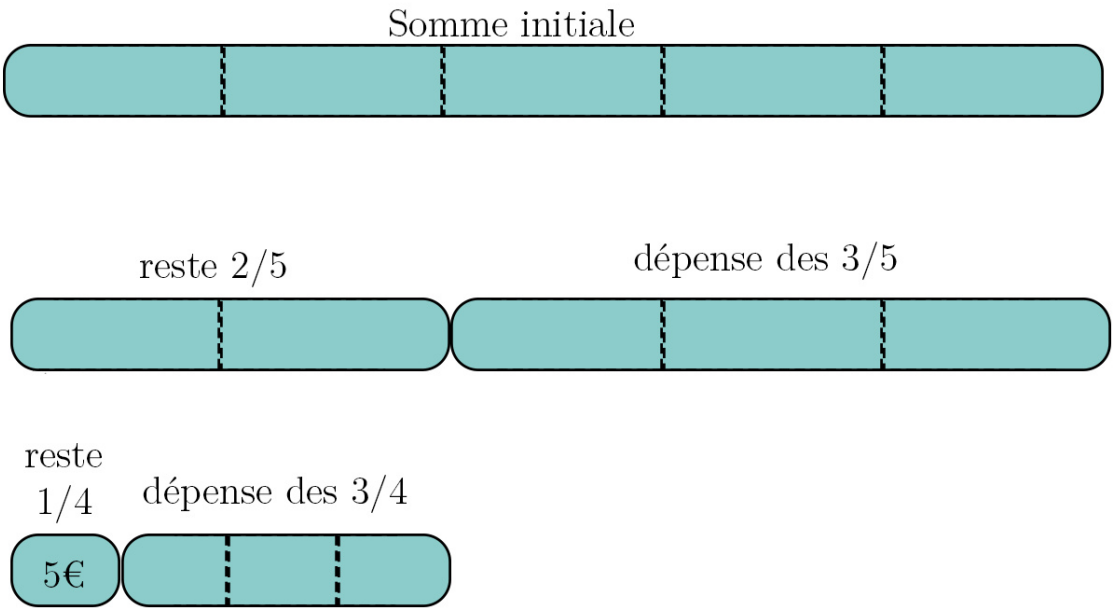


Enfin, nous simplifions uniquement $\frac{2}{20}$ et nous obtenons $\frac{1}{10}$ .Si les 5€ sont équivalents à $\frac{1}{10}$ alors l'état initial est égal à 50 € (10 fois 5 €).



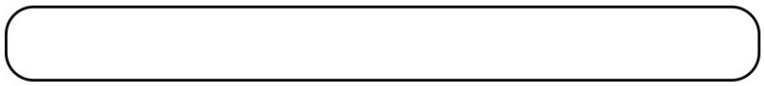
Optons désormais pour une modélisation en barre, plus simple à représenter dans ce cas. Chaque élément est représenté comme une portion du « tout » initial.

Chaque nouvelle fraction est représentée par rapport au « tout » dont elle est issue ; Cela permet de revenir au « tout » initial par induction.



Détaillons désormais par étapes ce que pourrait être une stratégie de modélisation et de résolution.

Point de départ :



La dépense des $\frac{3}{5}$ de la somme initiale.

Partage du reste en 4 parties égales pour la suite du problème.

La dépense des $\frac{3}{4}$ du reste précédent.

Partage du reste de la barre avec les mêmes éléments. Chaque partie initiale est séparée en 2 (création d'une barre avec des dixièmes)

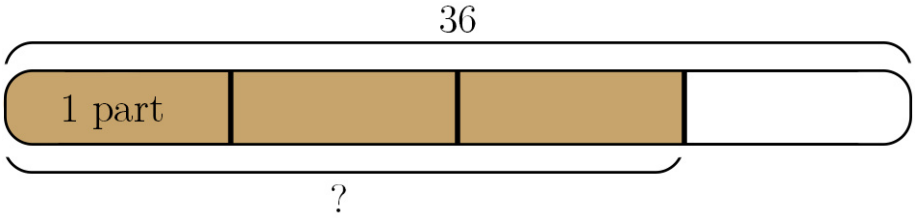
Les 5 € qui restent sont donc équivalents à $\frac{1}{10}$ donc la barre, dans sa totalité, vaut 50€.

Dans le cas particulier des problèmes avec des fractions, la représentation en barres semble être la plus abordable pour représenter progressivement les parties imbriquées et construire la valeur d'une fraction dans une fraction. Dans ce problème, la compréhension de l'histoire avec les pertes successives n'est pas la source du blocage observé. Le blocage vient de l'incapacité à percevoir la fraction comme une partie d'un tout abstrait ainsi que de la difficulté à appréhender la notion de fraction de fraction. Le modèle en barre permet de rendre visible la construction des quantités du problème car c'est le point essentiel dans ce cas précis.

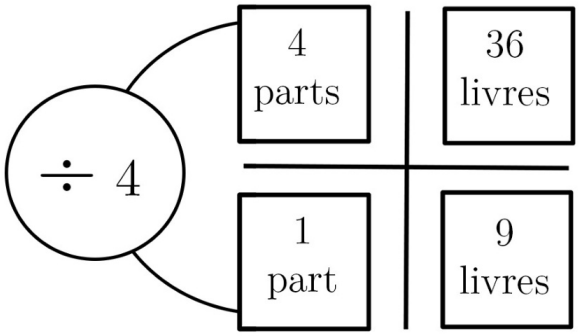
Autre cas :

« Dans la bibliothèque de la classe il y a 36 albums. Les élèves ont étudié les $\frac{3}{4}$ *de ces albums. Combien d'albums ont été étudiés par les élèves ? »*

Représentons tout d'abord visuellement la situation avec un modèle en barre, car la perception par l'élève de ce que représente la fraction n'est pas toujours aisée.

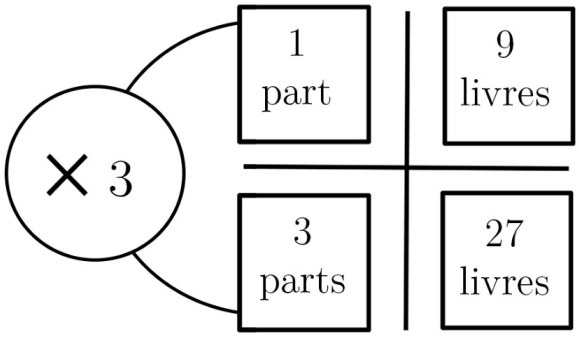


Pour trouver la valeur des $\frac{3}{4}$ des 36 albums, l'étape la plus abordable de prime abord est la recherche de la valeur d'une part avant de chercher la valeur de 3 parts. Nous sommes donc ici dans une situation de proportionnalité avec établissement d'un rapport entre les parts recherchées. Cette situation qui peut se représenter ainsi :



4 parts sont équivalentes à 36 livres donc 1 part équivaut à 4 fois moins de livres. Nous utilisons un schéma présenté précédemment pour représenter la première étape et ce qu'elle implique.

Une fois la valeur d'une part établie, il est aisé de déterminer la valeur de 3 parts.



1 part équivaut à 9 livres donc 3 parts sont équivalentes à 3 fois plus de livres. Nous utilisons encore le schéma pour représenter la situation.

Cette représentation nous permet de traiter ce problème comme un simple problème de proportionnalité. Le schéma bilan serait celui-ci :

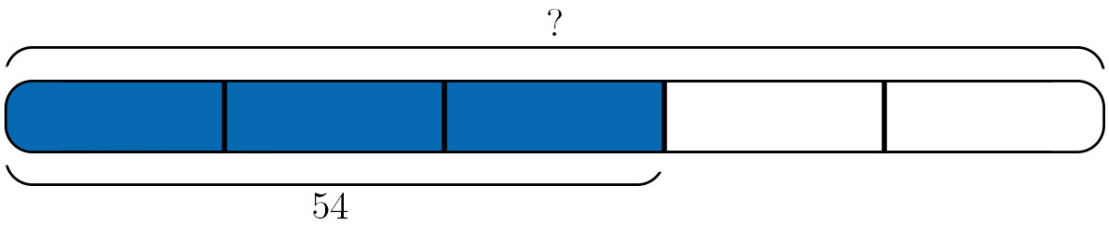
3	27
4	36

Si 4 parts représentent 36 livres alors 3 parts représentent 27 livres. Et l'on remarque alors que $\frac{3}{4}$ n'est que la fraction réduite de $\frac{27}{36}$.

Autre cas :

« Miranda mange les $\frac{3}{5}$ de ses bonbons. Elle a mangé 54 bonbons. Combien de bonbons avait Miranda au départ ? »

Représentons encore une fois visuellement la situation avec un modèle en barre.



Nous réutilisons les schémas représentant les situations de proportionnalité :

3 parts	54
1 part	18

3 parts sont équivalentes à 54 bonbons donc 1 part équivaut à 3 fois moins de bonbons. Le passage part l'unité permet d'établir qu'une part vaut 18 bonbons.

Une fois la valeur d'une part établie, nous pouvons déterminer la valeur des 5 parts initiales.

1 part	18
5 parts	90

1 part équivaut à 18 bonbons donc 5 parts sont équivalentes à 5 fois plus de bonbons. Nous obtenons donc 90 bonbons comme quantité initiale.

Voici le schéma bilan :

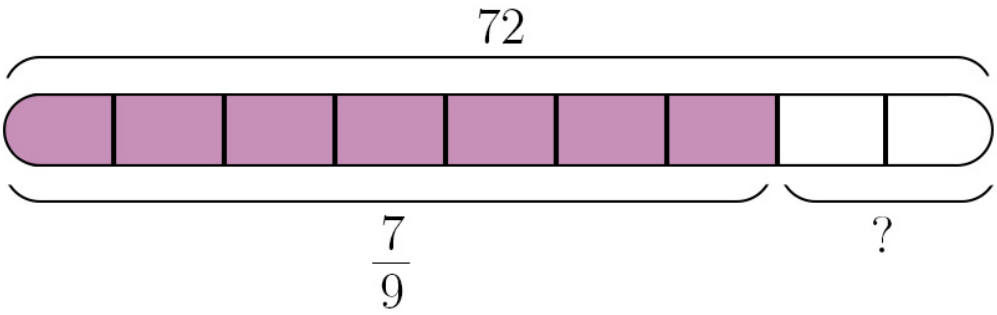
3	54
5	90

$\frac{3}{5}$ et $\frac{54}{90}$ sont des fractions équivalentes. Miranda mange 3 bonbons sur 5. Comme elle a mangé 54 bonbons, elle avait donc 90 bonbons au départ.

Autre cas :

« Nolan a 72 perles. Il donne $\frac{7}{9}$ de ses perles à sa petite sœur Lina et le reste à sa grande sœur Camille. Combien de perles Nolan a-t-il donnés à Camille ? »

Représentons encore une fois visuellement la situation avec un modèle en barre.



Nous connaissons la quantité initiale : 72 perles, la perte : $\frac{7}{9}$ des 72 perles et donc la

quantité finale sous forme fractionnaire : $\frac{9}{9}$ - $\frac{7}{9}$ = $\frac{2}{9}$. Si Nolan donne $\frac{7}{9}$ de ses perles à Lina, il donne donc $\frac{2}{9}$ de ses perles à Camille.

Nous réutilisons les schémas représentant les situations de proportionnalité :

9 parts	72
1 part	8

9 parts sont équivalentes à 72 perles donc 1 part équivaut à 9 fois moins de perles. Le passage part l'unité permet d'établir qu'une part vaut 8 perles

Une fois la valeur d'une part établie, nous pouvons déterminer la valeur des 2 parts de Camille.

1 part	8
2 parts	16

1 part équivaut à 8 perles donc 2 parts sont équivalentes à 2 fois plus de perles. Nous obtenons donc 16 perles pour Camille.

8 Notre approche au cycle 2 et au cycle 3

La progression adoptée dans notre projet était initialement basée sur une progressivité des apprentissages préalablement établie dans le document présenté dans le préambule de cet ouvrage et basé sur les travaux de G. VERGNAUD. Cette progression « brute » a été largement réadaptée pour permettre l'étude complète des différents types de problèmes additifs et multiplicatifs sur les 5 années du CP au CM2. Nous avons également modifié cette progression afin d'aborder plusieurs types de problèmes d'une même catégorie en parallèle pour éviter une application sans réflexion (Automatisation d'un « geste » et pas une réflexion sur la structure et le sens) et sans confrontation entre les catégories, ce qui aurait pu être le cas lors d'une étude trop séquentielle. Comme nous l'avons détaillé précédemment, nous privilégions l'étude en parallèle des problèmes a structure additive (addition et soustraction) et des problèmes a structure multiplicative (multiplication et division). Nous avons également retravaillé cette progression afin d'aborder très progressivement tous les types de problèmes, additifs et multiplicatifs, du cycle 2 au cycle 3 en revenant sans cesse sur les catégories déjà étudiées pour approfondir le travail d'explicitation et d'automatisation des procédures de résolution. Nous avons donc détaillé une typologie des problèmes multiplicatifs, avec sa progressivité et ses schémas testés en classe pour l'inclure dans le projet. La progression tient aussi compte des faits numériques, des techniques opératoires. En effet, il ne s'agit pas ici d'une progression mais du tissage de multiples progressions en une progression globale sur 5 années. Il y a progressivité sur le champ numérique (les quantités mises en jeu, sans nuire au sens du problème), sur les algorithmes de calcul, sur la catégorisation et sur l'implicite des énoncés. Nous introduisons également les quatre opérations très progressivement dès le CP pour les remobiliser en situation tout au long du projet.

Brièvement, nous pouvons découper les 5 années en 3 étapes.

CP-CE1 : Découverte. Entraînement méthodologique. Différenciation entre Composition et Transformation. Problèmes multiplicatifs simples.

CE1-CE2-CM1 : Découverte, approfondissement et méthodologie. Différenciation progressive entre les 4 types additifs. Découverte et approfondissement pour les types multiplicatifs.

CM1-CM2 : Découverte, approfondissement, systématisation et méthodologie. Différenciation des types additifs et multiplicatifs, catégorisation plus poussée, problèmes complexes.

8 - 1 Progression pour le CP

La résolution de problèmes au CP est une activité récurrente, ritualisée et évolutive car liée à l'entrée de l'élève dans la lecture. Le CP est donc la classe qui va voir s'allier deux entrées, une orale et une écrite, et qui vont s'articuler progressivement au long de l'année. La résolution de problèmes arithmétiques ne se réduit pas à une lecture d'énoncés, dans ce cas la résolution de problèmes au CP débuterait au mois de janvier avec les premiers lecteurs. Au contraire, il est essentiel de se confronter à des situations arithmétiques et de débuter l'apprentissage de stratégies dès le début de l'année pour remobiliser en situation tous les aspects de la construction du nombre qui sont étudiés en classe. Nous débutons généralement l'année au CP par la lecture d'histoires du quotidien où nous cherchons les aspects mathématiques pour résoudre ce qui apparaît comme une énigme pour les élèves ou tout simplement en cherchant une solution à un problème arithmétique posé sous forme d'histoire très courte. Nous cherchons à rendre visible le « modèle » caché dans des situations mathématiques quotidiennes comme faire l'appel, noter les présents et absents, etc. D'un rituel professionnel vers un rituel mathématique. Chaque lecture ou histoire est propice à l'explicitation du « comment » de la résolution. L'enseignant tisse les liens de la discussion entre les élèves pour les amener vers la plus grande précision quant aux stratégies tout en reformulant si besoin pour assurer un « cadre » de compréhension accessible à tous.

Cette recherche, dans les situations quotidiennes, est induite par le fait qu'une connaissance partielle d'une situation nécessite, pour sa compréhension globale, l'utilisation des informations parcellaires. Cette histoire se transforme progressivement avec eux en histoire mathématique en symbolisant chaque étape, chaque relation et en faisant émerger un modèle de structure. Le schéma final permet une lecture « mathématique » de l'histoire. Ce n'est plus l'histoire illustrée initiale mais pas encore l'équation brute et abstraite. Le modèle est cet entre-deux qui aide à faire la transition. Cette base sera utilisée à chaque séance pour reprendre le vocabulaire, indiquer ce que nous savons et ce que nous cherchons. Le but de l'activité est, à long terme, le repérage progressif des structures sous-jacentes dans les problèmes et l'acquisition de stratégies pour résoudre

Concernant les problèmes multiplicatifs, les schémas n'y sont pas encore formalisés (car nous le faisons progressivement au CE1 pour approfondir au CE2) mais nous pouvons aborder tout le travail de conceptualisation et d'ordonnancement des données et informations. Nous faisons en sorte que l'élève rencontre ces situations de manière

progressive et axe son travail sur la compréhension du problème et de l'opération sous-jacente (qu'est-ce qu'une multiplication ? Une division ?). L'élève de CP va donc rencontrer dès le mois de septembre des problèmes de multiplication et de division mais qui mettent en jeu des grandeurs qu'il peut concevoir. Tout cela de manière progressive en faisant évidemment le lien avec la construction du nombre via les 4 opérations (nous parlons d'opérations dans le sens « signe de construction » pas dans le sens « algorithme opératoire »). Cette progression est une base de travail, elle évolue à mesure des analyses et est une possibilité parmi d'autres, nous travaillons actuellement avec une progression qui nous semble la plus pertinente tout en étant ambitieuse.

Note de l'auteur : Cette progression que nous présentons n'est pas obligatoirement celle en vigueur dans les fichiers de l'école. À chaque version des fichiers, des modifications sont apportées en fonction des analyses des résultats des élèves et des commentaires des enseignants. Les problèmes de multiplication et de division sont par contre toujours abordés dès le début de l'année.

Progression	Type	Modélisation	Type	
Chapitre 1	1	5 —+3→ ?	1	1 5 / 3 ?
	3	8 —-3→ ?	2	1 ? / 3 15
Chapitre 2	5	3 —+?→ 8	1	1 5 / 3 ?
	6	8 —-?→ 3	2	1 ? / 3 15
Chapitre 3	1	? → 5, 3	1	1 5 / 3 ?
	2	8 → 5, ?	2	1 ? / 3 15
Chapitre 4	1	5 —+3→ ?	1	1 5 / 3 ?
	5	3 —+?→ 8	2	1 ? / 3 15
Chapitre 5	3	8 —-3→ ?	1	1 5 / 3 ?
	6	8 —-?→ 3	2	1 ? / 3 15
Chapitre 6	1	5 —+3→ ?	1	1 5 / 3 ?
	3	8 —-3→ ?	2	1 ? / 3 15
	1	? → 5, 3	1	1 5 / 3 ?
	2	8 → 5, ?	2	1 ? / 3 15
Chapitre 7	6	8 —-?→ 3	1	1 5 / 3 ?
	5	3 —+?→ 8	2	1 ? / 3 15
	1	? → 5, 3	1	1 5 / 3 ?
	2	8 → 5, ?	2	1 ? / 3 15

Exemple
Exemple

Cette progression est bâtie pour permettre d'aborder en parallèle, et au sein d'un même modèle, les structures additives et soustractives. Un même modèle est le support de plusieurs types de problèmes et nous choisissons donc une étude parallèle des types additifs et soustractifs dans les chapitres successifs.

L'étude purement séquentielle induit des comportements de répétition trop cloisonnants que nous voulons limiter au maximum pour approfondir l'aspect procédural des méthodes de résolution. La construction du nombre n'est pas unidirectionnel et l'étude parallèle de l'addition et de la soustraction puis de la multiplication et de la division permet d'appréhender le fait que le nombre se construit de multiples façons.

Une quantité n'est pas que la somme de quantités, elle peut aussi en être la différence, le reste, le produit, etc. Les chapitres 6 et 7 sont l'occasion de revoir les 4 types de transformations abordés en début d'année ainsi que les compositions pour renforcer la comparaison des modèles et la catégorisation.

Les élèves sont confrontés à une variabilité « intra-modèle », car le schéma est le support de 4 types. L'aspect primordial travaillé dans ces chapitres est la structuration logique et temporelle d'un problème ainsi que la caractérisation précise des éléments du modèle (état initial, transformation, état final par recherche des verbes et des indices lexicaux) pour le résoudre. L'identification sure et rapide des données connues et inconnues guide l'élève vers des procédures rencontrées et utilisées qui tendront à devenir automatisées.

Nous voulons éviter le calcul systématique avec les nombres donnés sans qu'il n'y ait de travail de compréhension et de construction de la résolution. Un élève non-lecteur pourrait trouver la solution d'un problème juste par systématisation, (si on ne propose que de l'additif) ce que nous voulons éviter. L'obligation de rechercher en mémoire les stratégies permet la fixation de celles-ci de manière plus « solide ». Nous insistons sur le fait que les « histoires mathématiques » ne sont pas unidirectionnelles. Il faut donc impérativement travailler la compréhension et la recherche d'indices.

Cette progression a été mise en place avec les élèves de CP qui sont habitués à un passage de l'un à l'autre. C'est alors le sens et la compréhension de l'histoire qui prend toute son importance car l'élève ne peut se contenter de poser une opération machinalement. En parallèle, la modélisation permet de structurer la démarche (ce que je sais, ce que je cherche, comment vais-je faire ?) et de pérenniser des méthodes de résolution efficaces. Nous nous axons alors sur la méthodologie avec la stabilisation d'outils de résolution pour les élèves. Cette progression proposée dans un fichier est une ossature autour de laquelle d'autres problèmes peuvent être proposés pour s'entraîner, modéliser, expliquer ou encore approfondir. On pourrait considérer cet outil comme une base sûre autour de laquelle l'enseignant peut ajouter d'autres éléments.

Pistes méthodologiques :

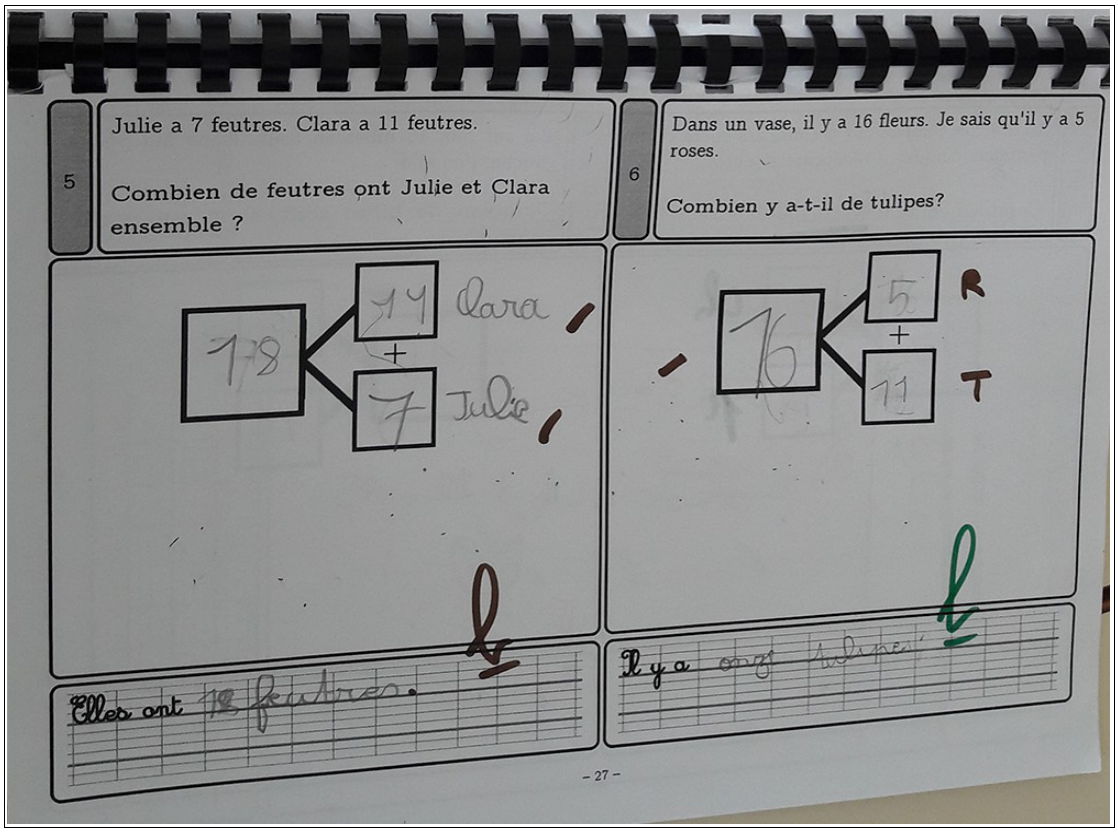
– Quels indices lors de la lecture du problème vont me permettre d'ordonner temporellement les informations et d'entamer une procédure de résolution ?

– Quels indices vont me permettre de modéliser la situation rencontrée s'il n'y a pas de situation temporelle. (compositions)

– Nous travaillons avec les élèves sur la résolution des calculs. Comment faisons-nous pour additionner des nombres ? Comment allons – nous soustraire des quantités ? Comment peut-on le « montrer » ? (matériel)

– Comment construire puis écrire une phrase réponse juste ? (production d'écrit)

Compositions d'états :



– Les élèves sont amenés à représenter les quantités de manière chiffrée mais aussi selon une représentation symbolique avec des « ronds » ou « carrés » pour les unités et des « barres » pour les dizaines. Cela est lié à l'utilisation, lors d'activités de numération, de représentations identiques pour symboliser les nombres. Cette représentation est basée sur l'utilisation de matériel Lubienska ou de réglettes cuisenaires.

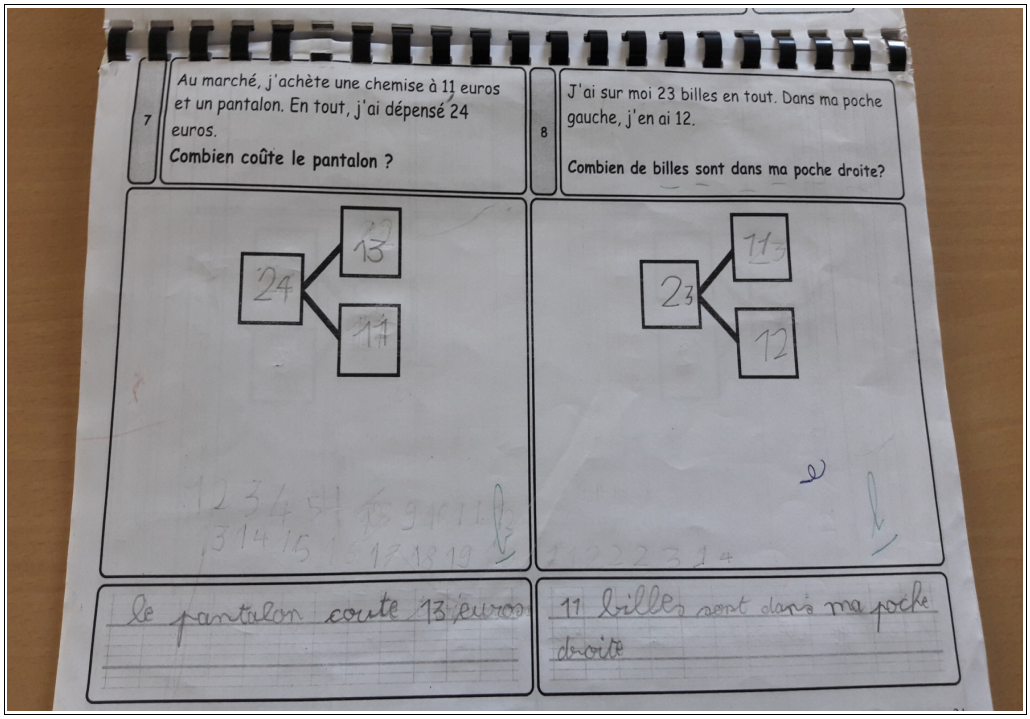
Cette représentation est proposée en début d'apprentissage, en lien avec la numération

et s'il y a un besoin de l'élève. Il s'agit aussi d'une trace du raisonnement de l'élève.

– La rédaction de la phrase réponse est une partie non négligeable du travail de résolution. Les élèves sont guidés vers une production autonome de phrases valides. Ainsi, les premiers problèmes proposent une phrase réponse ou l'élève complétera avec la solution. Ensuite l'élève se verra proposer des amorces de phrases pour terminer avec des phrases complètes à rédiger. La progression est liée à la progression en lecture et production d'écrits et surtout en lien avec la production orale de réponses construites. Dès le début de l'année, une exigence forte porte sur la capacité de l'élève à produire oralement une réponse syntaxiquement correcte. Cette exigence va de pair avec un enseignement progressif de la restitution orale de réponses. L'exigence porte toujours sur ce qui est enseigné.

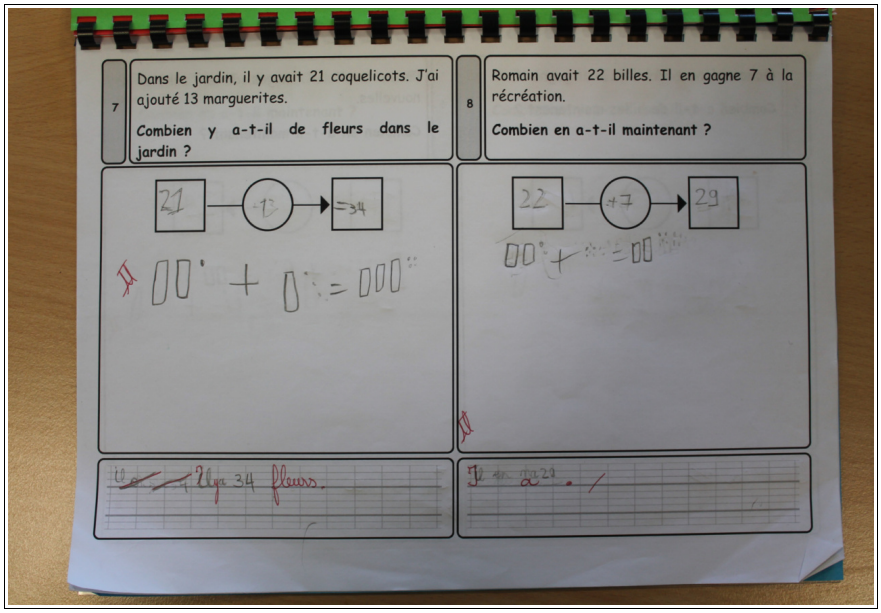
Exemple : « Combien y a-t-il de chaises ? »
Réponse 1 : « ~~21~~. » « ~~21 chaises~~. »
Réponse 2 : « Il y a 21 chaises. »

<u>Compositions d'états :</u>



Autre production d'élève. Des ratures, du gommage, des essais, on peut y voir le travail mené par l'élève. La production de la réponse est presque aboutie, il manque encore la majuscule et le point. Autant que possible, selon le temps disponible et le nombre d'élèves, nous demandons aux élèves de corriger leurs erreurs en les guidant sur la source de l'erreur.

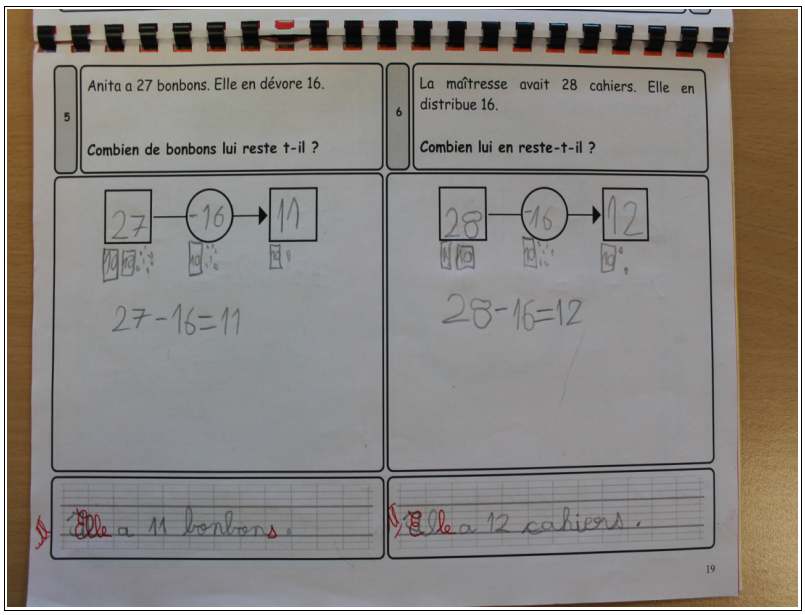
Transformation d'une mesure, transformation positive



– Nous pouvons encore observer la représentation des quantités par les nombres et par des symboles. Le travail de décomposition et de recomposition des nombres est systématique.

– Ce type de problème est abordé au tout début de l'année aussi la rédaction de la phrase est encore une tâche très complexe pour la majorité des élèves. On y retrouve néanmoins les premiers éléments importants.

Transformation d'une mesure, transformation négative :

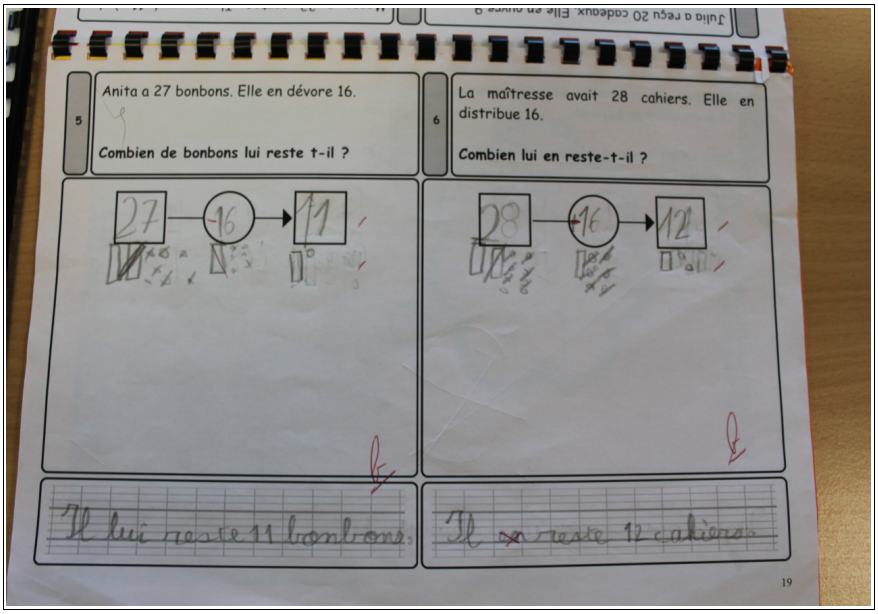


– Ici l'élève insère le « 10 » dans chaque « barre » pour faciliter la décomposition.

C'est une stratégie observée par certains élèves et que nous pouvons proposer aux autres si cela permet une meilleure compréhension des procédures de décomposition.

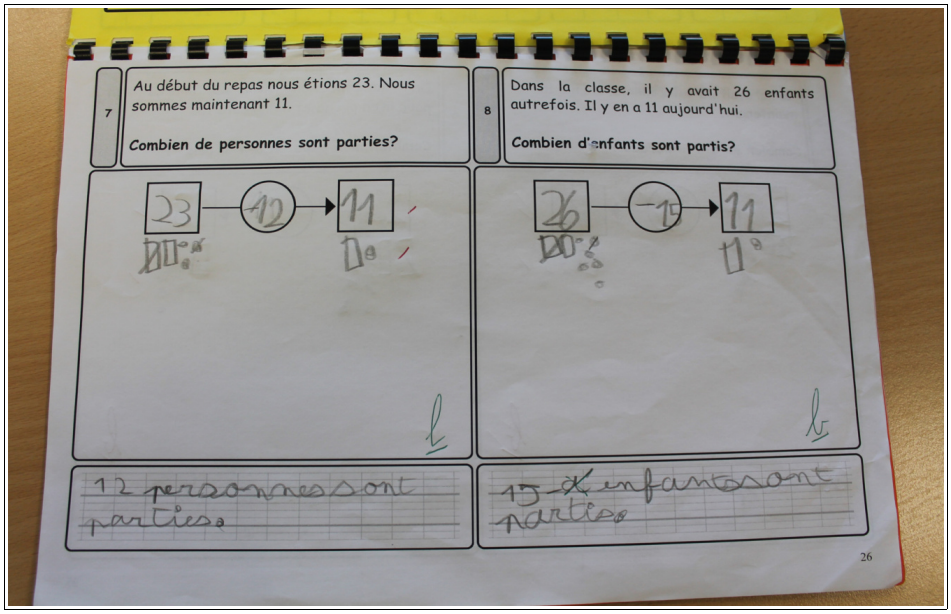
– Toutes les quantités sont représentées ici de façon à avoir une traduction graphique d'une manipulation mentale. Le fait d'ôter une quantité induit le fait d'en créer 2 distinctes. $27 - 16 = 11$ peut aussi se lire comme $16 + 11 = 27$. L'élève a encore besoin de voir, de représenter, la quantité qu'il manipule avant que celle-ci devienne abstraite et qu'il puisse faire cette manipulation mentalement

<u>Transformation d'une mesure, transformation négative :</u>



– Voici les mêmes problèmes que précédemment mais avec une stratégie de résolution différente. Pour représenter la soustraction, l'élève barre la quantité à enlever et représente ainsi le reste. Le fait d'ôter une quantité est alors symbolisé de manière concrète.

Transformation d'une mesure, recherche de la transformation négative :

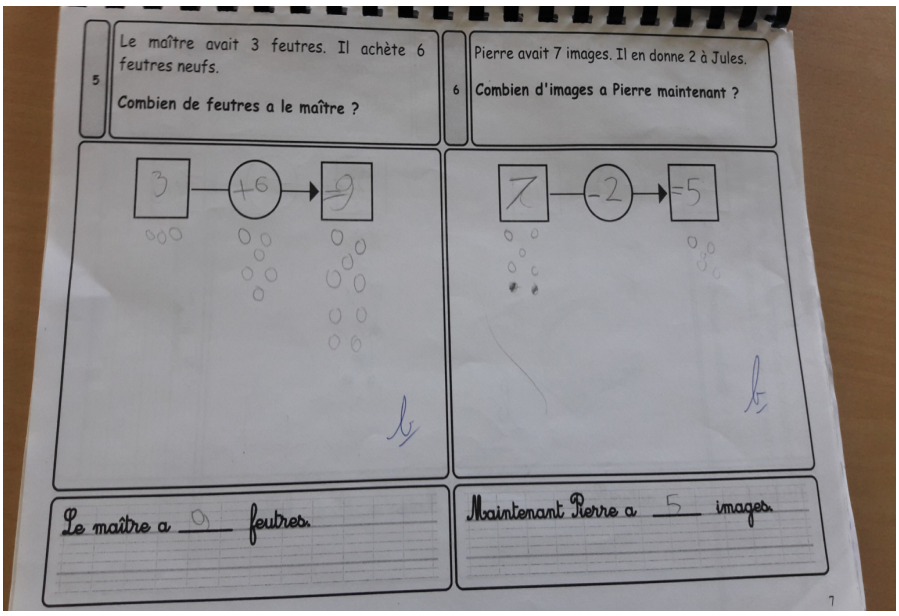


– La difficulté provient du fait que la transformation est inconnue, l'élève de CP est rarement confronté à une histoire dont il ne connaît que le début et la fin. Les indices « début » et « maintenant » permettent cibler les informations connues : les états initiaux et finaux. L'élève va pouvoir ensuite s'atteler à la résolution du problème proposé.

– L'élève indique sous forme symbolisée les quantités initiales et finales. Il barre ensuite autant d'éléments que nécessaire dans la quantité initiale pour obtenir la quantité finale. Il obtient alors la quantité soustraite et donc la transformation négative opérée. Cela nous permet de représenter dans l'état initial le reste de l'état final.

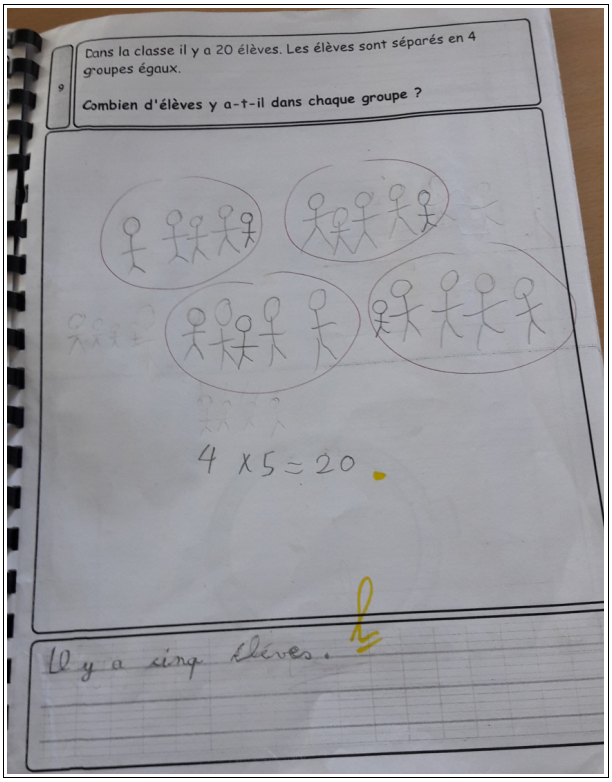
– La phrase réponse est réalisée de manière autonome.

Transformation additive ou soustractive :



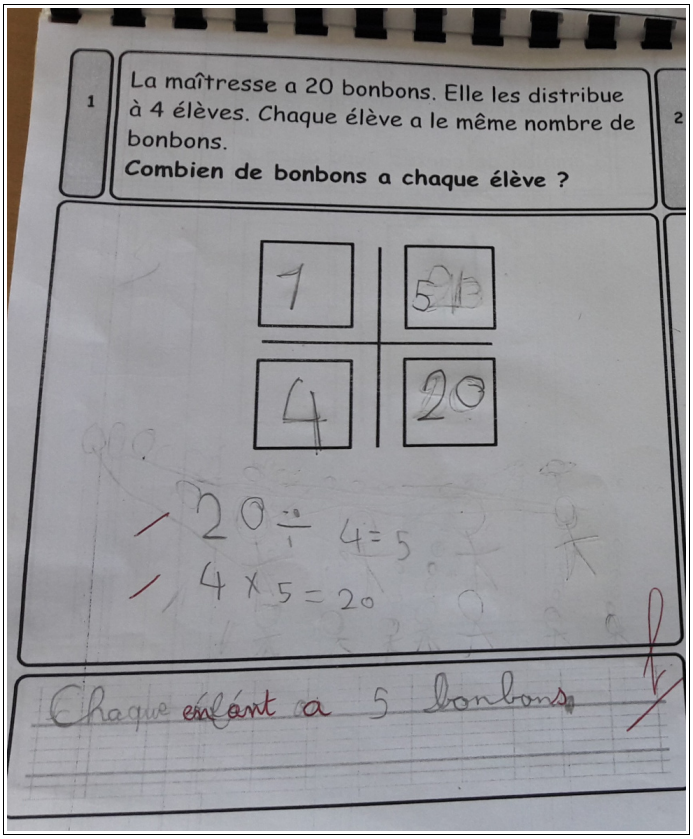
Ce travail est celui d'un élève en début d'année scolaire. Il y a l'écriture chiffrée ainsi qu'une représentation par des constellations pour s'aider. Pour la soustraction, l'élève représente le retrait en barrant les cercles. La phrase réponse est déjà proposée, mais il faudra compléter avec la donnée recherchée.

Multiplication et division :



Division partage réalisée par un élève de CP. L'élève rajoute une multiplication comme justification de sa modélisation.

Tous les chapitres des fichiers de CP de la version actuelle proposent des situations de multiplication et de division dès le début de l'année pour familiariser les élèves avec ces situations. N'oublions pas que les élèves travaillent quotidiennement la construction du nombre avec ces opérations.



Cette fois-ci il y a utilisation su schéma comme support d'explicitation pour amener l'élève à verbaliser et noter les relations entre les grandeurs du problème.

Une double égalité est proposée par l'élève. Ce schéma n'est utilisé de manière systématique, c'est plutôt l'inverse. Au cas par cas, selon les élèves, il peut être une ressource pour expliciter et montrer les liens entre les données.

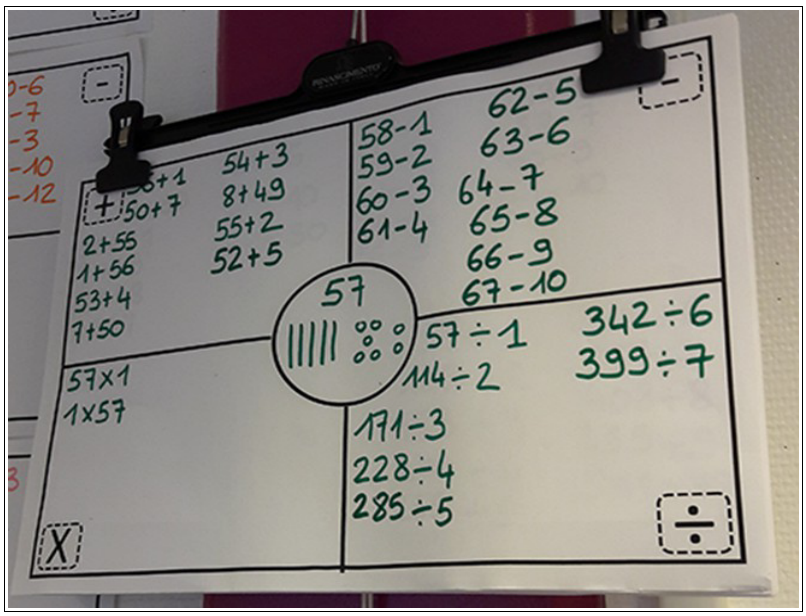
Comme nous le montrons, la construction du nombre ne se borne pas à l'addition et la soustraction. Il ne s'agit pas ici de calcul posé, mais de comprendre qu'un nombre peut se décomposer de multiples manières en faisant intervenir l'addition, la soustraction, la multiplication et la division.

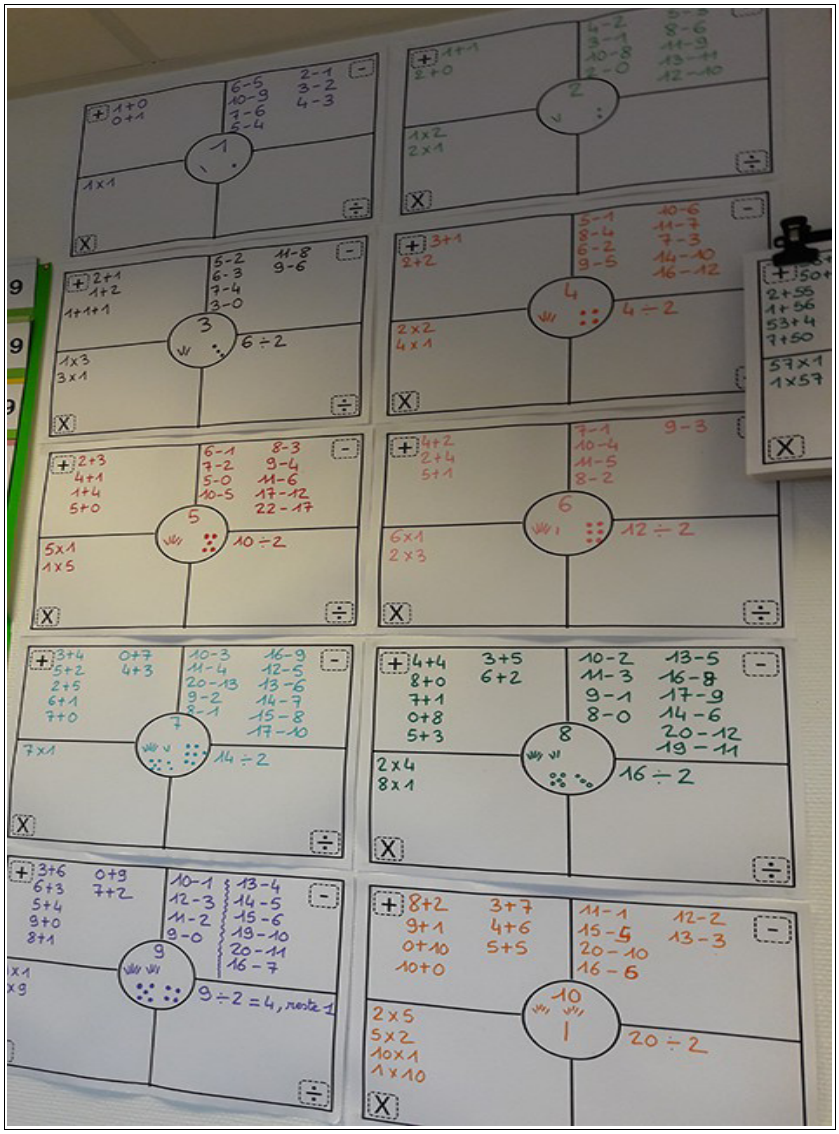
Prenons l'exemple du 6 :

6 = 1+5, 2+4, 3+3, 4+2, 5+1… 6 = 7-1, 8-2, 9-3, 10-4…
6 = 2 × 3, 3 × 2, 6 × 1… 6 = 12÷2, 18÷3…

Le travail effectué en numération, en permettant de saisir toutes les possibilités combinatoires à l'œuvre dans la construction du nombre permet d'accéder très rapidement au sens et à la maîtrise de la résolution de problèmes de multiplication ou de partage. Nous rappelons que cela se fait de manière très progressive en prenant notre temps sur les 10 premiers nombres. Les résultats de nos élèves aux évaluations départementales CP semblent indiquer que ce choix est pertinent (Voir le chapitre *résultats aux évaluations*)

Ces affiches ont été réalisées par les élèves de CP. Elles sont également dans leur cahiers au format adapté. Un nombre se construit, se décompose et se recompose en utilisant les 4 opérations. Les élèves travaillent cette construction régulièrement.


54+3
8+49
55+2
52+5
2+55
1+56
53+4
7+50
58-1
59-2
60-3
61-4
62-5
63-6
64-7
65-8
66-9
67-10
57
57÷1
114÷2
342÷6
399÷7
171÷3
228÷4
285÷5
57x1
1x57


6÷2
4÷2
10÷2
12÷2
14÷2
16÷2
9÷2 = 4, reste 1
20÷2

Jour 57 : Des élèves proposent des calculs et des divisions qui font 57 après avoir calculé le double de 57. Si je rajoute 57, j'ai donc 1 fois de plus 57. Je peux donc diviser ce résultat par le nombre de fois que j'additionne 57. **L'enseignante n'écrit que les propositions des élèves. L'affichage réalisé est leur affichage.** Rassurons les lecteurs, tous les élèves ne proposent pas ces opérations. L'objectif premier est une bonne maîtrise des compositions et décompositions pour les nombres jusqu'à 20 avant d'aller au-delà. Il y simplement dans toutes les classes des élèves qui veulent se confronter à une plus grande difficulté, c'est aussi une occasion pour la classe d'en retirer des enseignements.

Le rôle du bilan dans la séance :

Le bilan régulier systématique (Autant que possible, mais en pratique cela peut être variable) permet plusieurs choses pour l'enseignant, l'élève et la classe. Cette pratique est transférable à tous les niveaux mais se déroulera en fonction de l'expertise des élèves. C'est un temps court, concis et ciblé sur les besoins des élèves et les observations des enseignants. Le bilan n'est pas la libre parole des élèves, c'est un échange entre l'enseignant et les élèves, réguler pour remobiliser les savoirs rencontrés, utilisés et à renforcer. L'enseignant est toujours le garant de la validation des propositions des élèves, car il agit en qualité d'expert. L'enseignant articule les échanges pour aider les élèves à lier les concepts et connaissances, il engage les élèves car tous ne voudront pas s'exprimer devant les camarades mais toujours pour leur apporter les outils nécessaires. Dans l'idéal ce temps bilan est régulier. Mieux vaut le formaliser pour ne pas l'oublier et lui accorder un temps nécessaire, même si des aléas subsistent.

- **Cibler les besoins des élèves.**

Que va-t-il manquer pour résoudre tel ou tel problème ? Quelle aide sera nécessaire ? Quel renforcement sera nécessaire ? Quelle notion devra être consolidée ? La parole est donnée aux élèves pour cibler les besoins précis et établir un « plan d'action ». Les besoins sont notés et le travail nécessaire est alors mis en place, s'il n'a pas été entamé. Les besoins seront divers et la mise en œuvre d'une remédiation ouvre la possibilité de créations d'ateliers, de travail en demi-groupe ou de tout autre pratique visant à personnaliser si besoin l'enseignement et l'apprentissage pour les rendre plus efficaces. Un affichage du bilan est un support pertinent. En plus du bilan, la pratique du FeedBack est essentielle pour assurer un retour immédiat sur la justesse des stratégies utilisées par l'élève. Le FeedBack engage l'élève sur la voie de l'analyse de ses démarches.

- **Transmettre les pratiques efficaces rapidement.**

Toute pratique efficace et pertinente se doit d'être présentée et explicitée aux élèves. Chaque difficulté rencontrée doit pouvoir être surmontée de la manière la plus efficace

possible, ce qui implique un transfert de savoir et de savoir-faire. Les techniques employées par les élèves sont donc analysées pour déterminer la pertinence de leur emploi mais l'enseignant est aussi celui qui est garant de la transmission de connaissances « sûres » et « solides » sans « tourner autour du pot ». Il n'est pas raisonnable d'attendre des élèves qu'ils découvrent seuls les manières les plus efficaces de résoudre. Certains élèves le peuvent, mais ce n'est malheureusement pas généralisable à tout un groupe qui profitera bien plus d'une explicitation structurée et directe. La finalité étant que ces élèves puissent par la suite accéder seuls à de nouvelles connaissances.

Chacun peut être force de proposition. Chaque erreur permet d'affiner sa démarche. Ainsi il ne faut chercher à éviter l'erreur mais à la comprendre et la surpasser.

— **Croiser les observations des enseignants.**

Chacun peut compléter les observations de l'autre dans le cas d'une co-intervention, reprendre les erreurs rencontrées, rebondir sur les remarques de l'enseignant ou des élèves. L'un des enseignants peut proposer un début de remédiation ou d'approfondissement d'une notion abordée. Le bilan croisé est une opportunité pour évoquer les pistes qui nécessitent une vigilance de l'enseignant. Il est aussi l'occasion de mettre en avant les réussites des élèves, d'encourager, de motiver de faire visualiser le chemin parcouru et le chemin à parcourir.

Dans le cas d'une action en demi-groupes séparés, le bilan est l'occasion de confronter les pratiques et de transmettre encore une fois celles qui seront les plus efficaces et pertinentes. Le bilan n'est pas simplement une discussion autour du travail des élèves, l'enseignant doit également proposer des solutions plus expertes et les démontrer pour montrer aux élèves ce qui était encore possible. Un affichage du bilan des demi-groupes peut aider à confronter les travaux des élèves toujours dans l'optique de l'efficacité et de l'explicitation mais cela doit être bref et précis, le temps est précieux. Le transfert peut se faire de manière dialoguée entre les élèves et les enseignants. Le compte rendu du bilan peut être annoncé à un autre groupe lors de la séance suivante comme base de départ de la séance. Toutes les modalités sont possibles, il faut simplement viser l'efficacité et la réussite des élèves et donc moduler si besoin les interventions en s'autorisant une variété d'approches pédagogiques.

8 - 2 Des pistes pour débuter au CP

Ce projet de travail autour du domaine « résolution de problèmes arithmétiques » se veut le plus guidant et rassurant possible pour les enseignants qui souhaiteraient travailler selon cette démarche. De même, le principe même de la démarche est d'enseigner très progressivement, petits pas après petits pas, aux élèves les stratégies efficaces de résolution. Au Cp, bien avant de proposer aux élèves de travailler sur le fichier, il est essentiel de prendre le temps de manipuler en profondeur les problèmes arithmétiques. Nous entendons pas là le fait de manipuler (mentalement et pas seulement physiquement) des quantités liées à des mesures (des nombres concrets) afin de modéliser toutes les interactions entre ces quantités.

Il existe du matériel de qualité qui permet cela et nous l'utilisons pour travailler tous les aspects implicites de la « manipulation ». Les modèles structuraux (les schémas) servent alors de support sur lequel la manipulation des quantités va avoir lieu. Ces modèles schématiques sont le « décor » du problème et le matériel de numération représente les acteurs dirigés par les élèves.

Cette entrée permet un passage progressif rassurant vers une représentation plus abstraite. Attention, la manipulation en elle-même est déjà une entrée dans l'abstraction, car le matériel utilisé, même s'il est dit « concret », sert à modéliser une quantité qui n'est pas la quantité « vraie ». Des cubes pour manipuler peuvent représenter une quantité de pommes, de billes, d'euros, etc. La « manipulation » concerne ici une première modélisation mentale de la situation, une première organisation structurée de la situation par l'élève, qui va être aidé pour se « faire le film » de la situation afin qu'il puisse entrer progressivement vers une abstraction forte codée par les signes mathématiques lors de la mise en équation.

Cette approche permet à l'enseignant de vérifier fréquemment les stratégies des élèves, d'enseigner les stratégies efficaces concrètement avec les élèves pour les élèves, d'avoir un support pour expliciter, pour guider et étayer, pour faire verbaliser les élèves. Nous présenterons des illustrations de cette approche que nous pratiquons quotidiennement ainsi que d'autres approches plus classiques mais néanmoins envisageables selon les approches pédagogiques privilégiées par les enseignants.

Au Cp, l'élève peut être non lecteur, lecteur expérimenté ou encore débutant. Il semblait alors important de proposer quelques outils, quelques pistes pour le lancement des séances ou des ateliers de résolution de problèmes. Il n'y a évidemment aucune prescription de notre part sur la pratique pédagogique des enseignants qui sauront adapter à leur élèves les propositions et supports présentés dans cet ouvrage. Néanmoins, nous

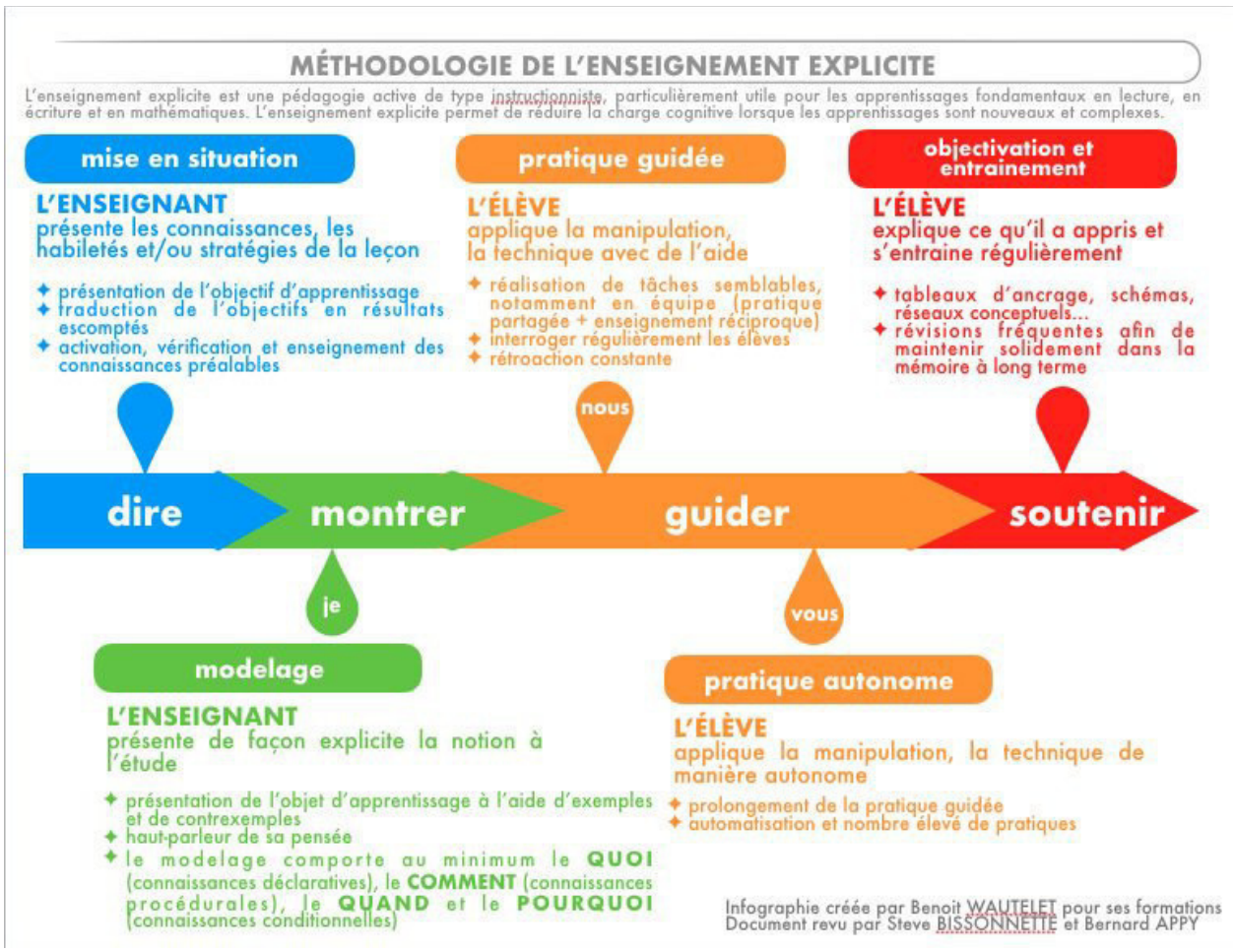
préciserons toujours aux enseignants l'approche qui selon nous, dans le contexte qui est le nôtre, est la plus efficace. Cet avis que nous émettons est fondé sur des centaines d'heures de pratique de la résolution de problèmes avec des centaines d'élèves de Cp durant plus de 6 années dans le contexte scolaire qui est le nôtre. Nous avons donc été attentifs aux points suivants : les résultats obtenus par les élèves à diverses évaluations, les retours des enseignants concernant leurs élèves années après années, le taux d'élèves en grande difficulté scolaire, la réussite globale des élèves, le coût pour l'enseignant (expérimenté et débutant), les bénéfices pour l'élève.

Nous présenterons également quelques grands invariants pour garder la cohérence du projet du cycle 2 au cycle 3. Des exemples seront proposés pour expliciter les procédures de résolution et comment il est possible d'aborder certains types de problèmes avec les CP en utilisant les supports (fichiers) après avoir proposé une approche initiale sans fichier. Cela nous permet de montrer à chaque fois le travail nécessaire sur le lexique, la numération et le calcul. Ces domaines étant intimement liés lors de la résolution de problèmes Attention, les données numériques sont données à titre d'exemple pour permettre une meilleure illustration de ce qu'il serait possible de faire avec les élèves. Ainsi, si l'enseignant fait le choix d'aller plus loin avec ses élèves, de modifier les quantités (grandeurs en jeu dans les énoncés), de proposer des algorithmes de calcul (soustraction posée), nous donnons quelques exemples afin d'avoir des pistes si cette situation se présentait.

Nous présenterons ci-après quelques photographies illustrant une approche possible, utilisée par l'auteur quotidiennement pour manipuler, apprendre à modéliser et verbaliser ses stratégies de résolution. Nous précisons également que l'auteur, dans sa pratique auprès des élèves, notamment avec les Cp, organise les ateliers de résolutions selon la méthodologie de l'Enseignement Explicite. Pour présenter cette modalité nous utilisons l'infographie suivante, réalisée par Benoît WAUTELET[1] [2]. Cette approche n'est pas exclusive ni excluante, nous y reviendrons, mais intégrée dans un continuum d'interventions pédagogiques qui peuvent varier selon l'objet d'apprentissage. Dans le cadre précis de l'apprentissage de stratégies de résolution et de modélisations efficaces, pour des élèves qui débutent dans l'étude d'un domaine fondamental, cette approche est très pertinente. Elle est très progressive, guidante pour l'élève, ne surcharge pas sa mémoire de travail, l'amène vers une capacité de résolution autonome et efficace mais surtout va mettre en confiance l'élève qui voit sa réussite et ses progrès.

1Enseigne la méthodologie de la langue française en formation initiale des instituteurs en Belgique francophone (Haute Ecole Louvain en Hainaut —Braine-le-Comte). Auteur pour les pages "Enseignement" du quotidien "La Libre Belgique".

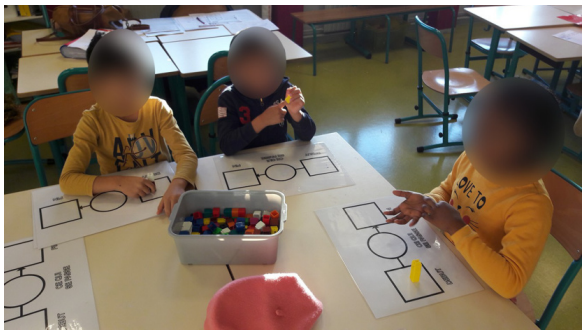
2 Auteur de « Bingo ! » chez DeBoeck

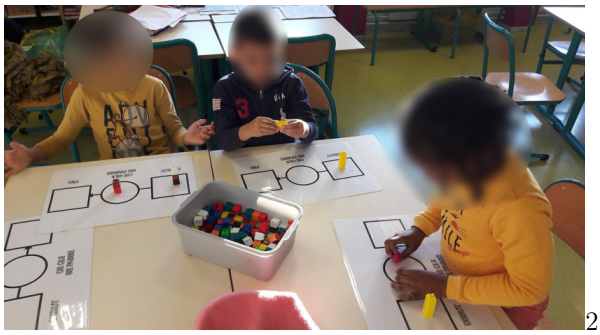


Les élèves sont en atelier de 4 à 6 élèves avec l'enseignant. Les autres élèves sont sur des ateliers qui ne nécessitent pas la présence constante de l'enseignant. Ces ateliers ont lieu tous les matins pendant 45 minutes.

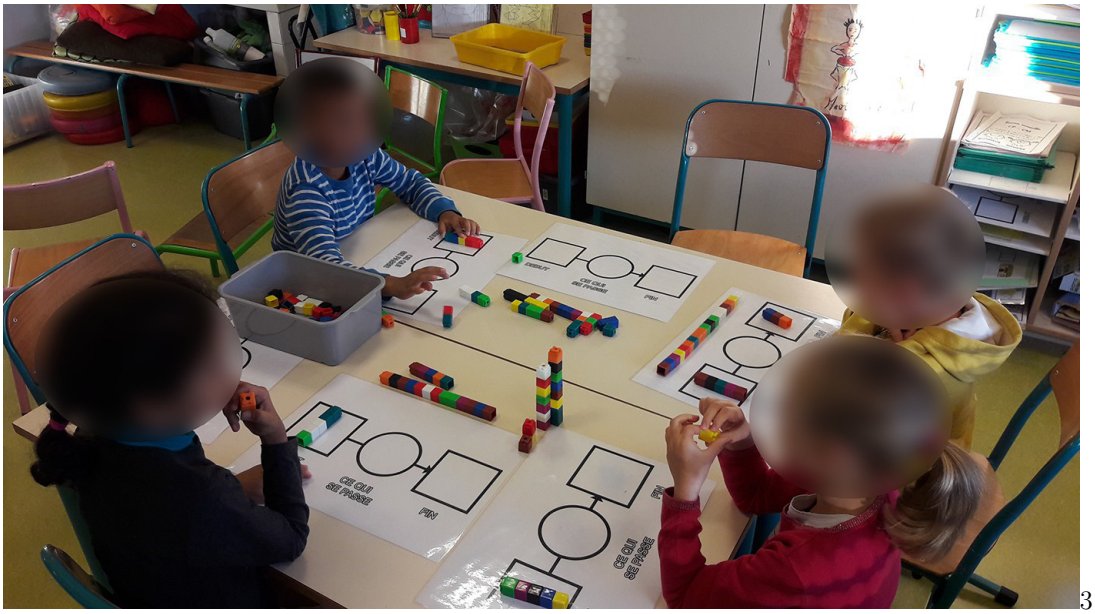
Les élèves sont positionnés autour de la table, l'enseignant également. Tous les élèves disposent de supports pour organiser les données, les manipuler et surtout verbaliser les

procédures. L'enseignant dispose du même matériel afin de pouvoir modéliser les stratégies. L'enseignant donne l'énoncé des problèmes puis explique, manipule, montre et verbalise toutes les étapes essentielles de la résolution. Il réalise l'activité avec les élèves en les questionnant pendant la phase de manipulation afin qu'ils disent le « pourquoi » et le « comment ». Le travail pourrait être individuel mais le choix est fait ici d'être dans une approche coopérative, car contrairement aux idées reçues il est tout à fait possible de proposer une méthodologie de type Enseignement Explicite avec une approche coopérative de l'activité des élèves. La pratique guidée s'enrichit alors des interactions entre les élèves, car elles sont au bénéfice de toutes et tous.


1


2

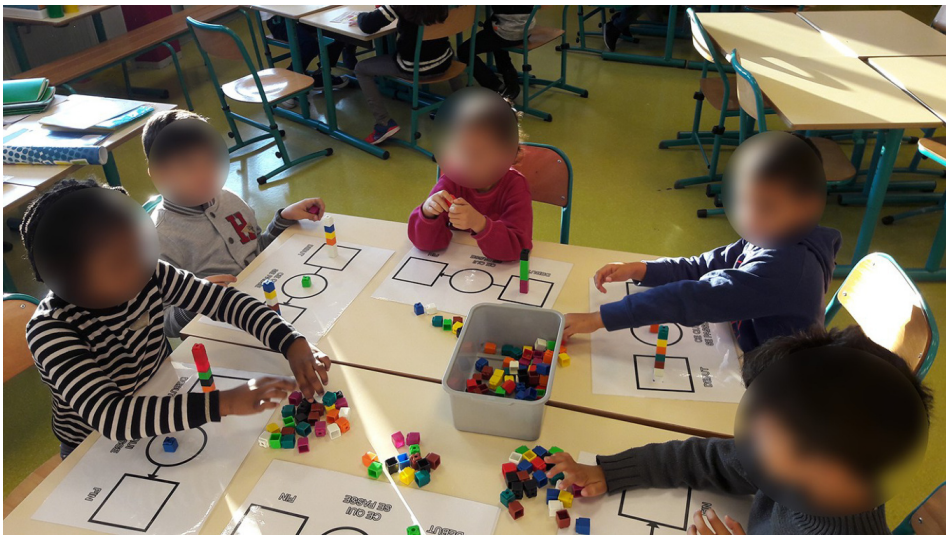
Documents 1 et 2 : Les élèves résolvent en s'appuyant sur la méthodologie auparavant présentée et confrontent leurs réalisations pour justifier et expliquer avec l'aide de l'enseignant. De très nombreuses situations sont proposées. Ici, les problèmes sont des transformations positives ou négatives.



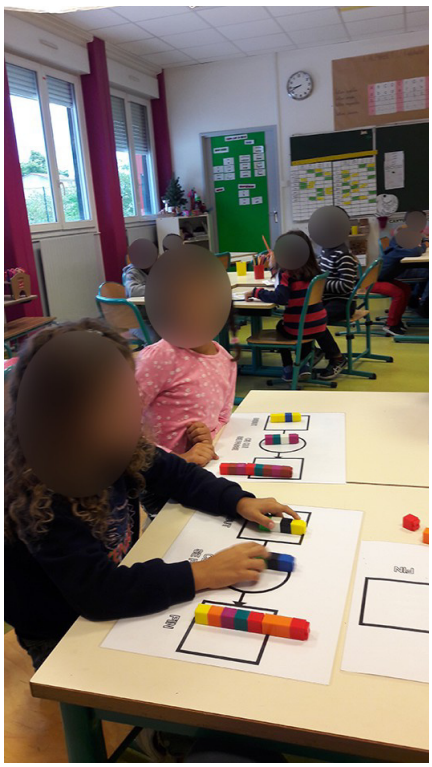
3

Document 3 : Au fil des semaines les élèves peuvent être amenés à manipuler des quantités plus importantes. Cela est fait progressivement pour permettre à l'élève de

différencier la structure du problème des quantités du problème. La reconnaissance structurelle progressive permet de faciliter la compréhension de la situation et d'entamer une procédure de résolution sans se laisser prendre au piège de l'habillage des grands nombres. Nous évitons ainsi petit à petit les écueils du type *« Je ne comprends pas le problème »* alors que la compréhension n'est pas le réel problème de l'élève. L'écueil est numérique et masque aux yeux de l'élève la structure. La focalisation numérique de l'élève lui fait oublier l'essentiel : la construction sémantique de l'énoncé et la traduction mathématique de sa structure. La progressivité est le point clé, mais il ne faut pas minorer le fait que mettre au point une telle progression n'est pas aisé et demande du temps.



Les groupes d'élèves sont variables afin de permettre les interactions entre tous les élèves de la classe. Ils sont également hétérogènes.

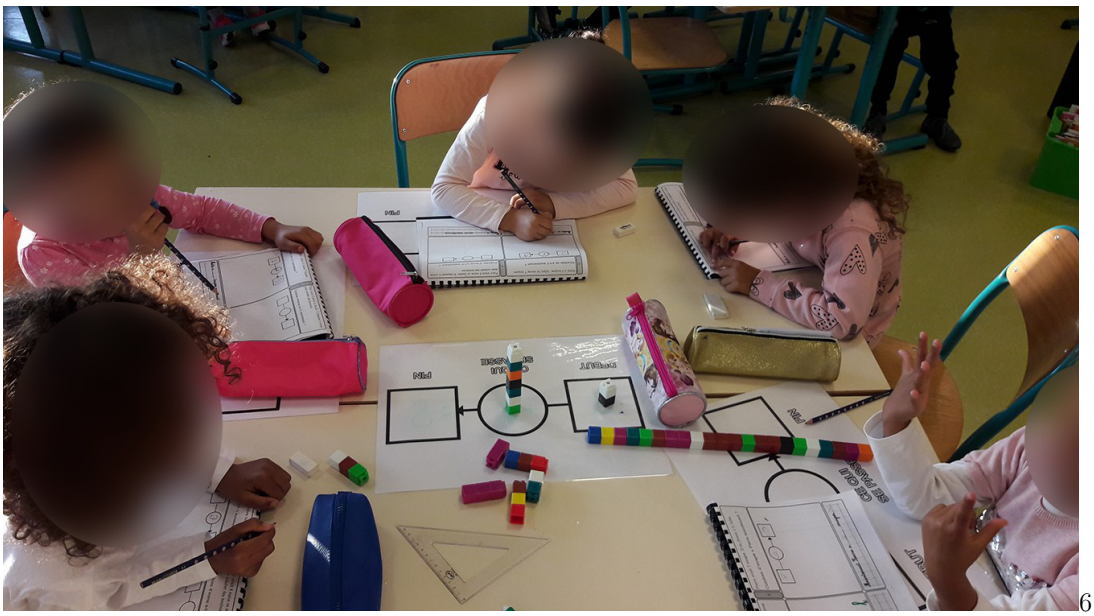

4

5

Documents 4 et 5 : Les élèves confrontent leurs modélisations avant d'expliciter le « comment » de la résolution.

5

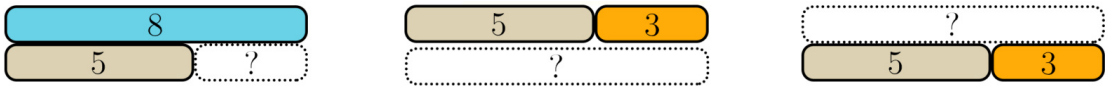
Document 5 : Un élève résous le problème devant ses pairs, modélise son cheminement avant validation et reprise de l'activité par tous les autres élèves.



6

Document 6 : Période 2, des élèves résolvent sur le fichier mais avec le support de manipulation et le matériel. L'enseignant lit le problème si les élèves sont non lecteurs. Les problèmes sont abordés en coopération pour que les élèves puissent affermir leurs capacités à résoudre et verbaliser les stratégies. Les élèves sont dans une phase guidée et coopérative avec un étayage de l'enseignant moins prégnant. L'étape suivant sera une résolution autonome ou en binôme mais avec présence de l'enseignant pour donner des retours à l'élève sur sa production et étayer si cela est nécessaire.

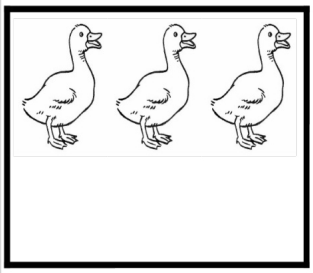
Les documents qui vont suivre sont quant à eux très classiques dans la mise en œuvre. Il s'agit d'une proposition de préparation de quelques séances sur le thème du codage de l'histoire mathématique. Ces documents ne sont pas des « modèles » mais des pistes pour les enseignants qu'ils adaptent selon leurs élèves et les prérequis de ceux-ci. Chaque enseignant pourra en extraire les grands principes pour construire une séquence progressive au moment qui sera le plus opportun. Les objectifs et compétences seront à mettre en lien avec le document de synthèse sur les programmes, le socle et les compétences mathématiques ciblées. Ces propositions sont à associer avec les modélisations calculatoires suivantes :



Ces modélisation permettront de travailler sur la traduction langagière du problème et sur l'articulation des quantités entre elels.

Domaine :	**Mathématiques : Résolution de problèmes**
Niveau :	**CP**
Objectif :	Associer avec précision chaque élément d'une situation additive aux éléments d'un schéma. Modéliser une situation mathématique pour lier une phase concrète à une phase abstraite.
Durée :	45 minutes
Compétences 2008 : Calculer mentalement des sommes et des différences.	

Matériel : Grand tableau, feutres pour dessiner, marqueurs pour dessiner, images des éléments, feuilles vierges, craies.	**Vocabulaire** : Ajouter, au début, à la fin, plus, égal, schéma, ce qui se passe.

Durée	Démarche	Modalités
5'	**<u>1) Proposition : Débuter le récit d'une histoire qui sera le support de travail.</u>** *« Je vais raconter une histoire, une histoire mathématique. Il y a plusieurs sortes d'histoires mathématiques alors je vais commencer par vous raconter une histoire ou il y aura un début, un commencement, puis il se passera quelque chose et il y aura une fin. Il y aura aussi un mystère dans cette histoire, il faut être très attentif pour le résoudre »* Dessinez 3 canards en débutant l'histoire. *« Il était une fois 3 canards... »*  Comptez avec les élèves : *« 1, et encore 1 qui font 2 et 1 qui font 3 ».Faire remarquer la quantité.* Arrêtez-vous et coloriez un canard puis demandez : *« Combien y-a-t-il de canards ? »* S'il y a erreur, il y aura contradiction chez les élèves qui vont en débattre. Il suffit alors recompter jusqu'à obtention du 3.	Groupe classe en coin regroupement ou autour d'un grand tableau.

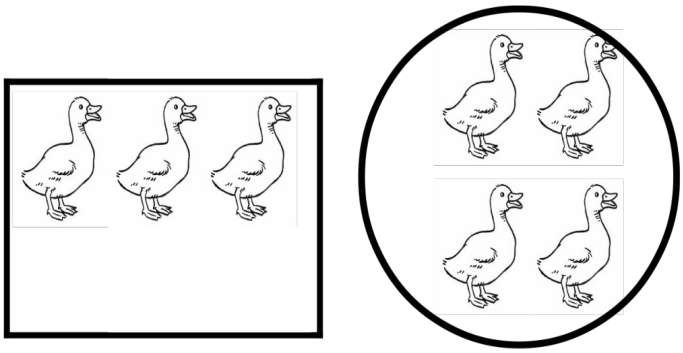
Continuez ainsi en coloriant les canards les uns après les autres puis en les comptant systématiquement pour finir sur *« la couleur est-elle utile ? » « Est-ce que cela change le nombre de canards ? »*

Le but étant la modélisation, il faut donc faire évacuer simplement par les élèves les stratégies les moins efficientes. Le dessin stylisé n'apporte rien, la couleur non plus. Le temps passé à représenter une situation de manière « réaliste » n'amène pas à une résolution plus efficiente. (le dessin est une aide, le dessin réaliste non)

Nous faisons porter l'attention sur les procédures efficaces.

2) Nous reprenons l'histoire : *« Il était une fois 3 canards dans une mare. Soudain, 4 canards arrivent. Ils rejoignent les 3 canards. »*

Dessinez les 4 canards à côté des 3 canards :



5' **3) Posez la question :** *« Mais alors… Combien y a-t-il de canards maintenant, à la fin de l'histoire ? »*

Laissez chercher les élèves puis demandez leurs réponses et leurs stratégies. Selon les propositions, vous pourrez plus ou moins rapidement faire émerger les informations utiles.

Certains diront : *« Il y a 5 canards. Il y a 4 canards. »* Il faut alors relancer le groupe, vérifier la cohérence et ne pas hésiter à répéter l'histoire et à faire répéter l'histoire.

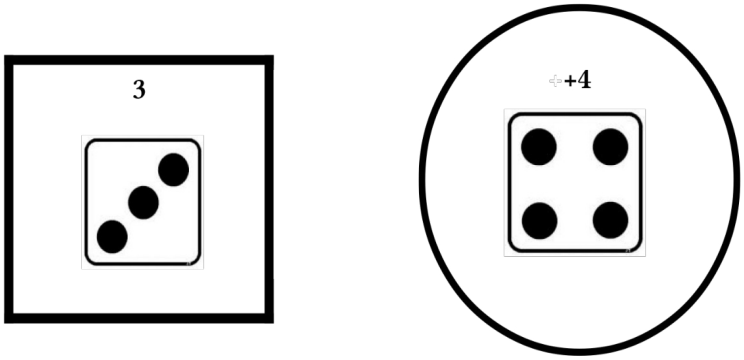
	Certains vont effectuer un calcul : *« Je sais que je dois faire 3 + 4, ça fait 7 »* *D'autres vont compter les canards dans leur ensemble.* **<u>4) Voici le moment pour faire représenter les canards par leur équivalent chiffré.</u>** *« Je voudrais faire vos calculs ou alors compter comme vous pour être sur de la fin de l'histoire mais j'ai peur d'oublier l'histoire et de me tromper… et puis je vais être obligé de dessiner beaucoup de canards pour mes calculs. Comment pourrai-je faire pour transformer cette histoire et ces dessins en histoire mathématique ? »* Relancer si besoin sur *« Est-ce que sur votre château des nombres ou sur une file numérique vous écrivez en* ***canard*** *? »* ***Réponse possible des élèves*** *: « Non ! On écrit avec des chiffres ! »* ***Proposition de l'enseignant :*** *« Nous allons écrire dessous les canards avec des chiffres ! Ces chiffres vont servir à représenter la quantité de canards »*	
10'	**<u>5) Du concret vers l'abstrait :</u>** Les élèves viennent écrire à la place des canards les chiffres mais nous ajoutons une condition. Il faut aussi écrire sous forme de constellation. (lien futur avec château des nombres, chaque jour compte et matériel Montessori, etc...) Maintenant que les quantités sont représentées, il faut faire émerger le schéma sous-jacent qui n'est pas encore terminé et plus tard le calcul. Reprenez l'histoire et demandez : *« J'ai écris les chiffres, comment je pourrai faire pour écrire que les canards arrivent ? Mais rappelez-vous, je dois écrire une phrase mathématique alors est-ce qu'il existe quelque chose dans les mathématiques pour écrire que je les* ***<u>ajoute</u>*** *? »* Selon les réponses, le « **plus** » émergera plus ou moins vite.	

<u>Exemple :</u> *« Si des canards arrivent, ça veut dire quoi ? » « Qu'est-ce qui change par rapport au début de l'histoire ? » etc.*

Le but est maintenant d'implémenter les signes (+ et =) traduisant la transformation présente dans le problème et de compléter l'histoire

5'

<u>6) À présent le tableau ressemble à ceci :</u>



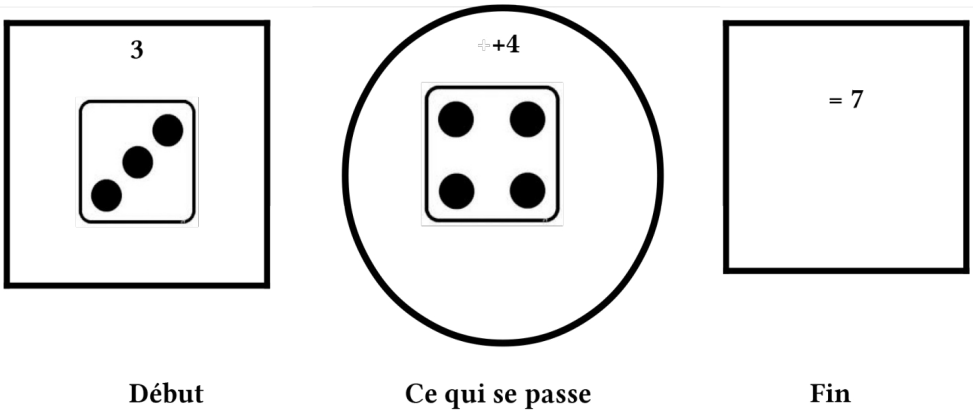
<u>7) Il ne reste plus qu'à écrire la fin de l'histoire :</u>

« Maintenant que j'ai écris ce que vous m'avez dit, combien y a-t-il de canards à la fin ? »

– Reprise des stratégies pour arriver à 7. (3+4=7) sur-comptage à partir de 3, sur-comptage à partir de 4, comptage des points etc. Il faut observer les stratégies et chercher ce qui est le plus efficace et le plus juste mathématiquement.

Insistez sur le « **égal** » selon qu'il soit proposé ou non par les élèves. Il marquera la fin de l'histoire.

Il suffit maintenant de compléter l'histoire mathématique en ajoutant les mots qui décrivent les situations. Chaque portion du modèle est signifiée et réexpliquée.



5' **<u>8) Le point est fait sur les carrés et le cercle</u>**.

Ils sont introduit progressivement à mesure que le schéma se construit. Ils sont introduit dès la représentation initiale dessinée. Nous en donnons la signification suivante aux élèves :

« Pour indiquer le début de l'histoire j'ai dessiné un carré, pour la fin également. Le carré est posé, il ne bouge pas. Cela nous permet de faire la différence avec ce qui se passe dans l'histoire.
Le cercle, lui, montre ce qui se passe, ce qui change, ce qui se transforme, un cercle ça tourne, ça roule (ballon). Donc s'il se passe quelque chose, c'est le cercle que nous utiliserons»
C'est une première définition qui ira en se précisant progressivement pour ensuite pouvoir expliciter ce que je sais, ce que je cherche et comment prendre en compte les indices textuels.

« Mais attention, rappelez-vous toujours : Je gagne ? Je perds ? Je donne ? Je prends ? Il faudra toujours me le montrer avec un signe mathématique : + ou - ce qui se passe dans mon histoire. »

Lorsque se présenteront, dans le même schéma, des configurations différentes, nous reprendrons le concept de gains et pertes qui n'induisent pas de manière systématique un calcul équivalent.

15'

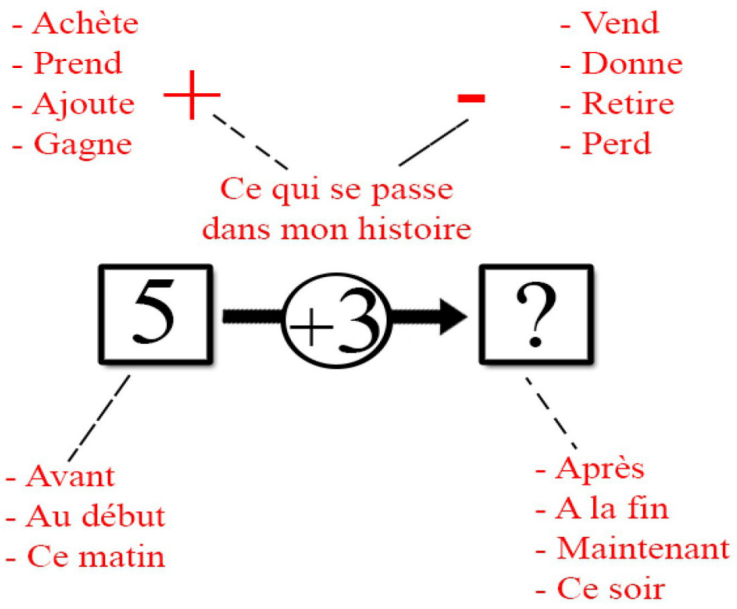
9) Prolongement :

À partir du schéma vierge, nous racontons désormais des histoires où nous connaissons le début, où nous inventons des événements avec des additions ou des soustractions. Nous systématisons l'écriture schématique et nous travaillons les techniques de calcul. Les élèves participent en imaginant des histoires avec des données numériques connues.

Nous faisons le maximum d'histoires avec des billes, des euros, des cartes etc. Nous essayons sur le brouillon, nous manipulons, nous confrontons les résultats et techniques employées pour évacuer ce qui ne fonctionne pas. Les élèves proposent des histoires avec des gains et des pertes. (quantités inférieures à 10)

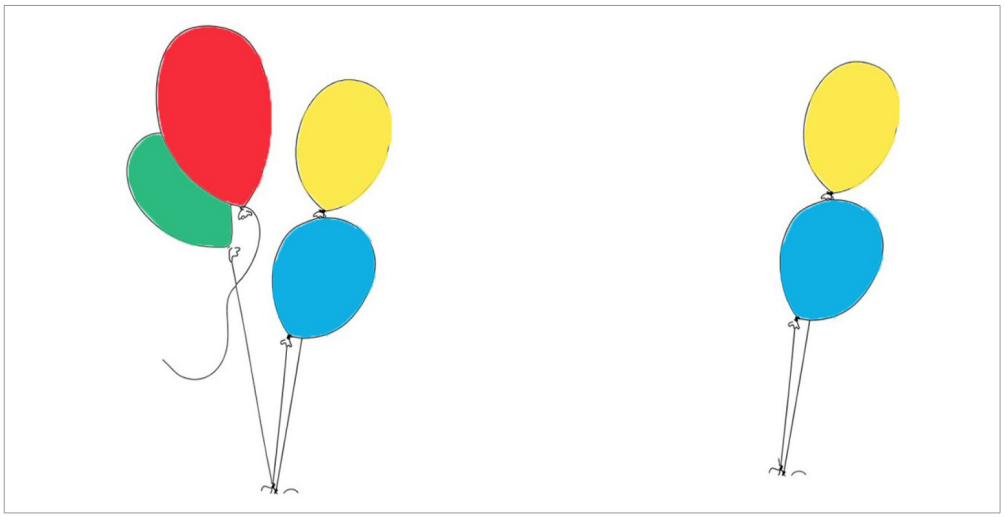
Le but est de garder le plus rapidement possible ce qui est efficace, ce qui marche et de le transmettre à toutes et à tous. Chaque séance débutera par une remise en mémoire systématique du vocabulaire, des techniques et des structures vues précédemment.

Schéma bilan de la démarche :

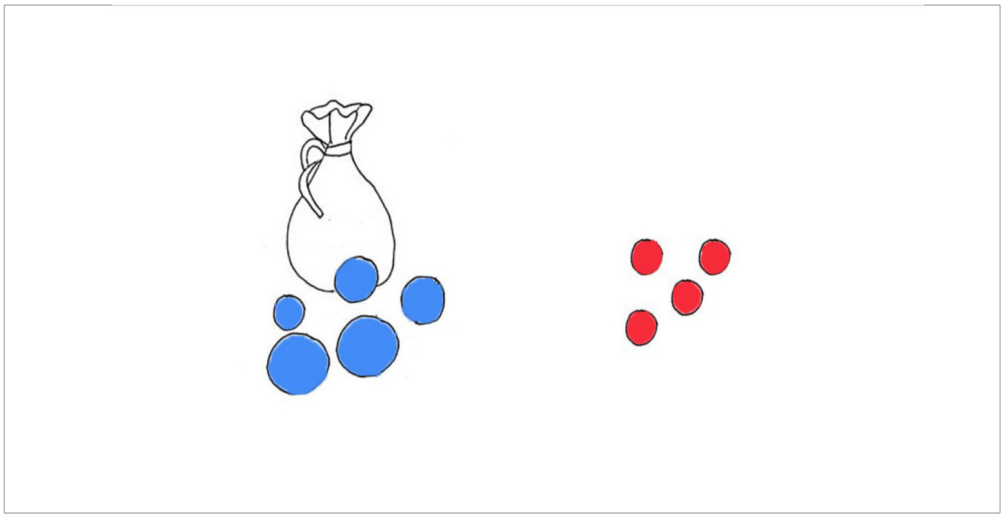


La modélisation des problèmes de transformation sera effectuée plusieurs fois en groupe classe puis de manière individuelle lors des phases de résolution.

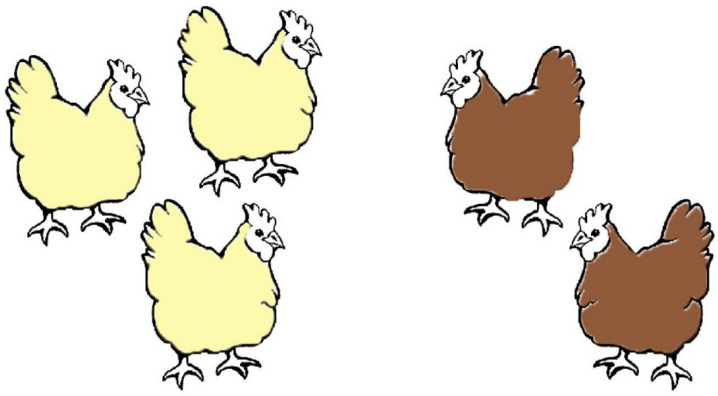
Modélisation à partir d'une illustration : Le but est que les élèves proposent des problèmes arithmétiques à partir d'une illustration. Ils peuvent proposer des problèmes de transformations ou de compositions.



J'ai 4 ballons, je perds des ballons, il me reste 2 ballons. J'ai perdu combien de ballons ?
J'ai 4 ballons, je rajoute 2 ballons. Combien ai-je de ballons ?
J'ai 4 ballons à gauche et 2 ballons à droite, combien de ballons en tout ?



Avec 5 billes bleues et 4 billes rouges, combien de billes ai-je en tout ?



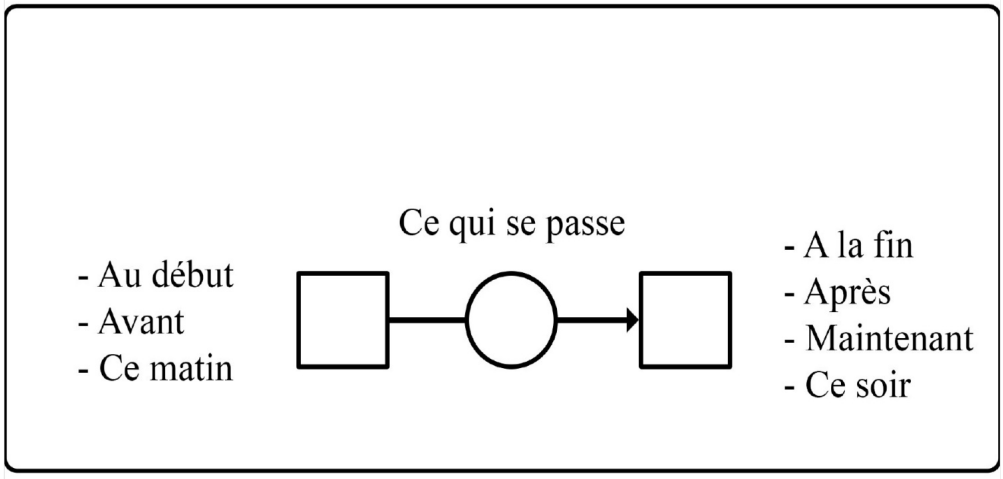
Dans le poulailler il y a 3 poules jaunes, 2 poules marron arrivent, combien ai-je de poules ?
J'ai 3 poules jaunes et 2 poules marron, combien ai-je de poules en tout ?

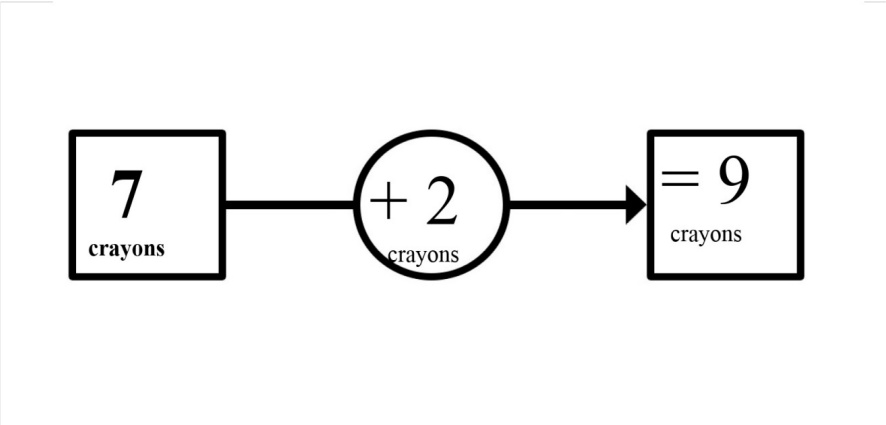
Il nous semble très important de pratiquer avec les élèves une phase orale d'explicitation autour des quantités, des relations et des procédures pour pouvoir ensuite expliciter sa démarche.

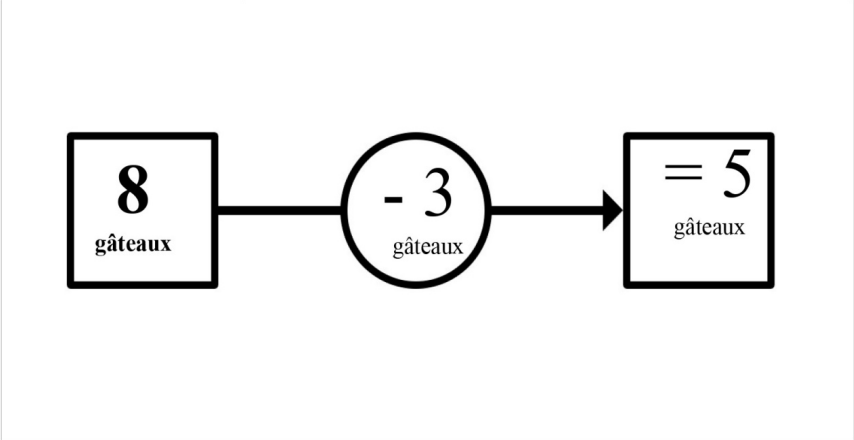
Nous montrons donc à l'élève comment détailler, comment expliciter, comment préciser les rapports entre les éléments, comment intégrer une relation de causalité.

Domaine :	**Mathématiques : Résolution de problèmes**
Niveau :	**CP**
Objectif :	Associer avec précision chaque élément d'une situation additive aux éléments d'un schéma. Modéliser une situation mathématique pour lier une phase concrète à une phase abstraite.
Durée :	45 minutes
Compétences 2008 : Calculer mentalement des sommes et des différences.	

Matériel : Grand tableau, feutres pour dessiner, marqueurs pour dessiner, images des éléments, feuilles vierges, craies.	**Vocabulaire** : Ajouter, au début, à la fin, plus, égal, schéma, ce qui se passe.

Durée	Démarche	Modalités
10 '	Reprise du schéma mis en place lors de la première séance :  **<u>1) Rappels :</u>** *« Nous avons parlé des histoires mathématiques. Nous avons vu que nous pouvons écrire avec des chiffres, des signes et un schéma une histoire que nous avons lue ou entendue »* *« Au début nous avions des dessins mais nous avons vu que cela ne nous aidait pas beaucoup. »* *« Nous avons aussi vu que nous pouvions écrire avec des chiffres ou des constellations. »* Le rappel va nous servir à reprendre tous ce qui est en place, ou non, chez les élèves avant de nous relancer dans l'étude de la modélistaion.	

10'	**<u>2) Reprise de l'activité avec guidage :</u>** *« Je vais vous raconter plusieurs histoires et nous allons nous entraîner à les écrire comme des histoires mathématiques. Nous chercherons à chaque fois le début, ce qui se passe dans l'histoire et la fin de l'histoire. »* *– « J'arrive ce matin à l'école avec 7 crayons, la maîtresse me donne 2 crayons. Combien de crayons ai-je maintenant ? »* L'histoire est racontée plusieurs fois par l'enseignant et les élèves. Chaque événement de l'histoire doit être ciblé et explicité par l'enseignant et les élèves. L'enseignant engage et relance les élèves, le feedback doit être immédiat, la ré-explicitation aussi mais elle est réalisée par tous les participants. – Quel est le début de l'histoire ? – Que se passe-t-il dans l'histoire ? Est-ce un gain ou une perte ? – Que cherchons-nous ? – Que pouvons nous faire pour trouver la fin ? Nous nous entraînons à justifier et expliciter la démarches, les relations. Le schéma est construit au tableau avec la participation des élèves et le guidage de l'enseignant. Chaque « bloc » du schéma est ciblé et détaillé quant à son placement et la représentation qu'il propose d'une situation de transformation.  Les représentations chiffrées des données du problème sont incorporées dans le modèle représentant l'histoire tout en gardant la représentation symbolique. Les constellations sont également représentées sous les données chiffrées. L'étape finale est le calcul avec la reprise des stratégies des élèves. – 7 + 2 = 9 « car je le sais » – 7 + 2 = 9 « Car je compte 7 sur mes doigts et je rajoute 2 sur mes doigts » – 7 + 2 = 9 « Car je compte tous les points des constellations » – 7 + 2 = 9 « Car je garde 7 dans ma mémoire et je rajoute 2 doigts »	Groupe classe

10'	**<u>3) Prolongement du guidage:</u>** *« Nous allons maintenant essayer d'écrire plusieurs histoires mathématiques directement dans le schéma et de chercher ensuite le mystère. »* Nous proposons un enchaînement de problèmes de transformation avec une transformation positive ou négative en ciblant toujours particulièrement la modélisation des situations. Il faut toujours bien déterminer les étapes chronologiques et la représentation (signe + ou -) des actions effectuées. *« Ingrid avait 8 gâteaux ce matin, elle mange 3 gâteaux durant la récréation. Combien de gâteaux lui reste-il ? »* L'histoire est racontée plusieurs fois par l'enseignant et les élèves. Chaque événement de l'histoire doit être ciblé. – Quel est le début de l'histoire ? – Que se passe-t-il dans l'histoire ? Est-ce un gain ou une perte ? – Que cherchons-nous ? – Que pouvons nous faire pour trouver la fin ? Le schéma est complété :  Le questionnement va porter sur la nécessité de représenter la perte de 3. Cette quantité doit-elle être représentée sous forme de constellation ? Elle est source d'erreurs, pas de manière systématique mais la représentation d'une perte, rendue visible, peut être assimilée à un gain par plusieurs élèves, car ils « voient » la quantité. Il conviendrait donc de faire porter l'attention sur la représentation active de la perte via un « barrage » dans la quantité initiale. Nous matérialisons le retrait de la quantité. – Dans la constellation de 8, je « retire, barre, etc », les 3. Le reste apparaît, il y a donc 5 gâteaux. L'étape finale est le calcul avec la reprise des stratégies des élèves.	Groupe classe

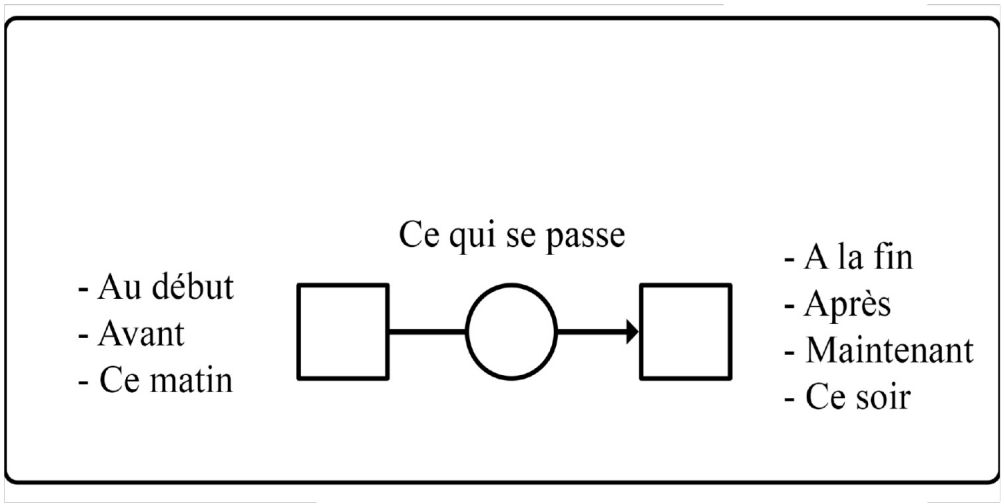
	– 8 - 3 = 5 « Car je le sais » – 8 - 3 = 5 « Car je montre 8 sur mes doigts et j'enlève 3 doigts » – 8 - 3 = 5 « Car je compte tous les points des constellations et je barre 3 alors il reste 5 » – 8 - 3 = 5 « Car j'ôte 3 de la quantité initiale, il reste 5 »	
15'	**<u>4) Pratique autonome :</u>** Plusieurs situations avec des gains ou des pertes sont proposées. L'objectif des élèves est, sur support, de tenter de représenter la situation énoncée via le schéma (état initial, action, état final) et les représentations chiffrées (chiffres et constellations). Avant même de nous pencher sur la recherche du résultat, nous portons notre attention sur la justesse de la représentation logique. Le calcul viendra à la suite de cette modélisation par les élèves. Le calcul est l'étape finale du processus de modélisation, c'est une mise en équation d'un problème. A ce moment, ce qui nous importe le plus est la compréhension des relations entre les quantité et comment représenter ces relations. **<u>Validation</u>** : <u>Le schéma devra se composer des 3 ensembles présentés. (état initial, transformation, état final)</u> <u>Les constellations et les écritures chiffrées seront placées judicieusement.</u> <u>Le résultat sera indiqué lui aussi.</u>	Groupe de 4 élèves ou autonomie.

<u>Bilan :</u>

Domaine :	**Mathématiques : Résolution de problèmes**
Niveau :	**CP**
Objectif :	Associer avec précision chaque élément d'une situation additive aux éléments d'un schéma. Modéliser une situation mathématique pour lier une phase concrète à une phase abstraite.
Durée :	45 minutes
Compétences 2008 : Calculer mentalement des sommes et des différences.	

Matériel : Grand tableau, feutres pour dessiner, marqueurs pour dessiner, images des éléments, feuilles vierges, craies.	**Vocabulaire** : Ajouter, au début, à la fin, plus, égal, schéma, ce qui se passe.

Durée	Démarche	Modalités
10 '	Reprise du schéma mis en place lors de la première séance :	



<u>1) Rappels :</u>

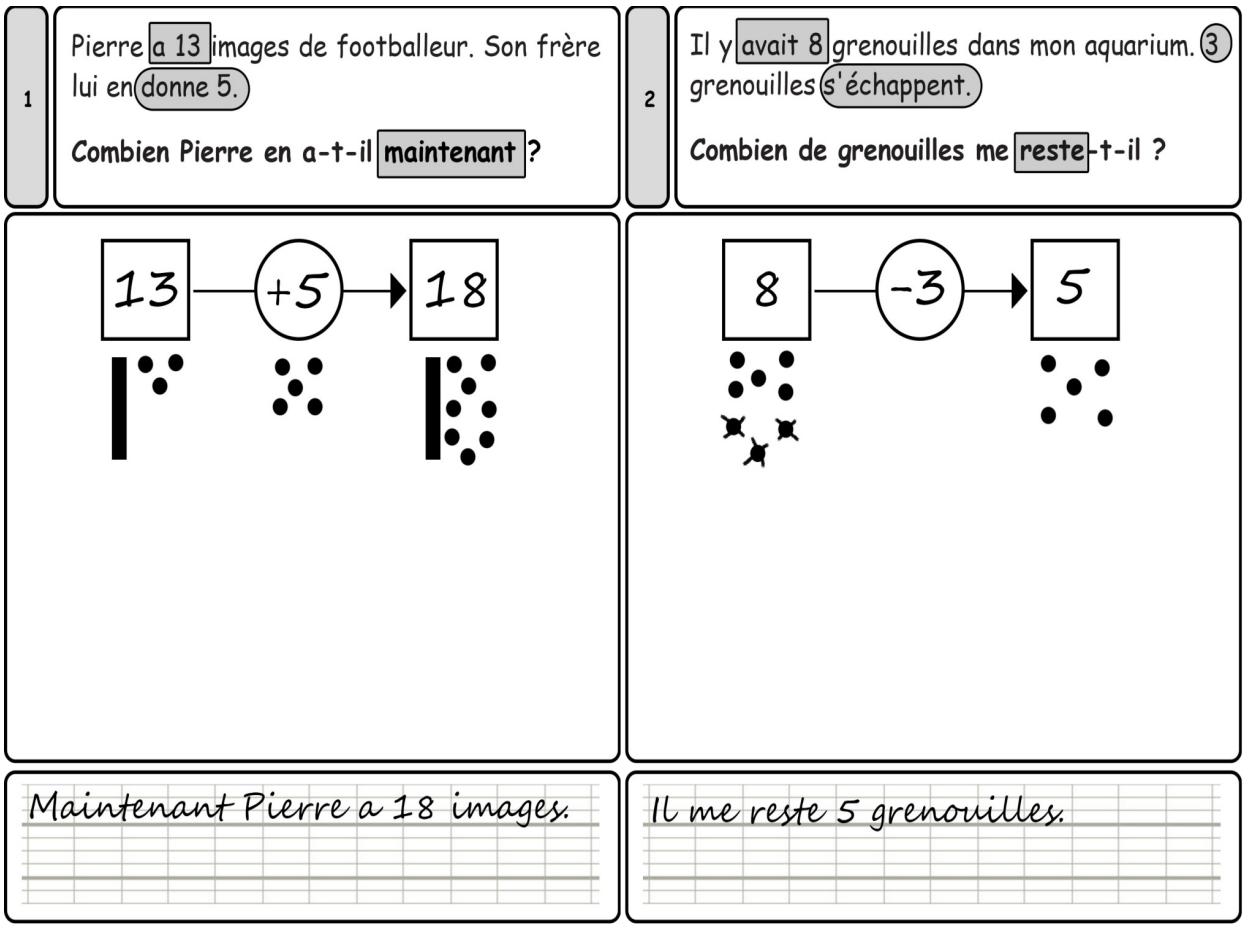
« Nous avons parlé des histoires mathématiques. Nous avons vu que nous pouvons écrire avec des chiffres, des signes et un schéma une histoire que nous avons lue ou entendue »

« Au début nous avions des dessins mais nous avons vu que cela ne nous aidait pas beaucoup. »

« Nous avons aussi vu que nous pouvions écrire avec des chiffres ou des constellations. »

35'	**<u>4) Pratique autonome :</u>** Plusieurs situations avec des gains ou des pertes sont proposées. L'objectif des élèves est, sur support, de tenter de représenter la situation énoncée via le schéma (état initial, action, état final) et les représentations chiffrées (chiffres et constellations). L'enseignant va passer de groupes en groupes, voir chaque élève, faire un retour sur les démarches, conseiller, guider, reprendre, expliciter. Pour résumer, les élèves sont au début d'un processus, l'étayage sera variable selon les élèves et l'objectif est de cibler le plus rapidement ce qui peut bloquer et ce qu'il faut ré-expliciter. Avant même de nous pencher sur la recherche du résultat, nous portons notre attention sur la justesse de la représentation logique. Le calcul viendra à la suite de cette modélisation par les élèves. Le calcul est l'étape finale du processus de modélisation, c'est une mise en équation d'un problème. **<u>Validation</u>** : <u>Le schéma devra se composer des 3 ensembles présentés. (état initial, transformation, état final)</u> <u>Les constellations et les écritures chiffrées seront placées judicieusement.</u> <u>Le résultat sera indiqué lui aussi.</u> – Les productions peuvent se faire par 2, par groupe, seul, en variant selon les besoins de l'enseignant. L'objectif est d'observer et valider les productions avec un feedback immédiat auprès des élèves qui en ont besoin. Nous visons aussi la réalisation du plus grand nombre de modélisation par les élèves. Le but est d'automatiser une démarche tout en faisant oraliser les procédures pour que l'élève puisse dire ce qu'il fait, comment il le fait, pourquoi il le fait. Il faut explicitement enseigner ces habiletés. N.B : Il ne faut pas hésiter à y passer plus de temps si nécessaire. Selon les classes, nous pouvons utiliser de 3 à 6 séances avant de travailler de manière plus autonome sur les fichiers.	Groupe de 4 élèves ou autonomie. Bilan avec le groupe classe

<u>Bilan :</u>



5

Ces 2 exemples permettent de détailler les points essentiels du premier chapitre.

— *La lecture* : Selon que l'élève soit lecteur ou non le problème sera lu par l'élève, l'élève et l'enseignant ou par l'enseignant seul. À mesure que l'élève avance dans son parcours de lecteur, l'enseignant se met peu à peu en retrait. L'enseignant module son intervention selon ses observations et bilans.

— *La prise d'indices :* Un annoncé et une question sont porteurs de sens, ce qui va induire le traitement du problème rencontré. Il s'agit ici de déterminer si la situation est additive ou soustractive (gain ou perte) et le cas échéant de mettre en place une procédure de résolution. Il faut aussi déterminer quel état est connu (initial ou final) pour le lier à la transformation rencontrée et valider la procédure.

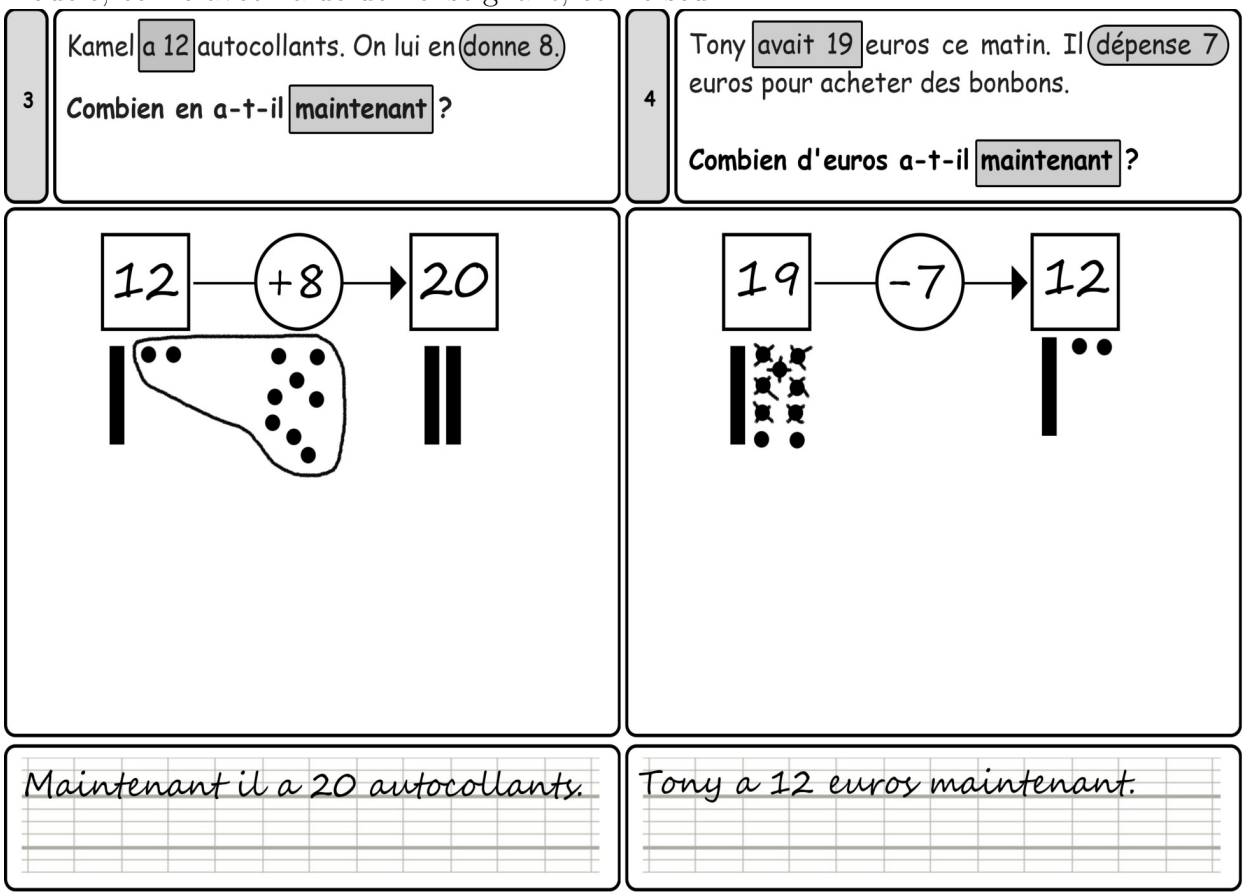
— *La conception du nombre* : Les données sont inscrites selon deux représentations distinctes. L'une est l'écriture chiffrée standard, l'autre est la représentation codifiée des unités et dizaines. Cette représentation codifiée est réutilisée lors du travail de numération lors d'activités de classes comme « chaque jour compte » ou « le château des nombres ».

— *La méthodologie de résolution* : La représentation codifiée des données permet de résoudre dans un premier temps les problèmes, de soutenir par la suite leur résolution avant de passer ultérieurement à une phase abstraite directe ne nécessitant plus cette écriture codifiée. L'élève ayant une représentation solide de la construction du nombre se détachera naturellement de cette aide. Pour la résolution du problème de transformation

négative, le fait « d'enlever 3 » se traduit de manière concrète par le fait de « barrer » 3 éléments de la constellation. La quantité 3 n'est pas représentée sous forme de constellation. Elle n'a pas de réalité concrète, car elle est la perte qui s'applique à une quantité déjà existante.

Le problème additif se résout par simple groupement des quantités.

— *L'écriture d'une phrase réponse :* Selon l'avancement de l'élève il peut utiliser un modèle, écrire avec l'aide de l'enseignant, écrire seul.

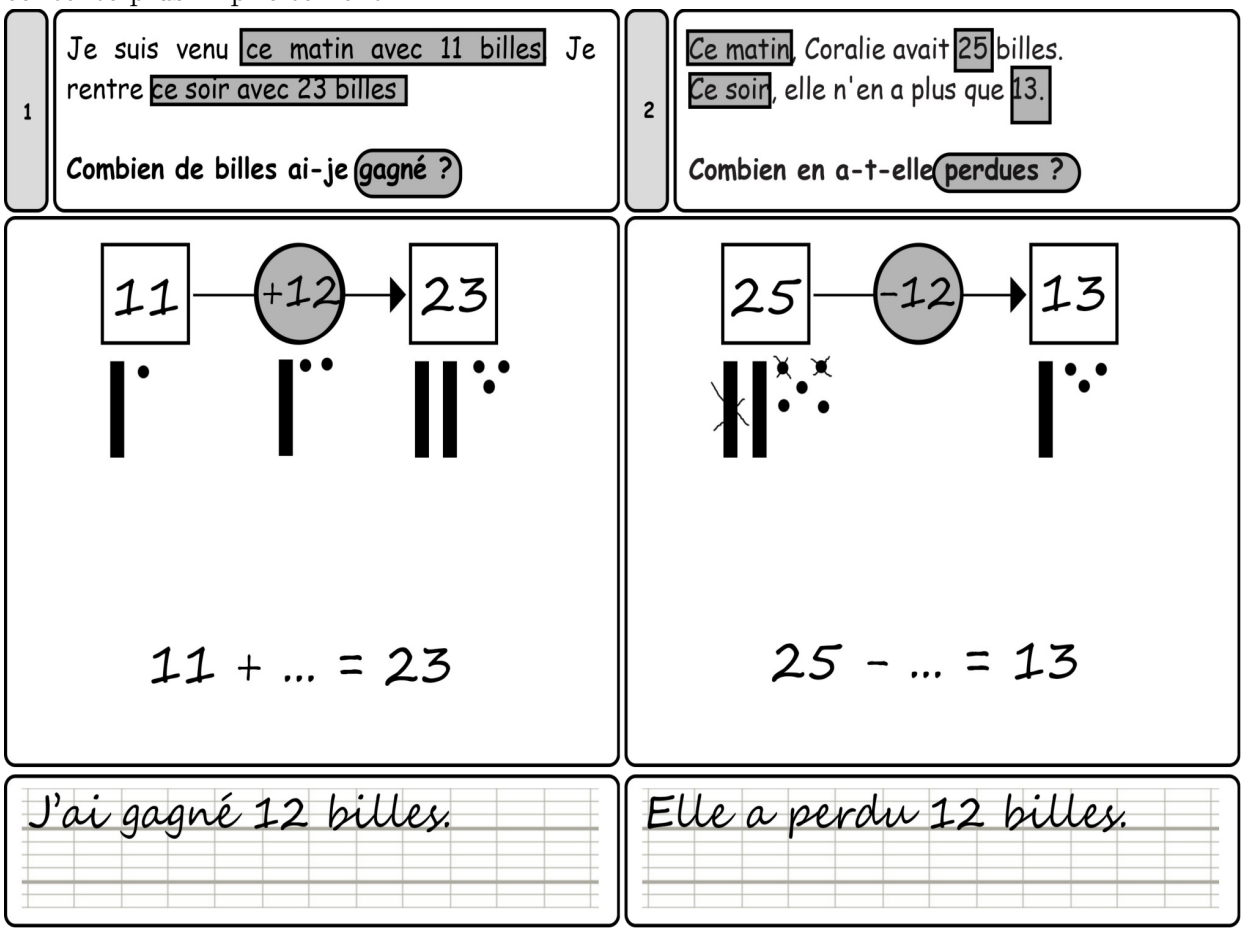


6

Le problème n°3 nous permet d'aborder par la manipulation l'échange d'un groupe de 10 unités contre 1 barre de dizaine. Cet échange est bien sûr travaillé en parallèle lors des séances de numération mais le traitement de cette notion dans les problèmes permet de vérifier si le transfert est effectif. Le lien entre les domaines mathématiques et les pratiques enseignantes permet, de séances en séances, d'analyser et de réguler les pratiques selon les besoins. Il convient, selon la durée prévue pour la séance de résolution de problèmes, de systématiser le bilan. Ce bilan a pour objectif de cibler les éléments mathématiques et langagiers qui vont nécessiter un travail parallèle afin de les transférer avec efficacité lors de la séance suivante. Chaque séance doit donc être une source d'informations sur les réussites et échecs des élèves et, par correspondance, une base de travail nécessaire pour affiner ses progressions et cibler les notions qui nécessiteraient un approfondissement ou une consolidation.

Important : Le vocabulaire est donné explicitement au début du parcours de l'élève afin de pouvoir à terme s'en affranchir partiellement, mais en le remobilisant régulièrement. La prise de sens est un élément extrêmement important et ne doit pas être négligé, c'est pourquoi les problèmes regorgent d'indices lexicaux (en tout, avant, après, etc.). Les indices tendront à disparaître progressivement afin de proposer des situations plus « implicites ». Il est essentiel de s'assurer d'une compréhension fine des situations avant qu'un élève puisse efficacement s'affranchir de la prise d'indices directe. Ajouter l'implicite de situation trop précocement sans avoir consolider les bases de la lecture, de la compréhension et de la prise d'indices lexicaux, voir aussi de la compréhension d'inférences, ne peut que nuire (selon nous) à la mise en place d'une structuration logique chez l'élève.

Il ne faut jamais perdre de vu que le projet est bâti du Cp au Cm2 afin de construire progressivement, méthodiquement et solidement toutes les compétences qui les mèneront à l'expertise voulue à la fin du projet. Les problèmes seront donc très progressivement de plus en plus implicites (sur 5 années) afin de travailler en parallèle l'acquisition d'un lexique riche et précis et l'acquisition de stratégies de compréhension. La démarche est globale et organisée méthodiquement sur 5 années car au-delà du repérage des indices il faudra apprendre à comprendre leur signification profonde afin de mieux appréhender un contexte plus implicitement.



13

Ce chapitre nous permet d'aborder la recherche d'une transformation additive ou soustractive quand les états initiaux et finaux sont connus.

La prise d'indices dans le texte conserve toute son importance, car elle permet de déterminer clairement les données connues et induit la méthodologie de résolution à mettre en place. La recherche de la transformation, indépendamment de son signe, se traduit par la mise en équation d'une opération à trou. Il conviendra alors de chercher ce qu'il faut ajouter ou ce qu'il faut soustraire.

Cas de la transformation additive : Il faut chercher ce qui manque pour atteindre une quantité connue. Une méthode consiste, en utilisant la représentation sous forme de constellation, à compléter jusqu'à la quantité finale. Nous partons de 11 pour atteindre 23. $11 + 10 = 21 + 2 = 23$. Nous avons ajouté 1 dizaine et 2 unités. Nous pouvons aussi compléter ainsi, $11 + 9 = 20 + 3 = 23$. Ajouter 9 et 3, c'est ajouter 12.

Plusieurs possibilités existent comme débuter avec les unités en cherchant le complément permettant d'aller de 1 à 3, soit 2 unités. Puis le complément permettant d'aller de 1 à 2, soit 1 dizaine.

Cas de la transformation négative : Nous allons ici chercher la quantité à retirer pour atteindre la quantité finale. Nous pouvons dans ce cas précis observer tout d'abord les unités et chercher ce qu'il faut ôter de 5 pour obtenir 3. Nous obtenons 2. De même pour les dizaines ou le retrait d'une dizaine nous laisse la dizaine finale. Le total des éléments retirés est donc 12. L'aspect manipulation et méthodologique permet de résoudre le problème par suppression successive des éléments jusqu'à obtention de l'état final.

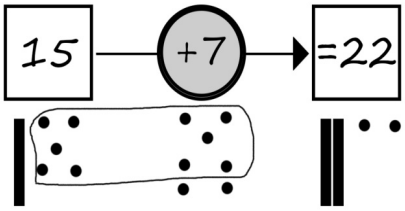
Il est tout aussi possible de « marquer » ou « entourer » la quantité 13 contenue dans 25 pour faire apparaître ce qui va être retiré. Il est aussi possible dans ce cas précis de résoudre par calcul mental en en cherchant ce que nous ôtons de 5 pour obtenir 3 et ce que nous ôtons de 2 pour obtenir 1.

Ces 2 exemples peuvent aussi se résoudre par la soustraction posée, c'est donc une entrée de résolution possible dans la mesure où les équivalences « addition à trou = soustraction » et « soustraction à trou avec recherche d'une perte » sont connues et travaillées de façon à être transférées dans la résolution de problèmes.

11

Coralie joue au jeu de l'oie. Elle part de la case 15 et arrive sur la case 22.

De combien de cases a-t-elle avancé?



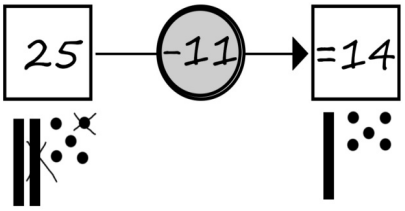
15 + 7 = 22

Elle a avancé de 7 cases.

12

Au jeu de l'oie, j'étais sur la case 25. Je recule et je suis maintenant sur la case 14.

De combien de cases ai-je reculé ?



25 - 11 = 14

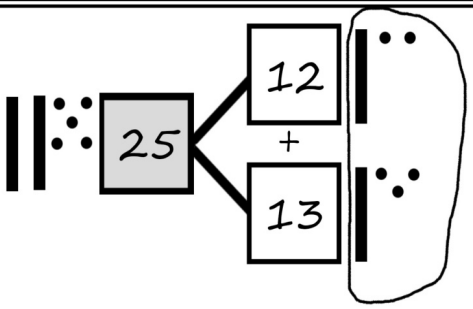
J'ai reculé de 11 cases.

18

1

Léo a 12 billes. Juliette a 13 billes.

Combien de billes ont Léo et Juliette ensemble ?

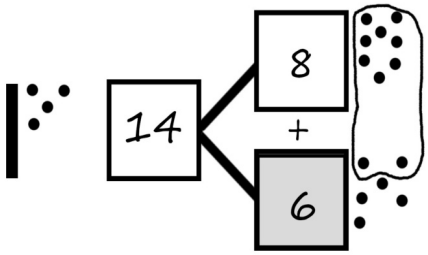


Léo et Juliette ont 25 billes.

2

Dans ma trousse, il y a 14 feutres. 8 sont rouges.

Combien ai-je de feutres bleus ?



8 + 6 = 14

14 - 8 = 6

J'ai 6 feutres bleus.

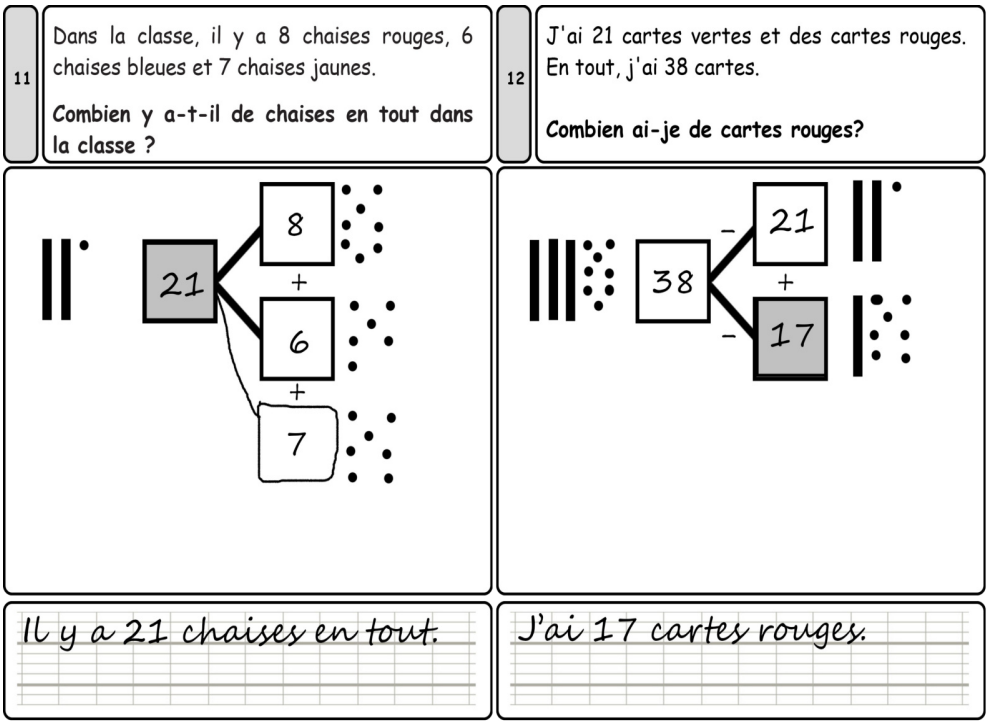
21

Dans la modélisation de la situation le carré de gauche représente le tout, il est la somme des parties situées à sa droite. Le modèle ne comporte ici que 2 parties, mais il est bien sur courant de rencontrer des situations où le nombre des parties est largement supérieur. À la rencontre de ces situations il conviendra de modifier la modélisation en y adjoignant les parties manquantes. Ce modèle nous permet de visualiser une situation additive simple dans le premier exemple. 2 ensembles (billes de Léo et billes de Juliette) sont regroupés pour créer un nouvel ensemble, somme des précédents. L'écriture symbolique est encore présente en parallèle de l'écriture chiffrée des quantités en jeu. Ce modèle permet une approche du calcul posé par la superposition des parties.

Il est essentiel de clarifier et travailler le vocabulaire symbolisant le « Tout ». Ce « tout » peut être nommé comme tel mais aussi induit de manière implicite comme dans le second exemple. Il y a dans l'exemple 14 feutres en tout même si le terme n'est pas employé, car le fait de nommer de manière systématique le « tout » fait que les élèves se focalisent sur le terme et non le sens. Le terme est un indice, le sens de la phrase aussi et il ne saurait être question de le négliger.

Dans le second exemple, la recherche d'une partie induit *de facto* une addition à trou et donc une soustraction. Ce modèle nous permet de voir de manière concrète que si j'ôte les 8 feutres rouges de la trousse, il n'en restera que 6. La soustraction d'une partie d'un tout matérialise la seconde partie.

Il est donc possible pour les élèves d'aborder ce problème de 2 façons complémentaires. La première est la recherche du complément jusqu'au « tout ». Ils peuvent compléter jusqu'à la dizaine et ajouter ensuite les unités manquantes. La seconde est la recherche de la partie manquante en ôtant la première partie connue du tout.



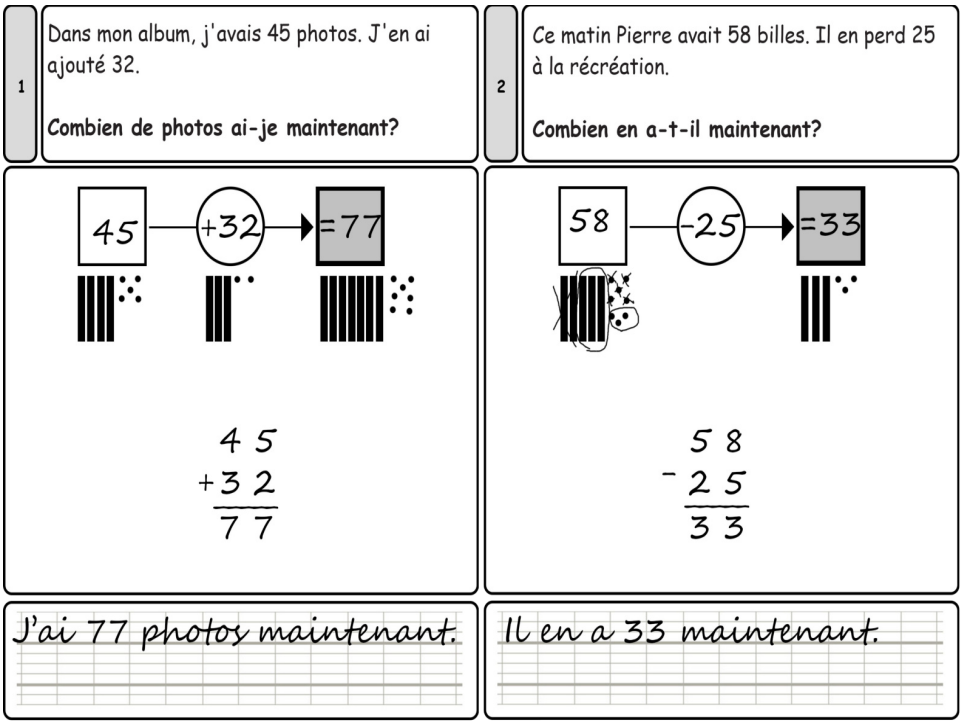
26

Dans le cas du problème 11, le recherche du tout nécessite l'addition de 3 parties. Le modèle proposé n'en contient que 2, aussi il conviendra de reprendre le processus de modélisation afin de faire apparaître la partie manquante en complétant le schéma. La confrontation régulière des élèves avec des problèmes contenant plus de 2 parties et par extension la modification du modèle de base permet approfondir cette notion en parallèle. Le travail porte donc encore une fois sur la structure du problème pour mieux le comprendre avant de se pencher sur l'aspect « calcul ».

La modélisation des situations de composition n'est pas figée, car le schéma que nous utilisons est adaptable selon le nombre de parties rencontrées et il est donc important de faire modéliser des situations variées faisant intervenir plusieurs parties.

Le problème 12 est identique, dans le principe, au problème 2 mais nous jouons sur la variable numérique. La résolution est possible en posant le calcul et en complétant (addition à trou) jusqu'au Tout. Il est aussi possible de rechercher la partie manquante en posant la soustraction. Sans formaliser le calcul posé, il est aussi envisageable de résoudre ce problème en recherchant le nombre d'unités d'une part et le nombre des dizaines d'autre part. Il s'agit alors simplement de la soustraction en 2 étapes (unités puis dizaines) sans la poser de manière formelle.

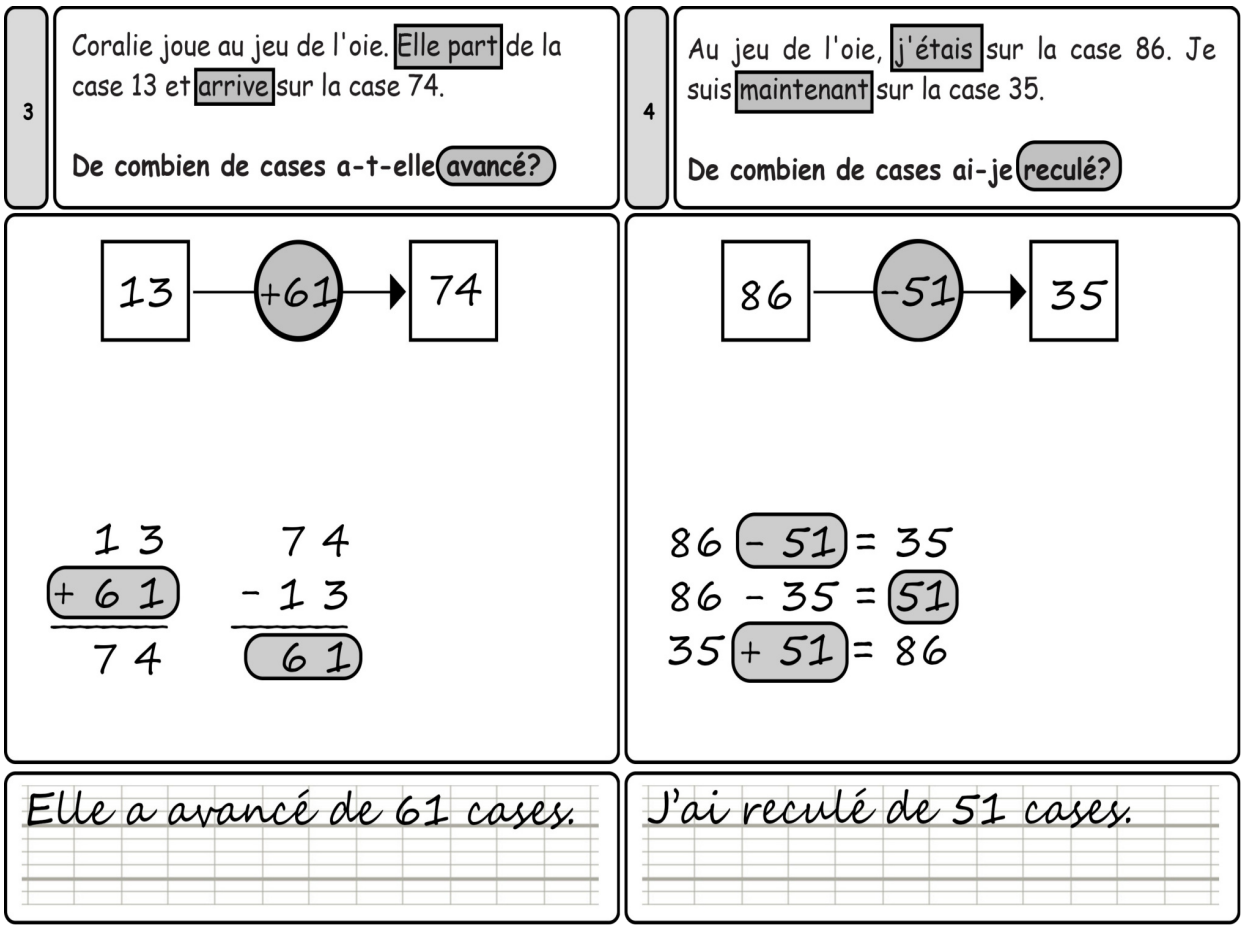
Ce problème, comme bien d'autres, est une occasion de travailler plusieurs notions selon la progression envisagée en calcul par l'enseignant. Nous optons préférentiellement pour la résolution par calcul en ligne (soustraction) avec vérification par l'addition. La situation pouvant se lire de manière additive comme soustractive, elle peut donc se résoudre des deux manières de façon à bien exprimer la réciprocité entre l'addition et la soustraction.



29

Dans le premier exemple, il est visible que la systématisation de l'écriture symbolique devient lourde. Le travail en parallèle en numération et sur le calcul en ligne et/ou posé permet de s'affranchir de cette symbolique pour passer à la technique opératoire. La mise en équation du problème dans le modèle schématique induit de fait le calcul qui peut être posé sans formaliser la symbolisation dans la mesure ou elle est acquise. Cette symbolique est une aide mais une aide n'est utile que si elle est nécessaire. Selon l'avancement de l'élève et sa maîtrise des champs mathématiques concernés, l'écriture symbolique pourra ne plus être demandée tandis que la résolution par un calcul posé pourra être incitée et systématisée.

Dans le problème 2, la technique opératoire n'est que la représentation de la manipulation (barrage) sur les formes symboliques. Le calcul posé ou en ligne permet de l'écrire de manière plus formelle et l'élève est invité à l'utiliser de plus en plus à mesure qu'il avance dans le projet. L'enseignant agira en fonction de ce qu'il estime possible avec ses élèves. Les procédures de résolution efficaces ont vocation à être systématisées de manière à ce que l'élève puisse réagir de manière appropriée, efficace et rapide.

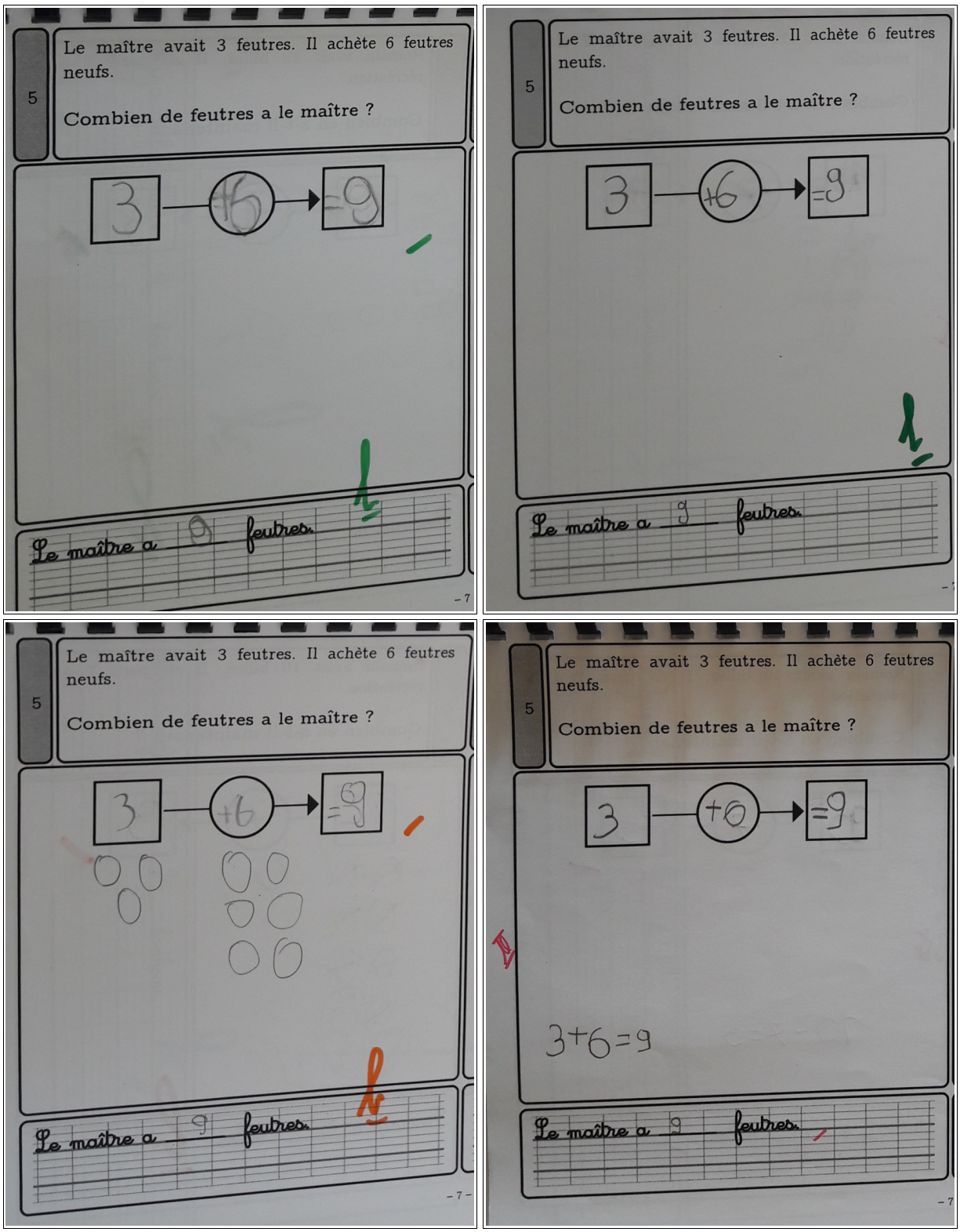


30

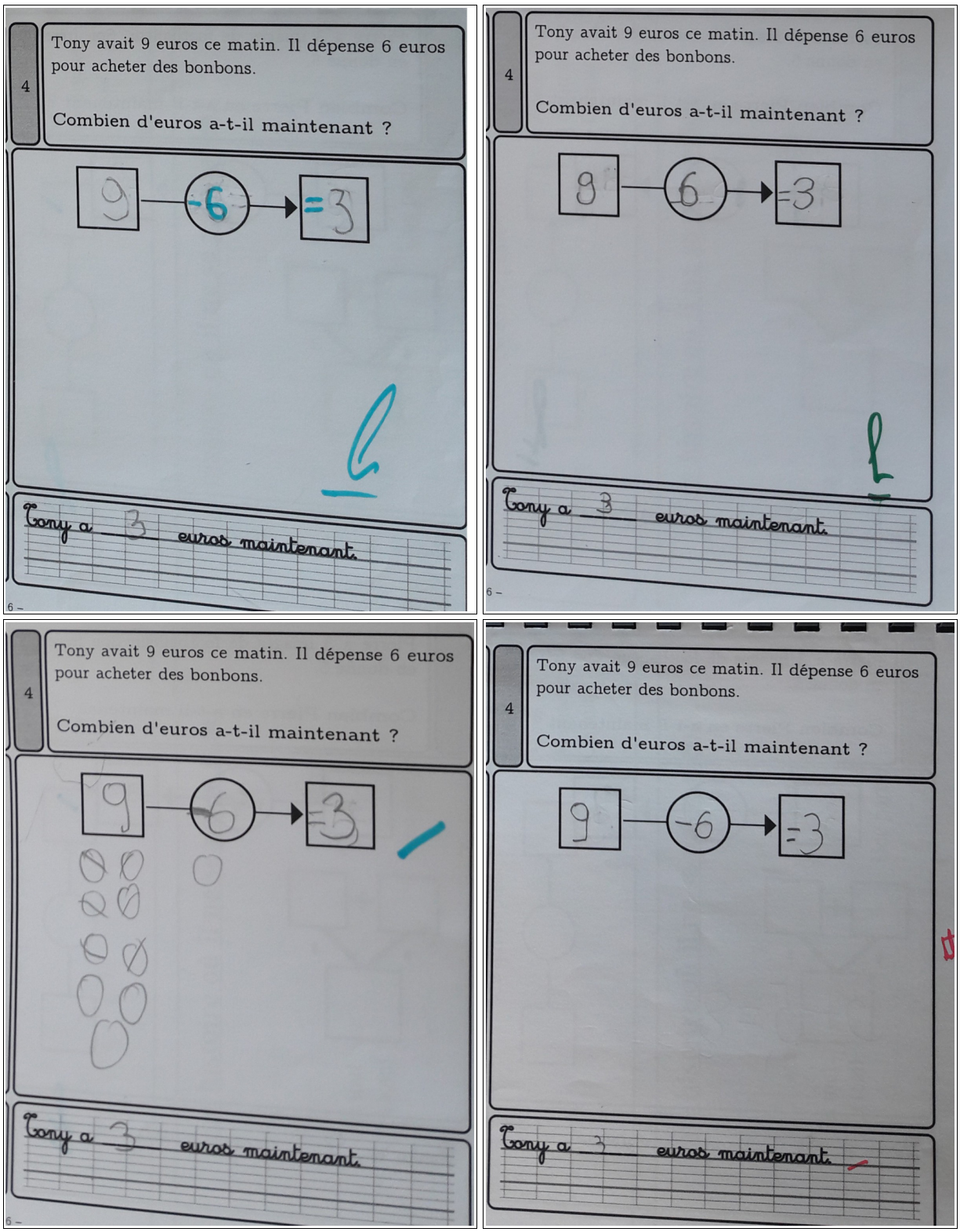
Nous proposons maintenant quelques productions d'élèves avec des problèmes arithmétiques additifs et multiplicatifs afin de pouvoir observer la réalité de leur travail avec les modalités pédagogiques employées par l'auteur. L'intérêt, à nos yeux, est de donner aux enseignants une représentation honnête, au niveau des exigences, de ce qui est atteignable et sûrement dépassable par un élève de Cp. Notre souhait n'est pas de montrer un rendu théorique parfait qui ne représente pas le réel de la classe. Il y a nos objectifs d'un côté et les contraintes du quotidien qui font que l'on ne peut pas toujours atteindre le but fixé malgré tous nos efforts. Néanmoins, il nous semble préférable que nos attendus soient élevés pour la réussite finale des élèves car même en ne les atteignant pas, nous les amenons tous au plus haut. Nous souhaitons simplement montrer le résultat du travail de l'élève avec ses difficultés et ses facilités (il manque évidemment tout l'aspect oral qui peut être visionné sur le site du Centre Alain Savary[3]). Nous nous engageons à présenter des travaux venant d'élèves aux profils variés mais représentatifs des niveaux de compétences de la classe.

Si parfois le résultat peut sembler trop beau au lecteur (sont-ce des élèves performants uniquement ? non), nous nous devrons malheureusement de féliciter encore plus les élèves concernés. Rajoutons également, si l'enseignant l'estime nécessaire, qu'il est possible d'imprimer une page, de modifier les données numériques de manière à moduler la difficulté. Cela permet de garder la structure logique de l'énoncé, tout en haussant le niveau pour des élèves. Cela permet également de générer très rapidement des banques de problèmes du même type pour s'exercer.

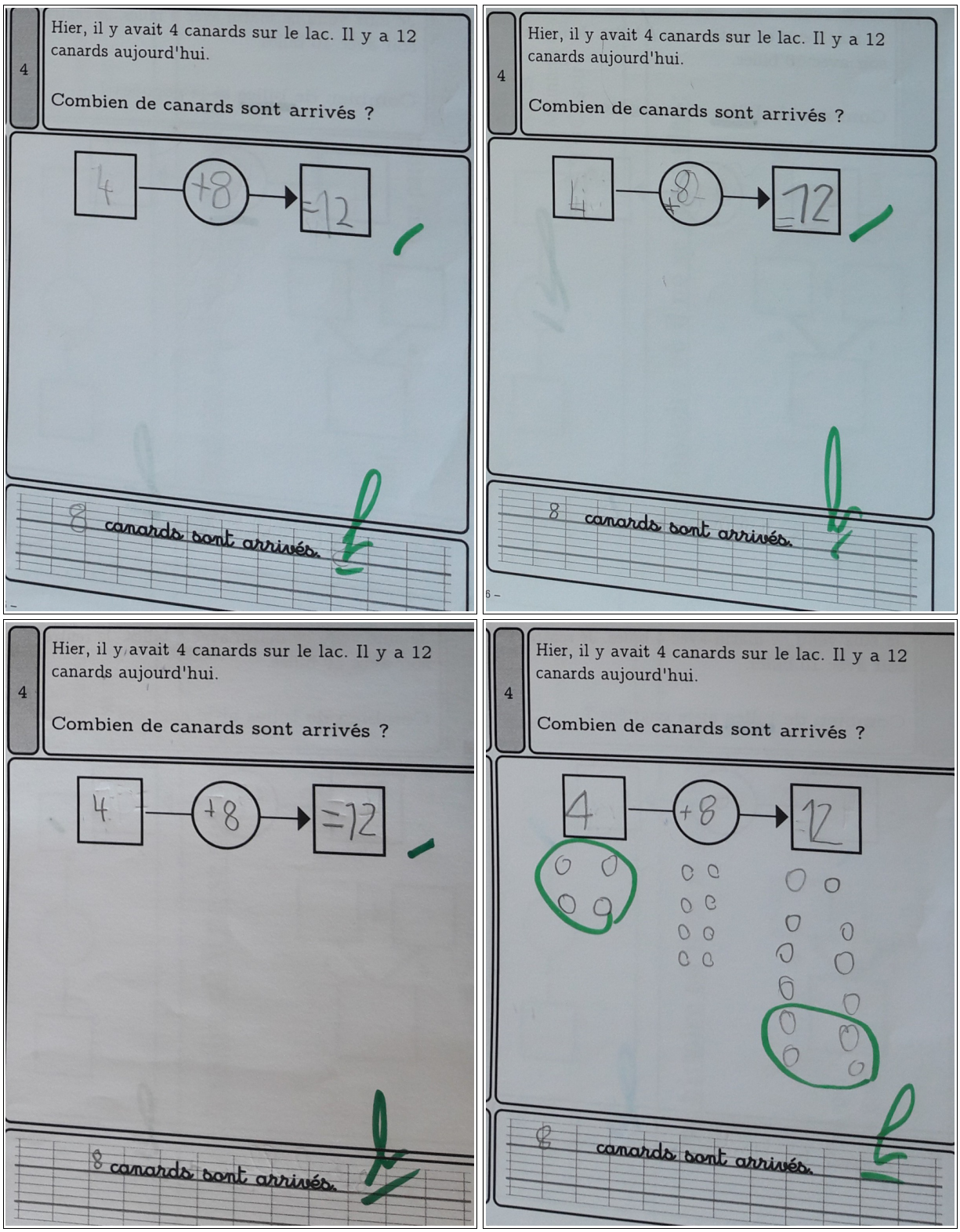
3 http://centre-alain-savary.ens-lyon.fr/CAS/mathematiques-en-education-prioritaire/reportage-argenteuil



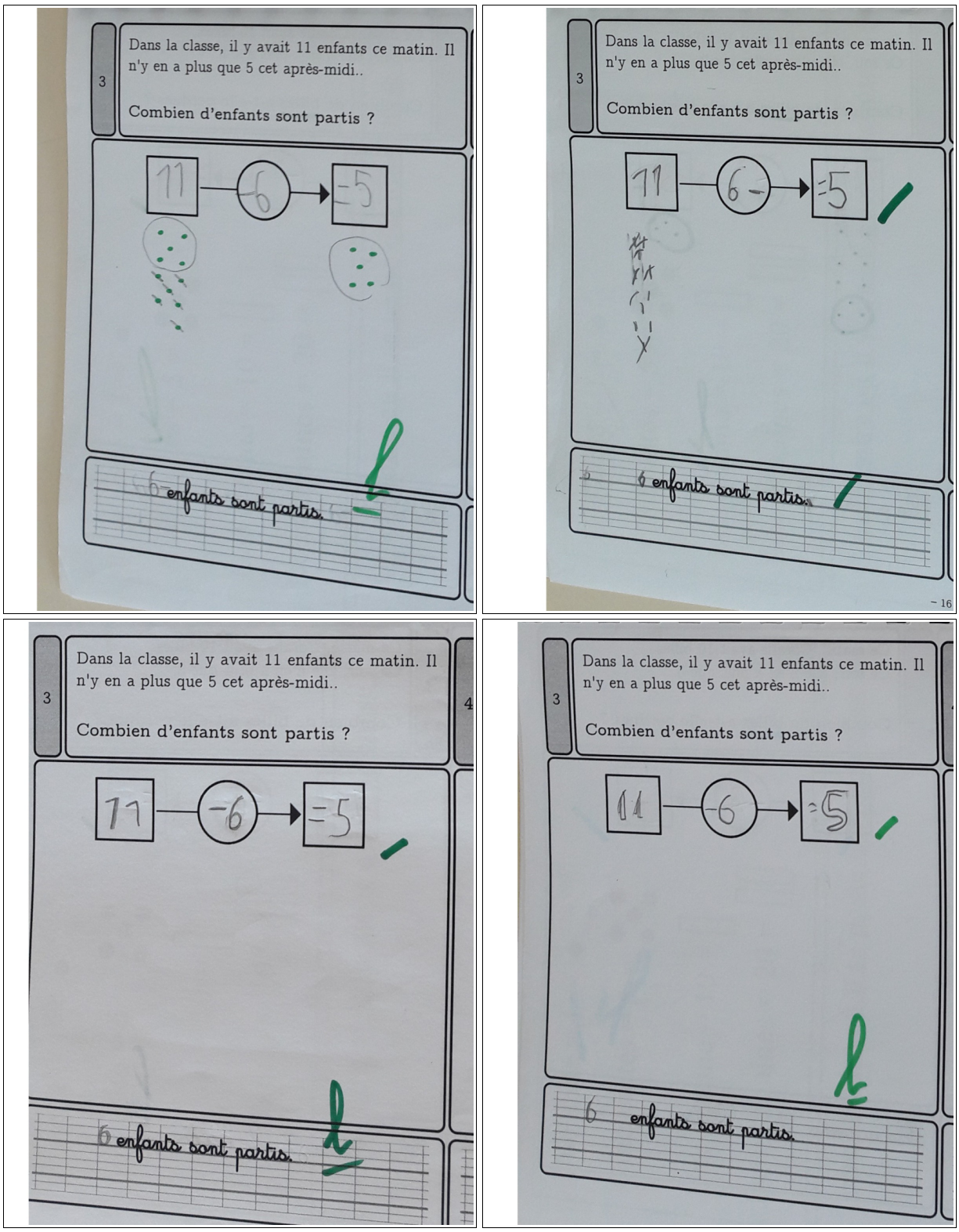
La résolution est passablement la même. On remarquera le besoin d'un élève de « représenter » les quantités par des ronds pour les appréhender et calculer. Un autre propose un calcul en ligne supplémentaire.



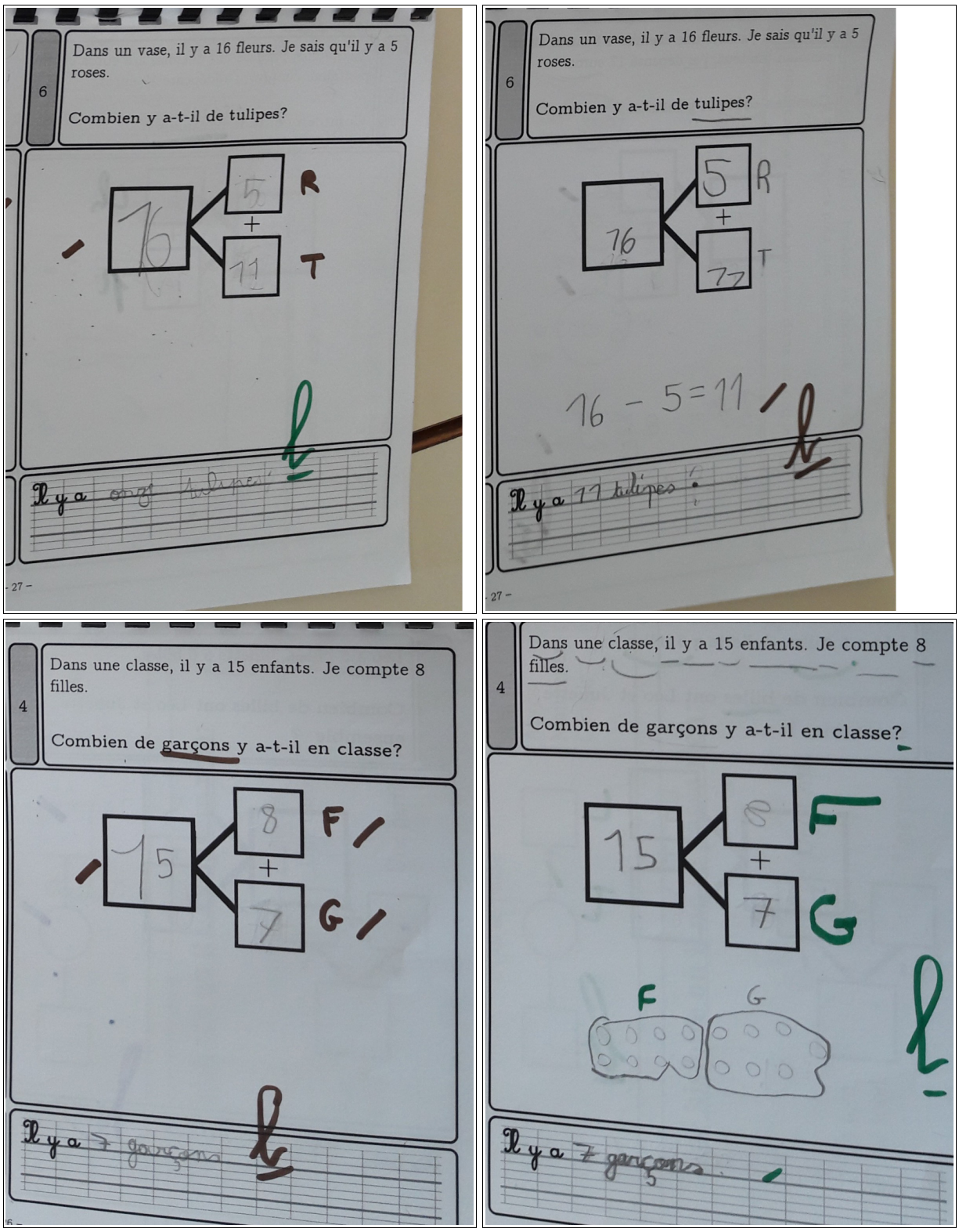
Le même élève que précédemment représente la quantité initiale et barre la quantité qu'il faut ôter pour effectuer la soustraction. Cette représentation n'est pas nécessaire aux autres élèves.



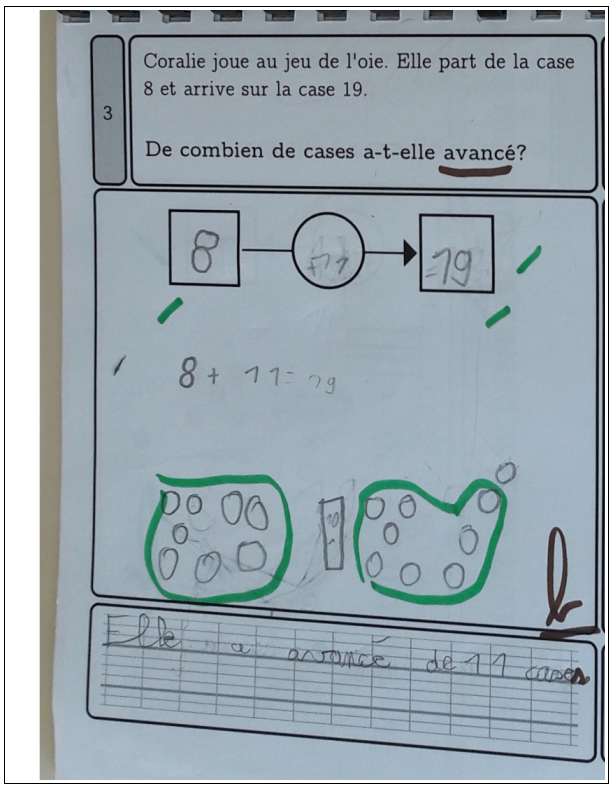
Dans ce type de problème, avec une addition à trou, il y a encore 2 profils d'élèves. Ceux qui calculent directement le manque mentalement et ceux qui ont besoin de représenter les quantités pour chercher la différence entre les deux. Les stratégies de résolution ont été enseignées mais certains élèves ont encore besoin de temps pour automatiser.

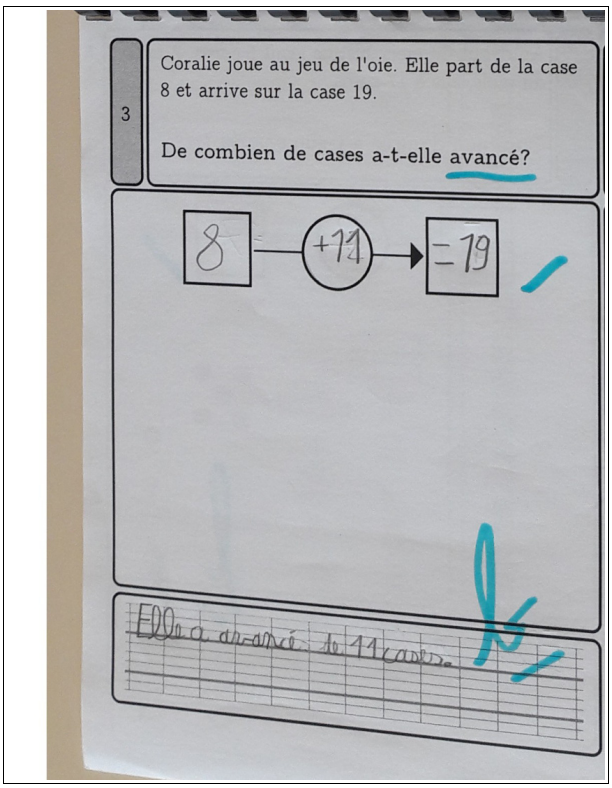


Nous sommes dans le cas de la recherche de la transformation négative. Un élève représente la quantité initiale et ôte progressivement jusqu'à obtenir la quantité finale. Un autre représente la quantité initiale et la quantité finale et fait correspondre la différence en l'entourant. Les autres élèves résolvent mentalement.

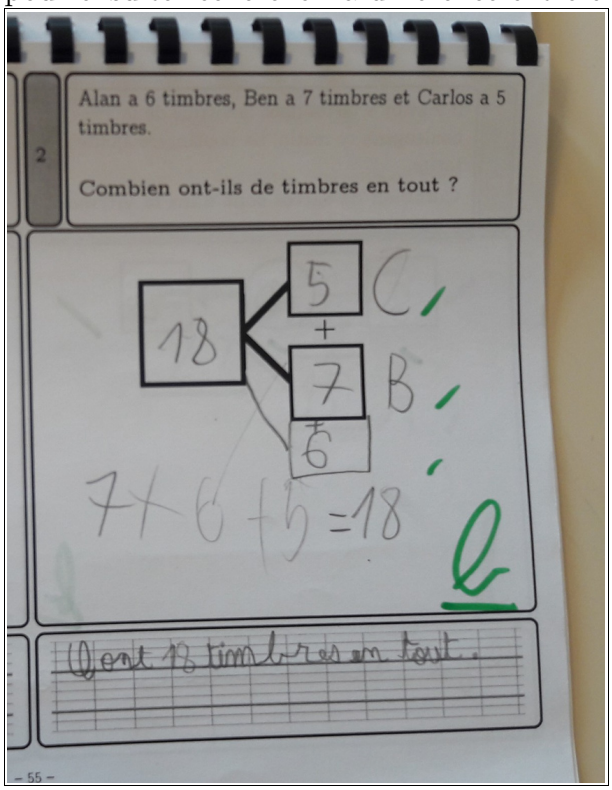


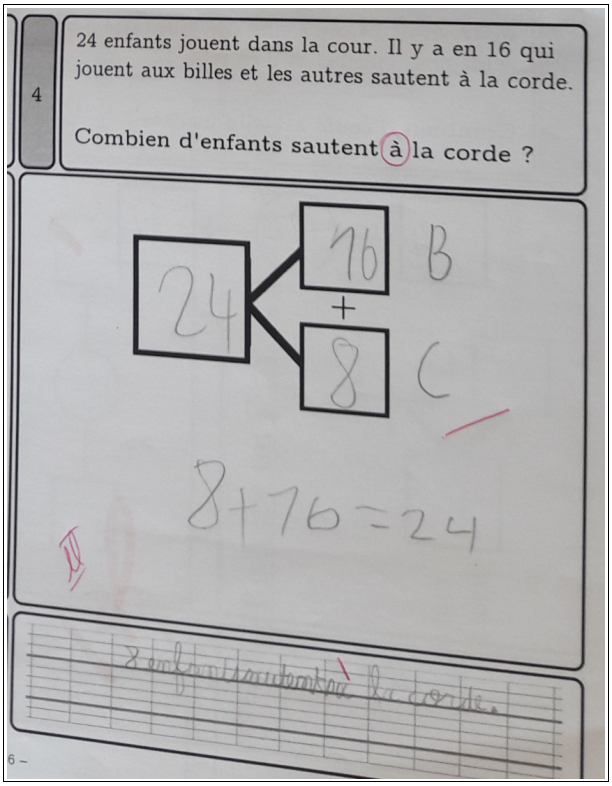
La distinction entre un ensemble et une partie d'un ensemble peut sembler très ardue pour une majorité d'élève. Néanmoins, quand les élèves systématisent le fait de « coder » les parties (ici avec des lettres) en « nommant » les quantités, le taux de réussite augmente très largement. Ces stratégies sont explicitement enseignées (nommer une partie connue, nommer l'autre connue ou celle qui manque, vérifier la cohérence de l'énoncé).





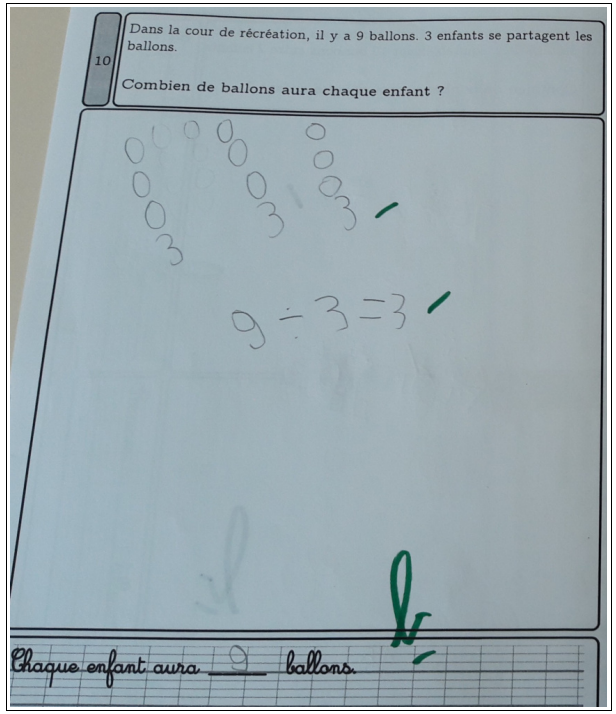
Le problème 3 est résolue directement par un élève qui calcule mentalement sans passage par une représentation transitoire. Un deuxième élève représentera les quantités pour ensuite rechercher la différence entre elles et finaliser son calcul.

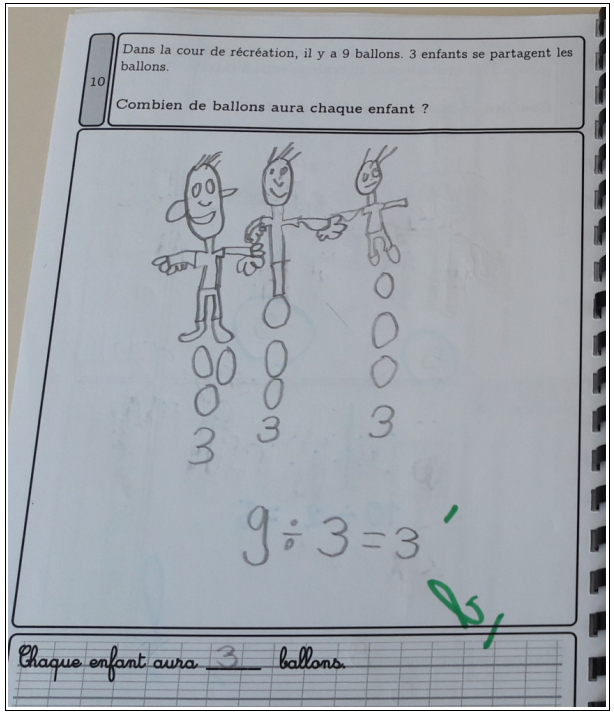


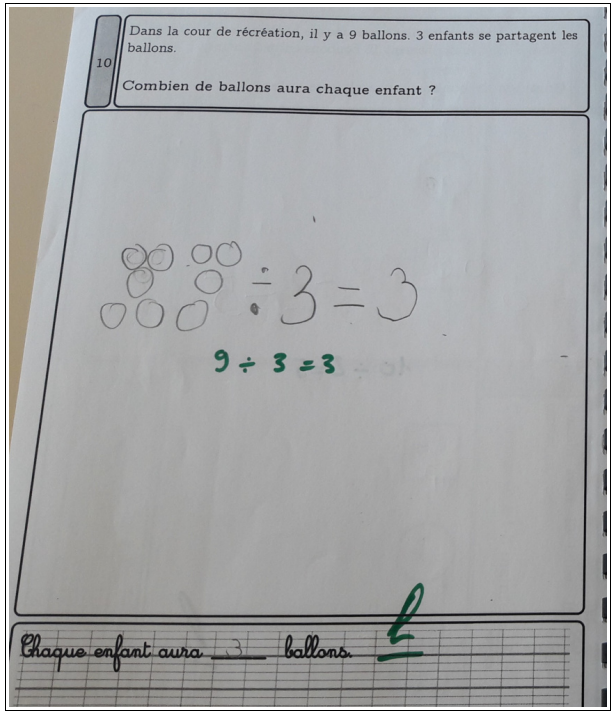


L'élève a ré-adapté le modèle du problème 2 (car il sait que c'est possible) pour organiser les données du problèmes. Les phrases réponses, à ce stade, respectent de plus en plus les normes syntaxiques et orthographiques.

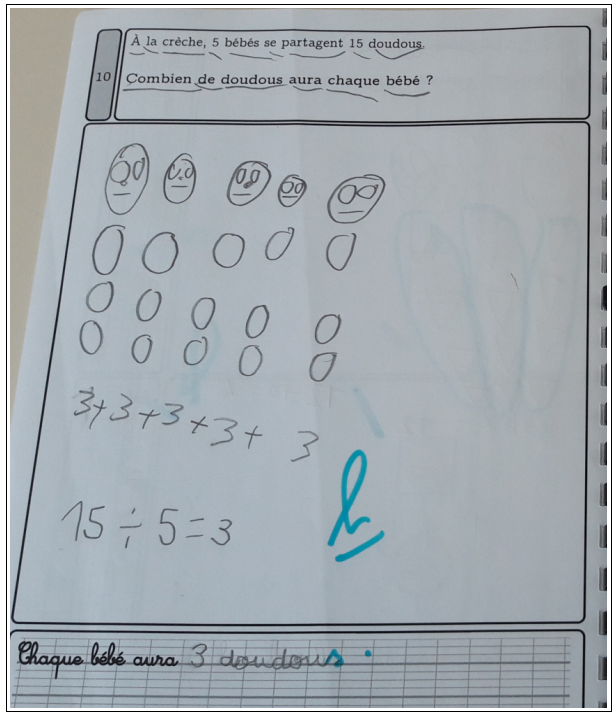
Problèmes multiplicatifs

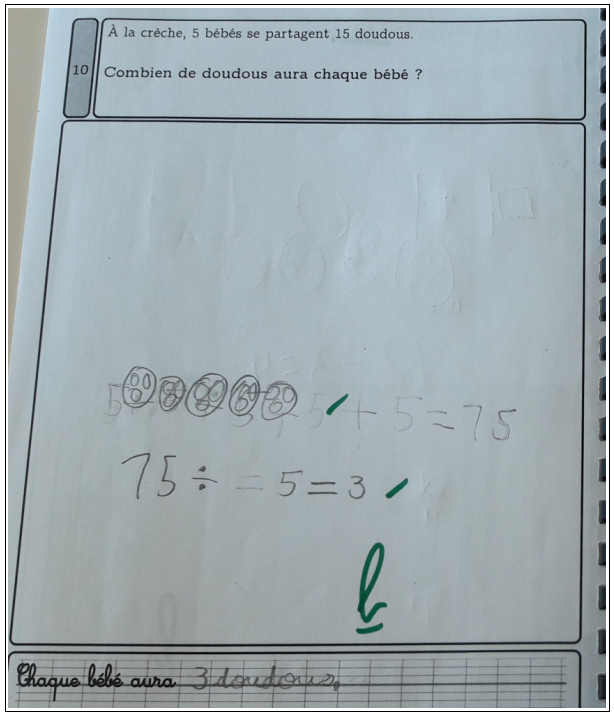


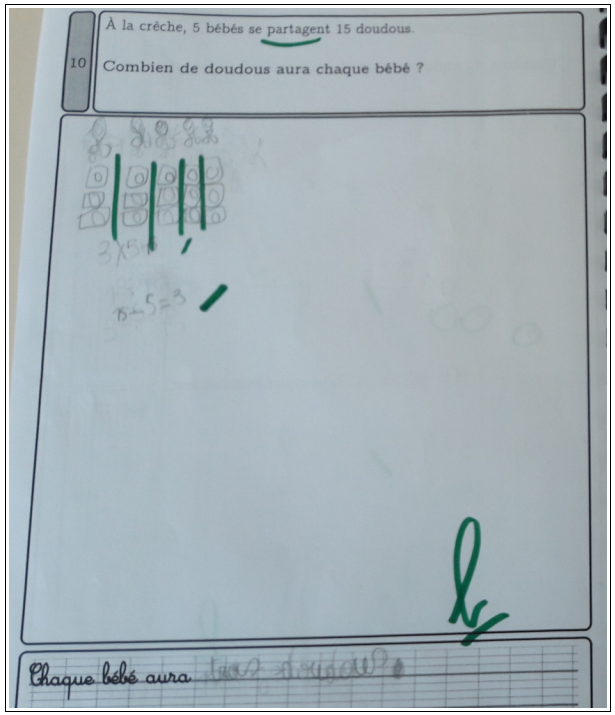




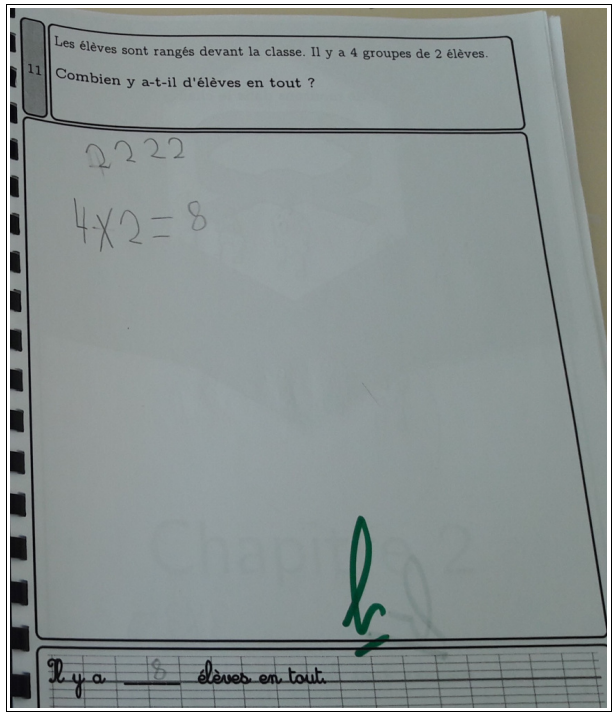
Selon le degré d'avancement de l'élève, les productions s'épurent. Un dessin « réaliste », puis un modèle organisationnel de la situation et enfin une opération mettant en équation le problème. Les élèves sont ici en plein cheminement entre les phases de manipulation, de modélisation et d'abstraction. La résolution experte n'est pas imposée à l'élève mais proposée systématiquement dans une phase de modélisation par l'enseignant, et cela à chaque problème. L'élève peut donc débuter la résolution avec ses représentations (dessins, modèles) et y adjoindre la méthode experte progressivement. Il y aura cohabitation durant le temps nécessaire à l'élève et bascule progressive. Nos modestes observations nous montrent que plus les élèves ont un « bagage » dans le domaine, plus ils migrent vers la solution la plus experte pour aller encore plus vite en limitant les erreurs. Le temps de transition est très souvent propre au niveau de l'élève. Nous pouvons donc offrir plus d'exemples et de modélisations aux élèves les moins avancés.

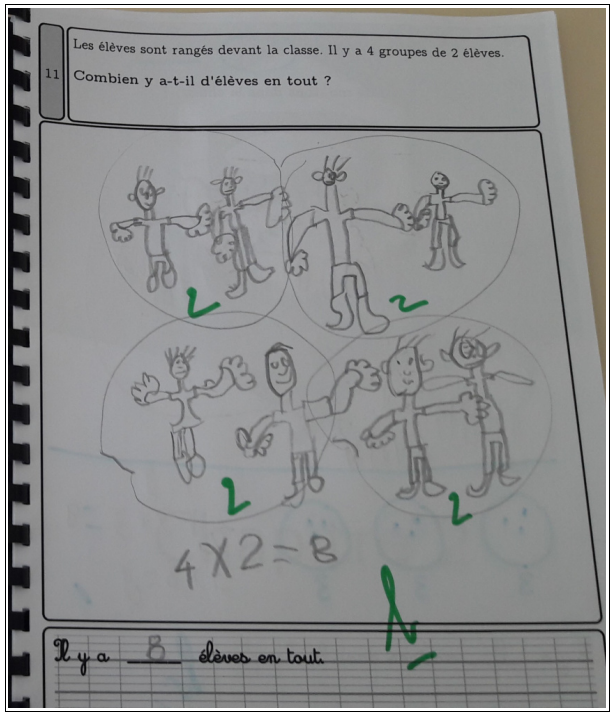


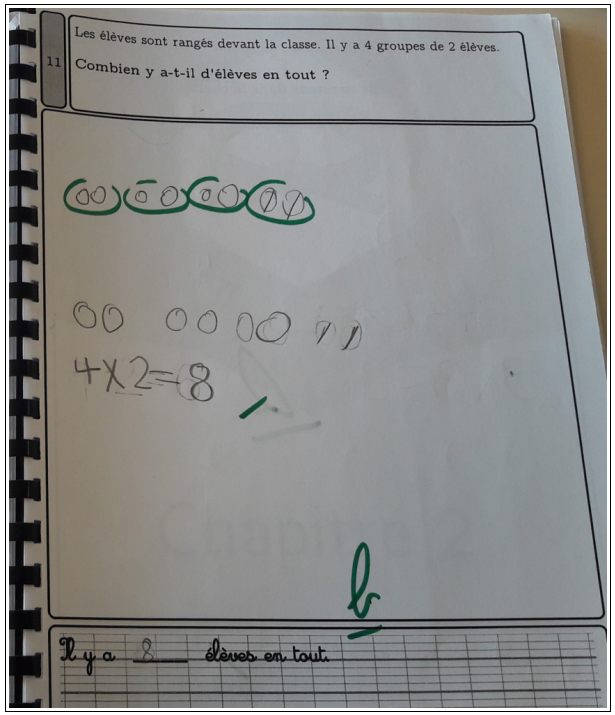




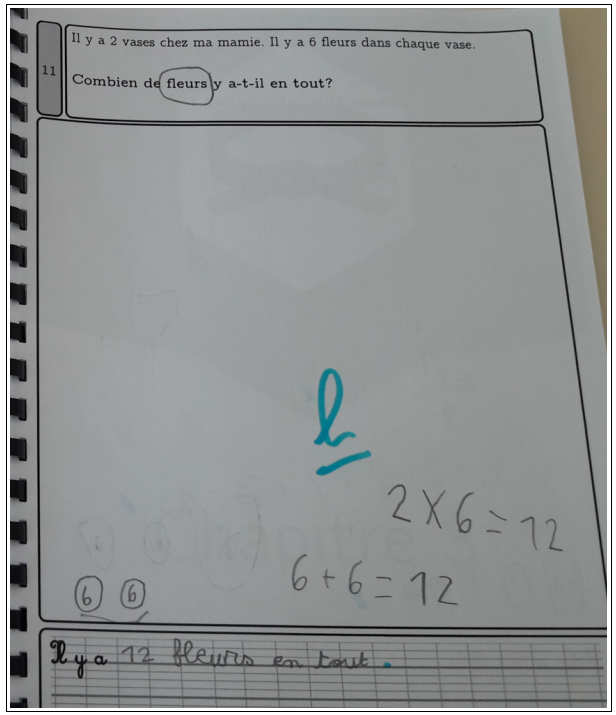
Tous proposent la mise en équation pour finaliser la résolution. Nous précisons que cette mise en équation ne vient pas comme première réponse. Les élèves ont encore besoin de représenter la situation pour mieux la comprendre, pour mieux appréhender les relations entre les données du problème. On remarque que lorsqu'ils modélisent le partage, ici en partagent les 15 doudous en 5 paquets égaux, ils « élaguent » les informations afin de garder l'essentiel et de réfléchir plus simplement sur les données et les relations. C'est lorsque ce partage est concrètement réalisé qu'ils peuvent annoncer que « $15 \div 5 = 3$, car il y a 5 fois 3 doudous et donc 15 doudous partagés en 5, ça fait 3 doudous pour chaque bébé ».

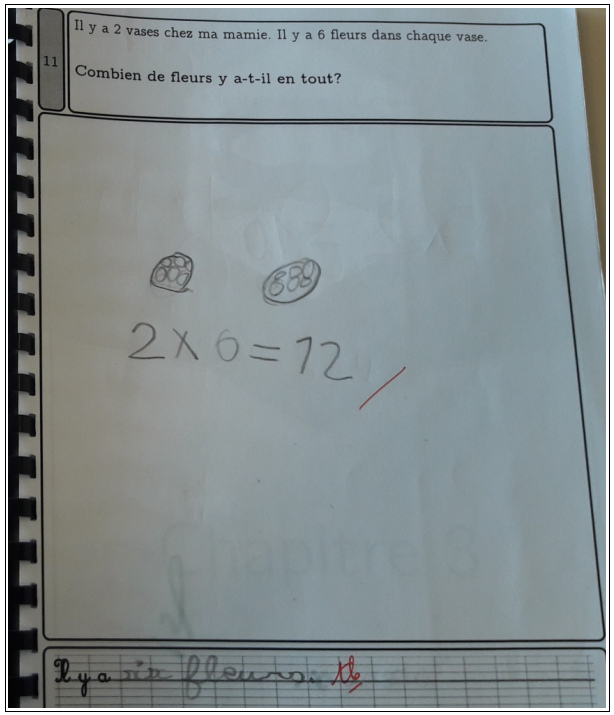


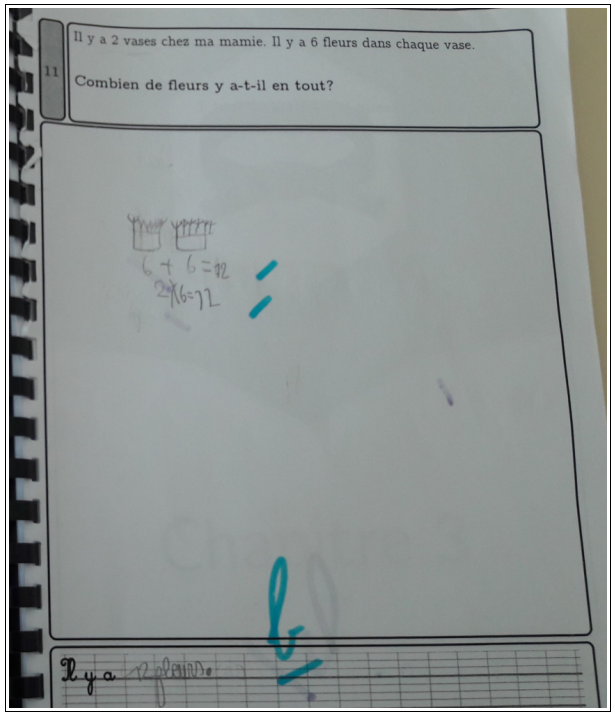




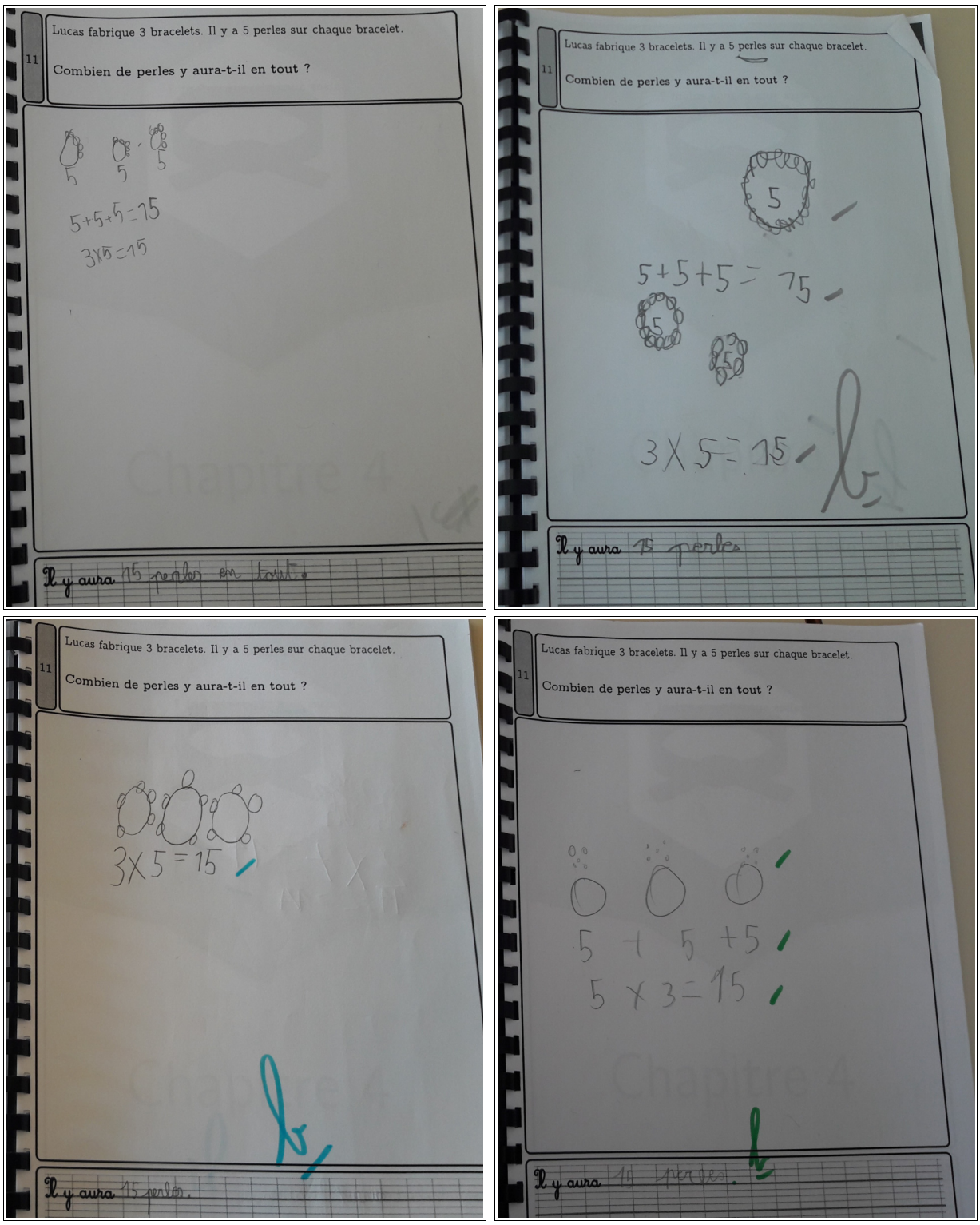
Là encore, trois variantes de résolution. De l'élève qui dessine encore mais qui organise, on remarque le « sens » de la multiplication, à celui qui modélise avec des ronds et celui qui note les quantités pour écrire tout de suite l'opération. Pour ces élèves, il faut lire $4 \times 2{=}8$ dans le sens « 4 fois le $2 = 8$ » et non pas « 4 multipliés par $2 = 8$ ».



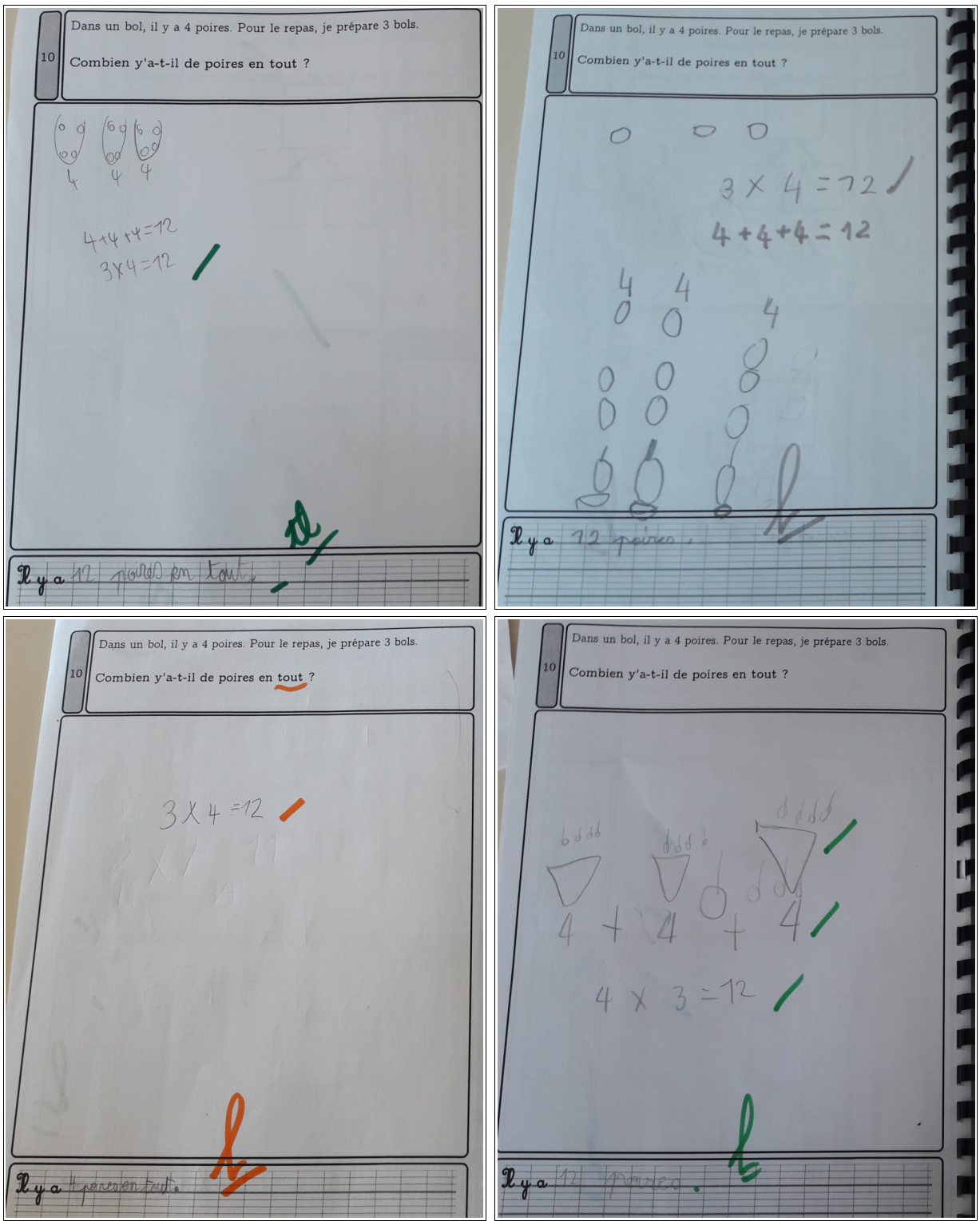




Ici encore, différente possibilités dans la progression des élèves. Le premier propose le calcul immédiat avec « 6 + 6 c'est 2 fois 6 donc c'est égal à 12 ». Le deuxième a encore besoin de modéliser les quantités en 2 groupes de 6, pour ne pas se « surcharger » avant de proposer par la suite la multiplication. Le troisième élève passe du dessin, vers une forme plus abstraite pour enfin proposer le calcul correspondant. Nous voyons donc des élèves conscients qu'ils ne peuvent pas toujours comprendre globalement le problème du premier coup. Ils vont alors, progressivement et avec méthode car cela a été enseigné, alléger le problème petit à petit en se focalisant sur les quantités et les liens entre elles. Cet allègement du travail qui se déroule dans leur mémoire va permettre par paliers successifs d'aller vers le fameux moment « Ah oui ! Là je comprends ! ». Ce moment ou l'élève comprend le problème dans sa globalité. Plusieurs étapes auront été nécessaires pour alléger et pour comprendre avant de recommencer tout le processus pour améliorer les automatismes.



Cette fois-ci, 4 productions sont proposées. On peut y voir la nécessité pour certains élèves de passer par l'addition avant la multiplication quand d'autres sont plus directs et ont une perception plus rapide de la situation. La modélisation est toujours présente mais avec des degrés d'abstraction divers selon les besoins de l'élève pour appréhender globalement la situation.



Encore une fois, 4 productions sont proposées. Les grandes phases « représentation imagée », »modélisation » et « abstraction » sont présentes. Certaines cohabitent, car le passage entre celles-ci n'est pas brut. Pour simplifier, le processus n'est pas « 1 » puis « 2 » puis « 3 » mais beaucoup plus généralement « 1 » puis « 1 et 2 » puis « 1 et 2 et 3 » puis « 2 et 3 » et enfin « 3 ». Avec des régressions de temps en temps selon le contexte.

En nous basant sur plusieurs années d'observation et de pratique avec des centaines d'élèves de Cp, nous pouvons résumer ci-après quelques grands traits sur lesquels il faut être vigilant :

—Un élève qui ne dispose pas d'un bagage mathématique et langagier très solide ne peut découvrir seul les stratégies efficaces de résolution. Ceux qui y parviennent sont déjà, et quasi exclusivement, les plus performants. Un enseignement inductif, même s'il est séduisant, ne profite à ce moment qu'à cette minorité d'élèves et met les autres en difficulté.
—Les plupart des élèves ont des stratégies pour résoudre et il faut en tenir compte. Hélas, ces stratégies sont généralement très coûteuses et non transposables, car les élèves sont des novices. Enseigner directement et explicitement aux élèves les stratégies efficaces permet à tous les élèves de les apprendre, de les ré-utiliser à la place des stratégies personnelles coûteuses et de réussir avec, ce qui apporte un gain de confiance notable. Il y a également un gain de temps non négligeable qui profite aux élèves sur le moyen/long terme.
—Cette approche pédagogique est-elle une recette miracle qui garantit 100% de réussite ? Non, mais cela qui ne doit pas la disqualifier pour autant. Cette approche nous permet d'atteindre un taux de succès élevé pour tous les élèves en résolution de problèmes. Ce taux de réussite est supérieur à ce qui était obtenu avec d'autres approches pédagogiques. Nous avons moins d'élèves en grande difficulté et les difficultés sont moins fortes. (voir le chapitre « résultats » qui compile plusieurs années de résultats d'évaluations)
—La pratique seule (faire des problèmes pour faire des problèmes) ne va pas transformer les stratégies coûteuses en stratégies efficaces (car dans ce cas il n'y a pas d'enseignement des stratégies, ni progression raisonnée). Résoudre des problèmes régulièrement mais sans enseigner avec une méthodologie claire et efficace comment les modéliser et les résoudre ne va pas améliorer les compétences des élèves. Il faut proposer de très nombreux exemples résolus aux élèves et prendre le temps de mettre en place une pratique guidée avant la phase autonome.
—Les stratégies efficaces doivent être enseignées précocement pour être automatisées. Le but n'est pas d'imposer arbitrairement. D'expérience elles s'imposent naturellement, car elles sont proposées régulièrement par des exemples résolus à tous les élèves. Elles sont moins coûteuses cognitivement tout en garantissant un taux de succès élevé. Il y a une bascule naturelle vers ces stratégies car l'élève voit clairement ce qu'il y gagne. L'enseignant ne doit pas avoir peur d'enseigner et de montrer qu'il est un expert qui va offrir tout ce qui permet à l'élève de réussir dans ce domaine.
—La répétition, pour ancrer des automatismes, est nécessaire et même impérative, ce qui n'en fait pas une activité rébarbative pour autant. L'écueil à éviter serait de chercher à proposer une activité ludique en ne s'occupant que de l'apparence de surface (c'est distractif) alors que c'est la structure interne ludique qui est essentielle (le principe de re-jouabilité vient de là). La progression avec des points, ceintures, niveaux permet cette re-jouabilité sans perdre l'élève dans des distractions graphiques. La forme ne ressemble pas

à un jeu (épuré, ergonomique, sans distractions) mais s'organise autour de la structure d'un jeu.
—Un automatisme ne survient qu'avec la répétition d'un geste ou d'un raisonnement qui est montré, expliqué, corrigé et répété. Cet automatisme, une fois intégré, ne surcharge plus l'élève qui peut alors développer d'autres capacités plus poussées comme des solutions plus originales, des attitudes de recherche et une plus grande persévérance. Ces capacités et attitudes permettent de mettre en place des activités plus inductives.

8 - 3 Progression pour le CE1

Le CE1 est une classe charnière, car il peut y avoir dans les classes une proportion variable d'élèves lecteurs, ayant acquis des automatismes de calcul et autonomes pour rédiger des phrases simples. Ainsi, il nous semble que la progression sur le long terme est plus simple à utiliser dans ce domaine précis, car elle permet quotidiennement d'offrir à tous les élèves des niveaux de difficulté adaptés tout en assurant une exigence minimale élevée. La réponse à l'hétérogénéité n'est donc pas une facilitation par rapport aux exigences, car cela reviendrait à donner moins à ceux qui ont besoin de plus. L'enseignant essaye donc de donner du temps d'apprentissage en plus à ceux qui ont besoin de ce temps tout en permettant aux autres élèves d'aller plus loin sans rien rogner sur les attendus. En ce sens, le fonctionnement via les supports progressifs en une réponse possible à cette hétérogénéité, en complément de l'action de l'enseignant.

Nous avons utilisé plusieurs progressions avec nos élèves, car il a fallu observer, analyser et corriger les supports en fonction de réussites et échecs des élèves et des implications sur le long terme. Une progression se construit en tenant compte de l'interaction de plusieurs éléments : la structure du problème, les grandeurs du problèmes, les calculs nécessaires, etc. Il y a donc un temps de régulation très important pour calibrer au mieux les supports qui resteront de toute façon perfectibles.

Ainsi, nous présenterons tout d'abord une progression détaillée possible qui se focalise sur les problèmes additifs puis d'autres propositions qui s'organisent autour des domaines additifs et multiplicatifs tout au long de l'année.

Le travail des élèves de CE1 porte sur plusieurs points :

- Lecture et compréhension avec repérage d'indices lexicaux visant à déterminer la famille du problème. (Composition ? Transformation ? Comparaison ? Etc) par un travail de grammaire.
- Modélisation de la situation en fonction des indices prélevés.
- Choix du calcul selon la mise en équation issue du schéma.
- Calcul en ligne ou posé selon les besoins.
- Rédaction d'une phrase réponse cohérente et juste avec une orthographe normée.

Tous ces éléments sont évalués à chaque problème et doivent être validés de façon systématique. L'élève est évidemment aidé et guidé selon ses besoins ponctuellement mais l'enseignant ne se substitue pas à l'élève pour effectuer les procédures. Il doit devenir de plus en plus autonome face aux problèmes rencontrés. Cela implique que l'enseignant prend le temps de montrer et d'expliquer comment faire à partir d'exemples résolus nombreux tout en mobilisant les élèves lors de ces phases d'explicitation des procédures.

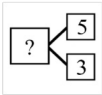
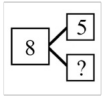
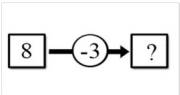
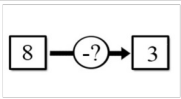
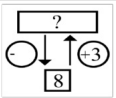
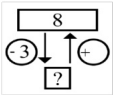
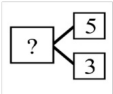
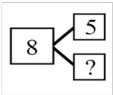
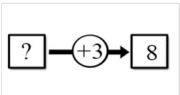
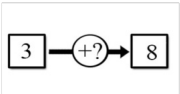
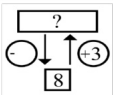
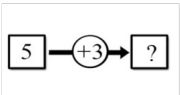
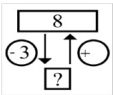
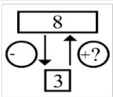
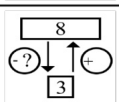
L'autonomie va se construire pas à pas à partir de la capacité de l'élève à faire seul en limitant le nombre d'erreurs mais en partant d'une posture où le guidage par l'enseignant est encore fort. Notre expérience locale montre également que le nombre d'erreurs orthographiques, de copie et de syntaxe chute de manière visible et durable si cet aspect de la langue est évalué dans le problème. L'enseignant engage alors un questionnement orthographique avec l'élève afin que celui-ci se corrige sans le faire à sa place. Le but est de lui montrer comment pratiquer ce questionnement durant la phase d'écriture afin de développer sa vigilance orthographique. Cette vigilance doit être systématique.

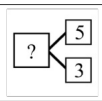
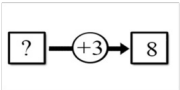
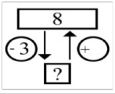
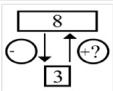
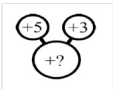
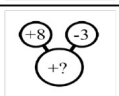
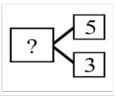
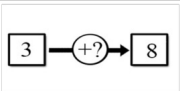
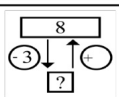
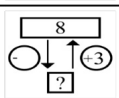
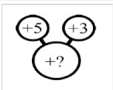
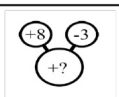
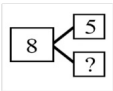
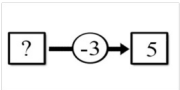
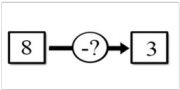
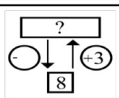
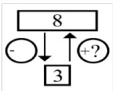
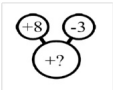
Dans cette première proposition de progression, nous abordons en fin d'année les problèmes de proportionnalité, de division-partition et de division-quotition et cela par le biais des problèmes sur les partages et les échanges. Le rôle de la multiplication apparaît alors plus clairement et plus concrètement aux élèves, de même que la division lors des partages équitables. L'étude et la maîtrise des tables de multiplication se fait en amont et en parallèle du travail de résolution qui concrétise les nouveaux savoirs. **(Les nouvelles progressions changent cet état de fait).** On remarquera que cette proposition fait travailler (très) tardivement ces opérations. Il nous semble que cela n'est pas souhaitable et que ce travail doit avoir lieu toute l'année en proposant des problèmes multiplicatifs très progressifs aux élèves.

La rédaction d'une réponse claire, précise et construite fait l'objet d'une grande attention de notre part. Nous faisons le lien avec les activités de production d'écrit réalisées avec la présence supplémentaire du Maître E. Cette mise en cohérence des différents domaines permet une plus grande efficacité. Chaque séance de travail est suivie, autant que possible, d'une analyse des difficultés et réussites pour réguler en amont les besoins des prochaines séances. Ce qui va « manquer » pour réussir va apparaître clairement et ainsi chaque séance deviendra l'indicatrice des réglages à effectuer. De même, ce qui va « aider » à réussir est mis en avant. La co-intervention est une aide très précieuse pour analyser les productions mais cela n'est pas envisageable dans toutes les écoles.

Des séances « méthodologie » sont alors mises en place pour se concentrer sur l'aspect technique. Nous pouvons par exemple profiter d'une séance pour retravailler la modélisation et la prise d'indices par les élèves qui auraient des lacunes. Le principe est de construire les outils nécessaires pour les situations rencontrées afin de permettre à chaque élève de disposer d'une « boîte à outils » cognitive. Nous valorisons alors les techniques efficaces et modulables et incitons les élèves à les employer.

Progression du fichier CE 1	Types des problèmes	Typologie	Modélisation
Chapitre 1	**1**	Composition de mesures : recherche du composé Paul a 5 billes en verre et 3 billes en acier. **Combien a-t-il de billes en tout ?**	? 5 3
	2	Composition de mesures : recherche du complément Alice a invité 8 enfants pour son anniversaire. 5 d'entre eux sont des garçons. **Combien y a-t-il de filles ?**	8 5 ?
	1	Transformation positive, recherche de l'état final. Max avait 5 billes, il en gagne 3. **Combien en a-t-il maintenant ?**	5 +3 ?
	2	Transformation négative recherche de l'état initial. Tom joue au jeu de l'oie. Il recule de 3 cases et se retrouve sur la case 5. **De quelle case est-il parti ?**	? -3 5
	3	Transformation négative, recherche de l'état final. Hugo avait 8 bonbons, il en mange 3. **Combien lui en reste-t-il ?**	8 -3 ?
Chapitre 2	**1**	Composition de mesures : recherche du composé Paul a 5 billes en verre et 3 billes en acier. **Combien a-t-il de billes en tout ?**	? 5 3
	2	Composition de mesures : recherche du complément Alice a invité 8 enfants pour son anniversaire. 5 d'entre eux sont des garçons. **Combien y a-t-il de filles ?**	8 5 ?
	1	Transformation positive, recherche de l'état final. Max avait 5 billes, il en gagne 3. **Combien en a-t-il maintenant ?**	5 +3 ?
	3	Transformation négative, recherche de l'état final. Hugo avait 8 bonbons, il en mange 3. **Combien lui en reste-t-il ?**	8 -3 ?
	4	Transformation positive recherche de l'état initial. Lucie vient de recevoir 3 € de sa tante. Elle a maintenant 8 €. **Combien avait-elle avant ?**	? +3 8
Chapitre 3	**1**	Composition de mesures : recherche du composé Paul a 5 billes en verre et 3 billes en acier. **Combien a-t-il de billes en tout ?**	? 5 3
	2	Composition de mesures : recherche du complément Alice a invité 8 enfants pour son anniversaire. 5 d'entre eux sont des garçons. **Combien y a-t-il de filles ?**	8 5 ?
	2	Transformation négative recherche de l'état initial. Tom joue au jeu de l'oie. Il recule de 3 cases et se retrouve sur la case 5. **De quelle case est-il parti ?**	? -3 5
	3	Transformation négative, recherche de l'état final. Hugo avait 8 bonbons, il en mange 3. **Combien lui en reste-t-il ?**	8 -3 ?
	5	Transformation d'une mesure : recherche de la transformation positive Léo avait 3 billes avant de jouer. Il a maintenant 8 billes. **Combien en a-t-il gagné ?**	3 +? 8
	6	Transformation d'une mesure : recherche de la transformation négative Léo a 3 billes. Avant de jouer, il en avait 8. **Combien a-t-il perdu de billes ?**	8 -? 3

Chapitre 4	**1**	Composition de mesures : recherche du composé Paul a 5 billes en verre et 3 billes en acier. **Combien a-t-il de billes en tout ?**	
	2	Composition de mesures : recherche du complément Alice a invité 8 enfants pour son anniversaire. 5 d'entre eux sont des garçons. **Combien y a-t-il de filles ?**	
	3	Transformation négative, recherche de l'état final. Hugo avait 8 bonbons, il en mange 3. **Combien lui en reste-t-il ?**	
	6	Transformation d'une mesure : recherche de la transformation négative Léo a 3 billes. Avant de jouer, il en avait 8. **Combien a-t-il perdu de billes ?**	
	1	Comparaison de mesures : recherche du référé Lise a 8 billes . Léa a 3 billes de plus que Lise. **Combien Léa a-t-elle de billes ?**	
	3	Comparaison de mesures : recherche du référé Charlotte a 8 billes. Nina a 3 billes de moins que Charlotte. **Combien Nina a-t-elle de billes ?**	
Chapitre 5	**1**	Composition de mesures : recherche du composé Paul a 5 billes en verre et 3 billes en acier. **Combien a-t-il de billes en tout ?**	
	2	Composition de mesures : recherche du complément Alice a invité 8 enfants pour son anniversaire. 5 d'entre eux sont des garçons. **Combien y a-t-il de filles ?**	
	4	Transformation positive recherche de l'état initial. Lucie vient de recevoir 3 € de sa tante. Elle a maintenant 8 €. **Combien avait-elle avant ?**	
	5	Transformation d'une mesure : recherche de la transformation positive Léo avait 3 billes avant de jouer. Il a maintenant 8 billes. **Combien en a-t-il gagné ?**	
	1	Comparaison de mesures : recherche du référé Lise a 8 billes . Léa a 3 billes de plus que Lise. **Combien Léa a-t-elle de billes ?**	
	3	Comparaison de mesures : recherche du référé Charlotte a 8 billes. Nina a 3 billes de moins que Charlotte. **Combien Nina a-t-elle de billes ?**	
	6	Comparaison de mesures : recherche de la comparaison négative Muriel a 3 billes. Sarah en a 8. **Combien de billes Muriel a-t-elle de moins ?**	
Chapitre 6	**2**	Composition de mesures : recherche du complément Alice a invité 8 enfants pour son anniversaire. 5 d'entre eux sont des garçons. **Combien y a-t-il de filles ?**	
	1	Transformation positive, recherche de l'état final. Max avait 5 billes, il en gagne 3. **Combien en a-t-il maintenant ?**	
	3	Comparaison de mesures : recherche du référé Charlotte a 8 billes. Nina a 3 billes de moins que Charlotte. **Combien Nina a-t-elle de billes ?**	
	5	Comparaison de mesures : recherche de la comparaison positive Muriel a 8 billes. Sarah en a 3. **Combien de billes Muriel a-t-elle de plus ?**	
	6	Comparaison de mesures : recherche de la comparaison négative Muriel a 3 billes. Sarah en a 8. **Combien de billes Muriel a-t-elle de moins ?**	

Chapitre 7	**1**	Composition de mesures : recherche du composé Paul a 5 billes en verre et 3 billes en acier. **Combien a-t-il de billes en tout ?**	
	2	Composition de mesures : recherche du complément Alice a invité 8 enfants pour son anniversaire. 5 d'entre eux sont des garçons. **Combien y a-t-il de filles ?**	
	4	Transformation positive recherche de l'état initial. Lucie vient de recevoir 3 € de sa tante. Elle a maintenant 8 €. **Combien avait-elle avant ?**	
	3	Comparaison de mesures : recherche du référé Charlotte a 8 billes. Nina a 3 billes de moins que Charlotte. **Combien Nina a-t-elle de billes ?**	
	5	Comparaison de mesures : recherche de la comparaison positive Muriel a 8 billes. Sarah en a 3. **Combien de billes Muriel a-t-elle de plus ?**	
	1	Composition de deux transformations recherche de la transformation composée Axel a joué deux parties de billes. A la première, il en a gagné 5 et à la seconde, il en a gagné 3. **Combien en a-t-il gagné en tout ?**	
	3	Composition de deux transformations recherche de la transformation composée Bill a joué deux parties. A la première, il a gagné 8 billes et à la deuxième, il en a perdu 3. **Combien a-t-il gagné de billes en tout ?**	
Chapitre 8	**1**	Composition de mesures : recherche du composé Paul a 5 billes en verre et 3 billes en acier. **Combien a-t-il de billes en tout ?**	
	5	Transformation d'une mesure : recherche de la transformation positive Léo avait 3 billes avant de jouer. Il a maintenant 8 billes. **Combien en a-t-il gagné ?**	
	3	Comparaison de mesures : recherche du référé Charlotte a 8 billes. Nina a 3 billes de moins que Charlotte. **Combien Nina a-t-elle de billes ?**	
	4	Comparaison de mesures : recherche du référent Charlotte a 8 billes. Elle a 3 billes de plus que Nina. **Combien Nina a-telle de billes ?**	
	1	Composition de deux transformations recherche de la transformation composée Axel a joué deux parties de billes. A la première, il en a gagné 5 et à la seconde, il en a gagné 3. **Combien en a-t-il gagné en tout ?**	
	3	Composition de deux transformations recherche de la transformation composée Bill a joué deux parties. A la première, il a gagné 8 billes et à la deuxième, il en a perdu 3. **Combien a-t-il gagné de billes en tout ?**	
Chapitre 9	**2**	Composition de mesures : recherche du complément Alice a invité 8 enfants pour son anniversaire. 5 d'entre eux sont des garçons. **Combien y a-t-il de filles ?**	
	2	Transformation négative recherche de l'état initial. Tom joue au jeu de l'oie. Il recule de 3 cases et se retrouve sur la case 5. **De quelle case est-il parti ?**	
	6	Transformation d'une mesure : recherche de la transformation négative Léo a 3 billes. Avant de jouer, il en avait 8. **Combien a-t-il perdu de billes ?**	
	1	Comparaison de mesures : recherche du référé Lise a 8 billes . Léa a 3 billes de plus que Lise. **Combien Léa a-t-elle de billes ?**	
	5	Comparaison de mesures : recherche de la comparaison positive Muriel a 8 billes. Sarah en a 3. **Combien de billes Muriel a-t-elle de plus ?**	
	3	Composition de deux transformations recherche de la transformation composée Bill a joué deux parties. A la première, il a gagné 8 billes et à la deuxième, il en a perdu 3. **Combien a-t-il gagné de billes en tout ?**	

Progression du fichier	Types des problèmes Multiplicatifs	Typologie	Modélisation
Chapitre 10	**1**	Proportionnalité simple, multiplication : Recherche du nombre d'éléments 1 dictionnaire coûte 38€. **Combien coûtent 8 dictionnaires ?**	1 | 38 8 | ?
Chapitre 11	**2**	Proportionnalité simple, division/partition : Recherche du nombre d'éléments par part L'achat de 12 dictionnaires identiques a coûté 372 €. **Quel est le prix d'un seul dictionnaire ?**	1 | ? 12 | 372
	3	Proportionnalité simple, division/quotition : Recherche du nombre de parts Une fermière range 48 œufs dans des boîtes de 6 œufs. **Combien de boîtes d'œufs remplit-elle ?**	1 | 6 ? | 48

Cette progression est bâtie pour permettre d'aborder au sein d'un même chapitre la différenciation progressive entre grandes familles de problèmes. Il s'agit donc ici de mettre l'accent sur l'aspect méthodologique de la résolution. Il faut donc pour l'élève cibler la famille du problème en faisant sienne la démarche de résolution puis utiliser le modèle adéquat pour exprimer la structure logique du problème rencontré. Le choix de la modélisation et la justesse du ciblage des éléments symboliques traduisent de la compréhension fine de la structuration du problème. Le calcul n'en est que le prolongement.

Les mêmes structures sont rencontrées en continue avec un ajout progressif de structures nouvelles. La découverte est parallèle (plusieurs types au choix afin de d'aborder et la modélisation et le parallélisme de l'addition et de la soustraction) **et** séquentielle (une découverte progressive calibrée) afin de ne pas enfermer l'élève dans une structure de pensée uniquement séquentielle où tous les problèmes rencontrés sont toujours du même type (modèle et calcul). Les types de problèmes rencontrés en début d'année seront toujours présents en fin d'année dans notre progression (principe spiralaire), la part qu'ils occupent sera néanmoins moindre mais permettra de remobiliser sans cesse les automatismes mémoriels de réflexion et de calculs.

Cette progression nous permet de travailler sur le long terme tous les aspects de notre projet en continuité du travail initié au CP et en préparation des fichiers du cycle 3.
Selon les familles de problèmes abordées tous les types existants ne seront pas étudiés. Le projet est construit du CP au CM2 pour permettre cette étude sur un temps long.

Cette progression, très détaillée, confronte les élèves de façon progressive à plusieurs grandes familles de problèmes en parallèle avec la modélisation de la situation rencontrée mais les problèmes multiplicatifs sont abordés tardivement et cela peut être pénalisant pour la suite.

Ci-dessous, une autre proposition de progression, succincte, qui reprend la progression des structures additives de la progression précédente tout en incluant dans chaque chapitre des structures multiplicatives. L'élève est donc confronté à des problèmes arithmétiques qui relèvent des 4 opérations. Il faut prendre le temps de calibrer la difficulté des différentes composantes.

	Problèmes additifs	Problèmes multiplicatifs	
Chapitre 1	Compositions d'états Transformations d'états	Comparaisons multiplicatives : - Multiplication - Division	Page : 3
Chapitre 2			Page : 13
Chapitre 3			Page : 23
Chapitre 4			Page : 33
Chapitre 5	Compositions d'états Transformations d'états Comparaisons d'états	Configuration rectangulaire: - Multiplication - Division	Page : 43
Chapitre 6			Page : 53
Chapitre 7			Page : 63
Chapitre 8			Page : 73
Chapitre 9	Compositions d'états Transformations d'états Comparaisons d'états Compositions de transformations	Proportionnalité : - Multiplication - Division	Page : 83
Chapitre 10			Page : 93
Chapitre 11			Page : 103
Chapitre 12			Page : 113

Il s'agit de la progression du Niveau 2 du fichier de résolution de problèmes (version 2018 – 2019). Sans entrer dans le détail de chaque chapitre, on remarque que les catégories de problèmes sont amenées progressivement afin de catégoriser et différencier de plus en plus. De deux catégories pour débuter, jusqu'à 4 à la fin du fichier. De même, les problèmes multiplicatifs sont abordés dès le début de l'année de manière très progressive en les liant aux champs numériques étudiés. Nous proposons alors trois grandes catégories de problèmes multiplicatifs pour débuter le travail de modélisation et continuer celui portant sur la construction du nombre via la multiplication et la division. Il y a donc plusieurs progressions imbriquées : les grandeurs, les opérations, les catégories, etc.

Voici une trame d'organisation pour établir avec sa classe une progression en tenant compte des structures arithmétiques, des opérations, de la difficulté de celles-ci (retenues), du champ numérique, des tables et des grandeurs rencontrées. Ce document est un exemple de ce qui est possible. Il faut envisager cette trame comme une portion de la trame globale à tous les cycles qui servira à établir une progression d'école.

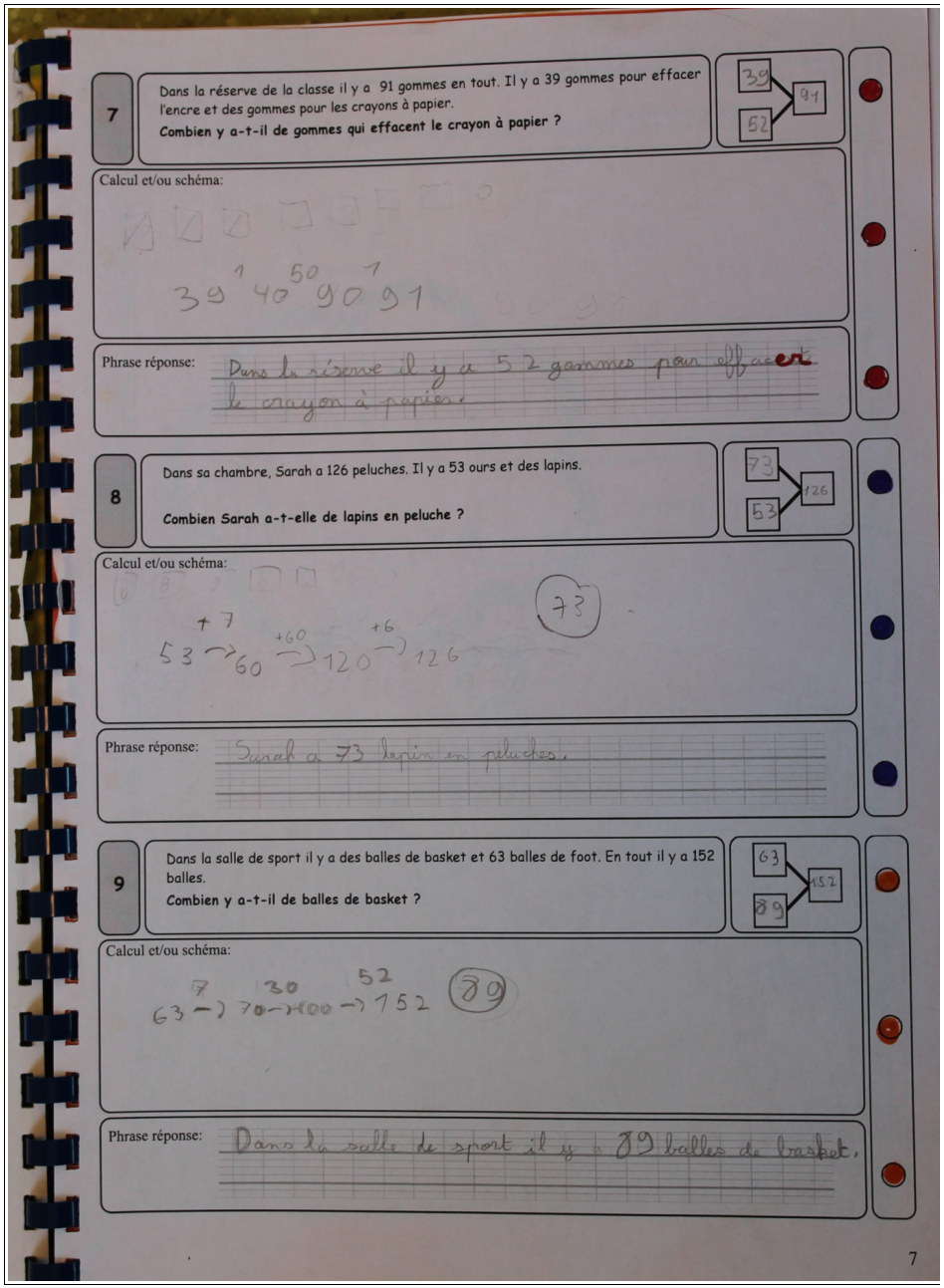
Chapitre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Structure additive														
Structure multiplicative														
Addition	●	●	●	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R
Soustraction	●	●	●	●	●	R	R	R	R	R	R	R	R	R
Multiplication	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
Division	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
Champ additif	0 - 20	0 - 30	0 - 40	0 - 50	0 - 60	0 - 70	0 - 80	0 - 90	0 - 100	0 - 100	0 - 100	0 - 130	0 - 150	0 - 200
Champ multiplicatif	×2,3	×2,4	×2,3,4	×3,4	×3,4,5	×2,5	×2,3,5	×4,5	×2,3,4	×3,5	×2,4,5	×2,3,4,5	×2,3,4,5	×2,3,4,5
€ et cents	●		●		●	●	●	●	●		●	●	●	●
cm et m	●	●		●	●	●		●		●	●		●	●
m et km			●				●	●		●		●	●	●
kg et g		●	●	●		●	●			●		●	●	●
l et cl	●			●		●	●	●	●		●		●	●

8 - 4 Productions des élèves de CE1

Tout au long de cet ouvrage nous présentons un travail mené auprès d'élèves de l'éducation prioritaire, travail mené sur plusieurs années dans un contexte éducatif, social et géographique donné. De nombreux élèves, en REP et hors-REP de France ne sont pas concernés par ce contexte particulier et il faut en tenir compte pour mieux cerner l'action des enseignants, leurs objectifs et leurs contraintes. Aussi, il nous semble essentiel de présenter des exemples nombreux des productions des élèves afin que les lecteurs puissent mieux comprendre le travail de ceux-ci et comment il est intégré dans le contexte de l'école. Nous pensons que cela permet d'avoir une vision plus globale de ce qu'il est possible de faire avec les élèves, de ce qu'il est possible d'attendre d'eux et de ce qui est transférable à d'autres contextes scolaires.

Nous présenterons des travaux issus de fichiers anciens et récents. Cela permettra de voir l'évolution des supports et des tâches proposées, et pourquoi ces évolutions, tout en observant également les productions des élèves.

Actuellement, les CE1 doivent catégoriser les problèmes de manière progressive (2, 3 puis 4 catégories) puis compléter le modèle logique ou le modifier si nécessaire. Ces actions se font avec ou sans guidage de l'enseignant selon qu'il souhaite ou non organiser une phase d'explicitation orale en groupe et selon le degré d'autonomie et d'expertise de l'élève. Il y a donc un outil, ergonomique et explicite, qui offre plusieurs possibilités de travail à l'enseignant. C'est lui qui déterminera comment il s'en empare, selon son contexte, tout en respectant la nature de l'outil.



7 Dans la réserve de la classe il y a 91 gommes en tout. Il y a 39 gommes pour effacer l'encre et des gommes pour les crayons à papier.
Combien y a-t-il de gommes qui effacent le crayon à papier ?

39 52 91

Calcul et/ou schéma:

39 1 40 50 90 1 91

Phrase réponse: Dans la réserve il y a 52 gommes pour effacer le crayon à papier.

8 Dans sa chambre, Sarah a 126 peluches. Il y a 53 ours et des lapins.
Combien Sarah a-t-elle de lapins en peluche ?

73 53 126

Calcul et/ou schéma:

53 +7 → 60 +60 → 120 +6 → 126 73

Phrase réponse: Sarah a 73 lapin en peluches.

9 Dans la salle de sport il y a des balles de basket et 63 balles de foot. En tout il y a 152 balles.
Combien y a-t-il de balles de basket ?

63 89 152

Calcul et/ou schéma:

63 → 70 7 → 100 30 → 152 52 89

Phrase réponse: Dans la salle de sport il y a 89 balles de basket.

7

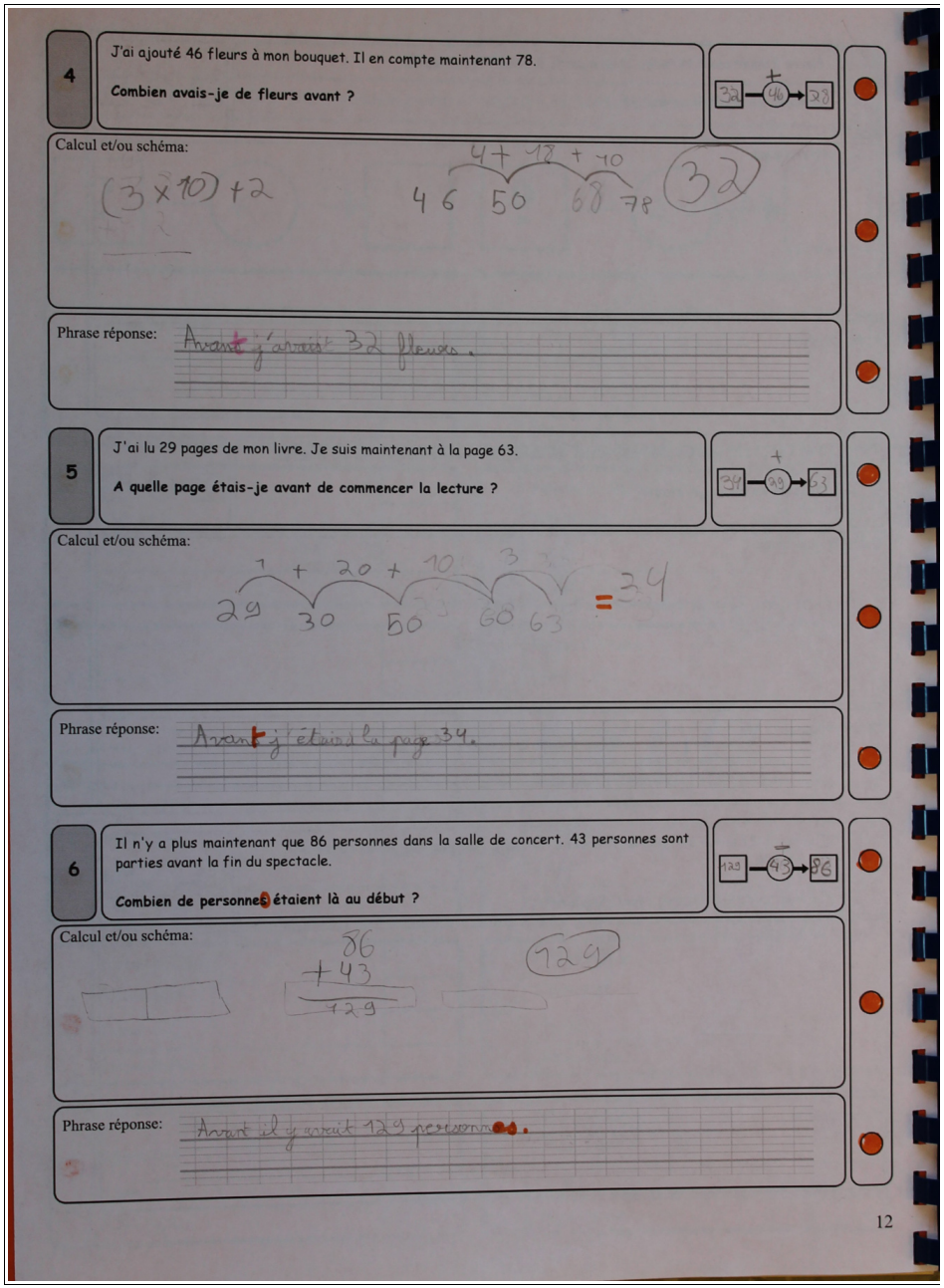
Compositions d'états : Recherche d'une partie.

– Lors de la recherche d'une partie les élèves de CE1 sont confrontés à la soustraction. La solution experte serait de poser la soustraction en retranchant la **partie** connue du **tout,** lui aussi connu. Les élèves, à ce moment de l'année, ne connaissaient pas cette procédure experte et ont donc dû utiliser une autre méthode de résolution comme indiqué sur la photo de gauche.

– La technique utilisée ici consiste à partir de la **partie** connue en complétant jusqu'au **tout**. Nous voyons la symbolisation du passage jusqu'à la dizaine supérieure, le comptage des dizaines puis le passage de la dizaine inférieure au **tout** jusqu'au **tout**.

– La somme Dizaine + Unités ainsi obtenue est donc la différence entre le **tout** et la **partie** connue. Les élèves réalisent donc une addition à trou avant de passer par la suite a la technique opératoire experte.

– La validation du problème se fait en 3 étapes : Schéma correct symbolisant le problème mathématique, résolution par une technique opératoire puis rédaction d'une phrase réponse.



4 J'ai ajouté 46 fleurs à mon bouquet. Il en compte maintenant 78.

Combien avais-je de fleurs avant ?

Calcul et/ou schéma:

(3 x 10) + 2

4 + 12 + 10

46 50 60 78

32

Phrase réponse: Avant j'avais 32 fleurs.

5 J'ai lu 29 pages de mon livre. Je suis maintenant à la page 63.

A quelle page étais-je avant de commencer la lecture ?

Calcul et/ou schéma:

1 + 20 + 10 + 3 = 34

29 30 50 60 63

Phrase réponse: Avant j'étais à la page 34.

6 Il n'y a plus maintenant que 86 personnes dans la salle de concert. 43 personnes sont parties avant la fin du spectacle.

Combien de personnes étaient là au début ?

Calcul et/ou schéma:

86
+ 43
129

129

Phrase réponse: Avant il y avait 129 personnes.

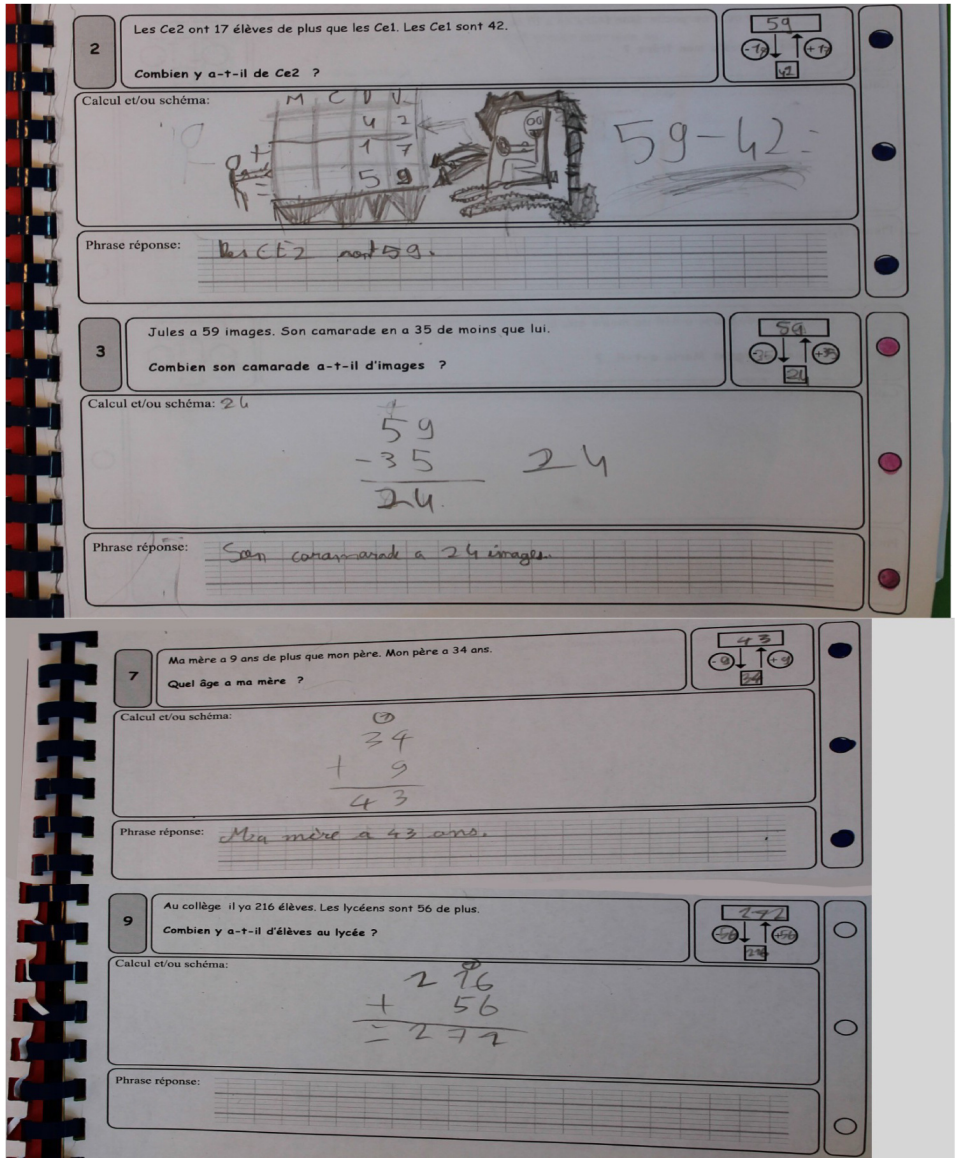
12

<u>Transformation positive/négative : recherche de l'état initial.</u>

– Dans ce chapitre les problèmes de transformation sont additifs et soustractifs. Il n'y a pas d'alternance entre eux, la distribution de ces problèmes est effectuée au hasard pour éviter toute automatisation sans réflexion.

– La recherche de l'état initial implique un calcul dont le signe est l'inverse de celui présent dans la modélisation temporelle du problème.

– L'aspect méthodologique est donc très investi afin systématiser l'emploi d'outils créés avec les élèves. L'addition à trou et la soustraction à trou impliquent une démarche de résolution précise qui est présente sous forme d'affichage et d'aide-mémoire jusqu'à automatisation de la démarche.



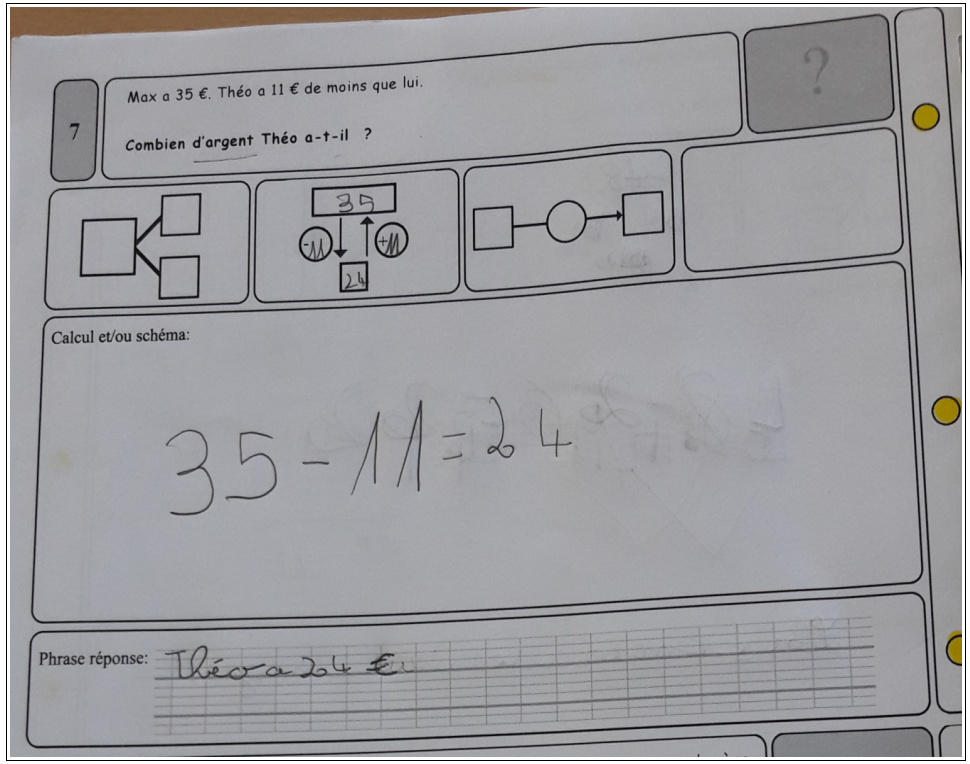
Comparaisons d'états :

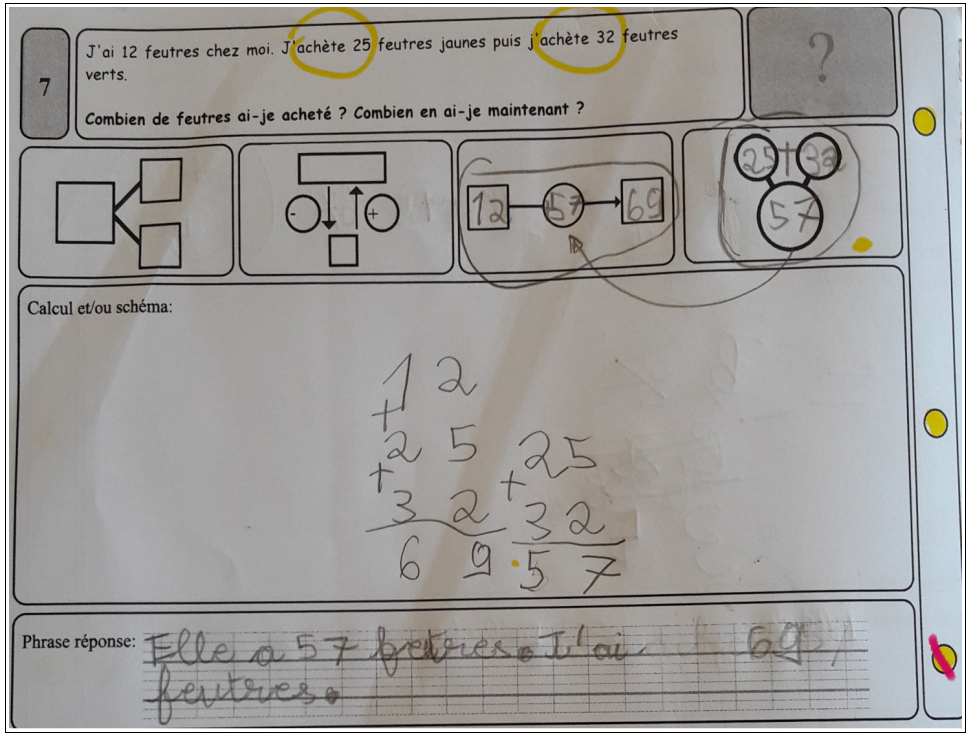
– Voici les productions de 2 élèves lors de la résolution de problèmes de comparaisons. Le modèle schématique leur permet de poser l'équation représentative du problème en observant en parallèle sa réciproque. L'addition et la soustraction vont se compléter pour chercher et vérifier le résultat.

– Dans le premier exemple l'élève pose l'addition (47 + 12) afin de trouver le résultat 59. Après avoir trouvé 59, il pose 59 – 42 afin de retrouver la différence. Le résultat n'est pas visible car l'élève a indiqué « J'ai vu que c'était 17 alors j'avais bon et j'ai pas écris. »

– Dans le second exemple il ne manque que la phrase réponse correcte pour valider le problème. Le modèle schématique montre les 2 égalités possibles et le calcul posé est juste. L'importance donnée au soin est encore à améliorer.

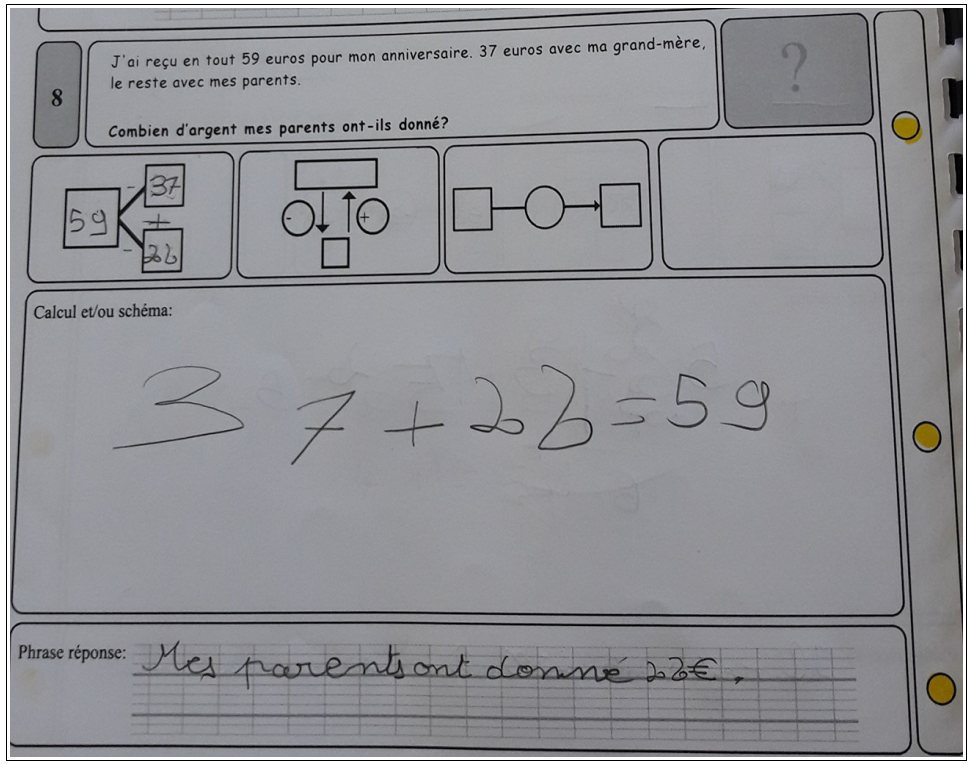
Ci-dessous des illustrations des productions actuelles des élèves.

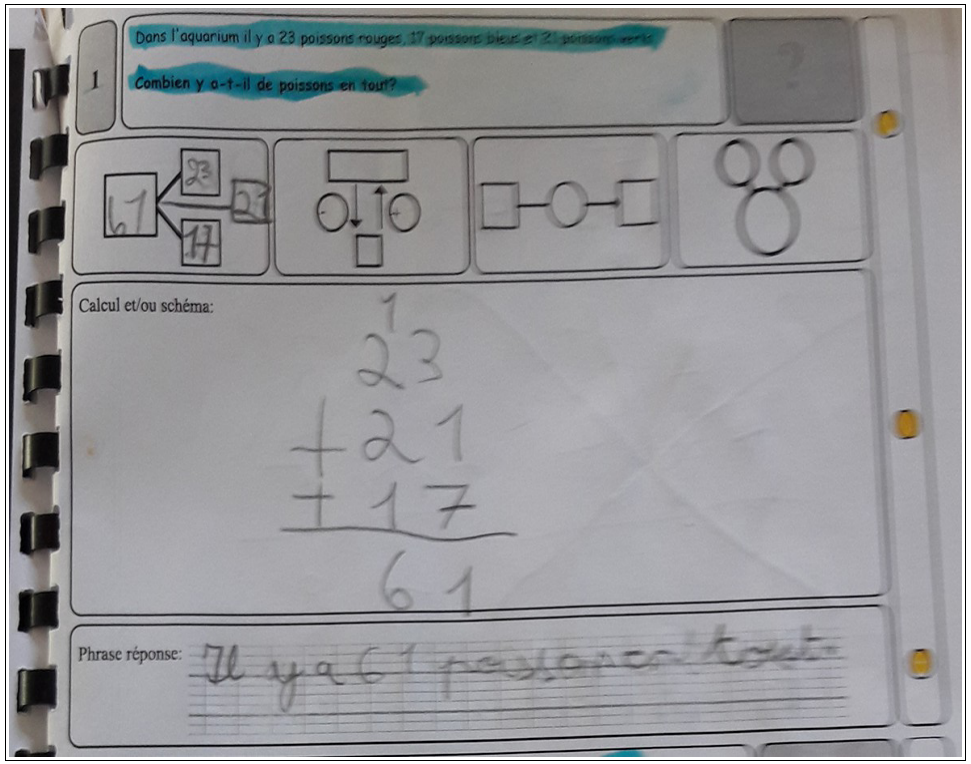




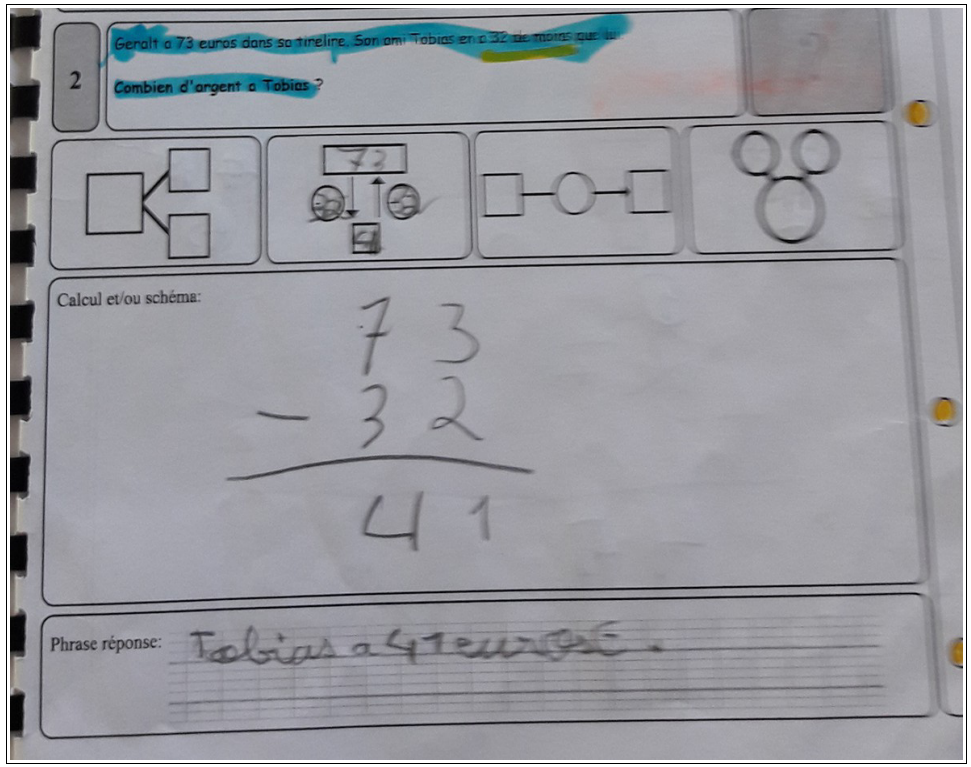
Le problème est une situation de comparaison. L'élève a identifié la situation comme telle. Le schéma est complété de manière logique, le calcul qui en découle est juste et la phrase réponse également. Les CE1 sont confrontés à une complexification progressive. Il y a donc dans les fichiers une progression sur la catégorisation, sur les situations, sur les techniques opératoires et sur les grandeurs rencontrées.

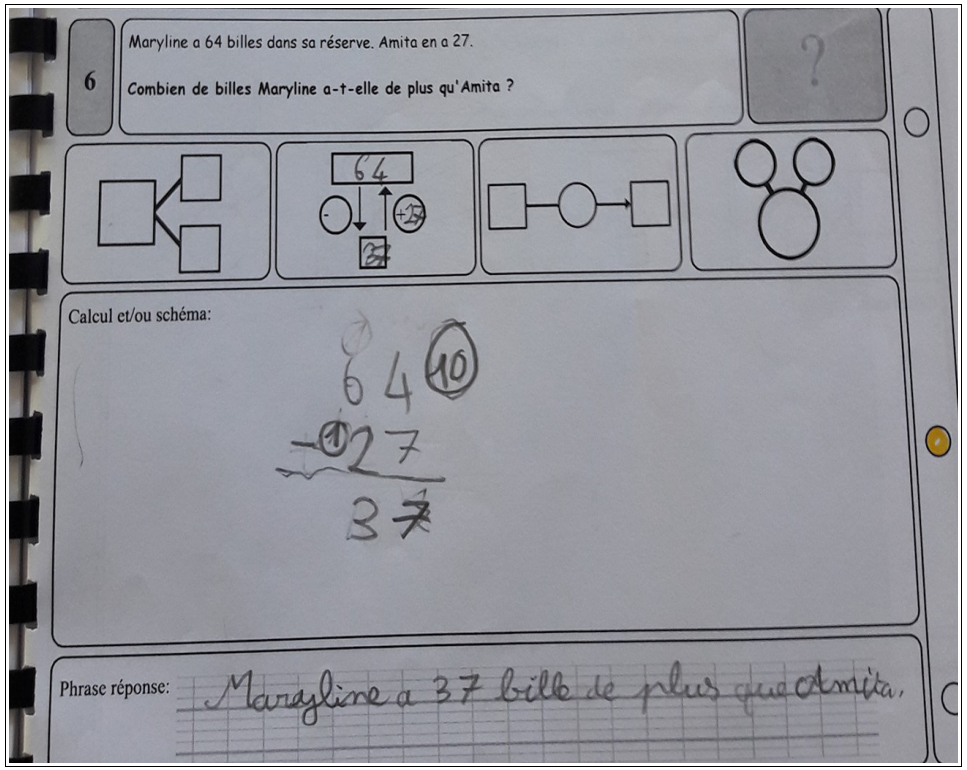
Voici un problème de CE1 (niveau 2 sur 5) qui se représente par la fusion de 2 modèles. Les modèles sont des structures agglomérantes si la situation le nécessite. L'élève représente toutes les composantes et tous les liens qui composent ce problème arithmétique. L'explicitation est favorisée par le support qui permet de cibler les données explicites et les relations implicites. Ce travail d'explicitation/modélisation peut se faire en groupe, seul, avec l'enseignant pour montrer guider si nécessaire. En fonction des attentes de l'enseignant, les modalités de l'intervention vont évoluer.



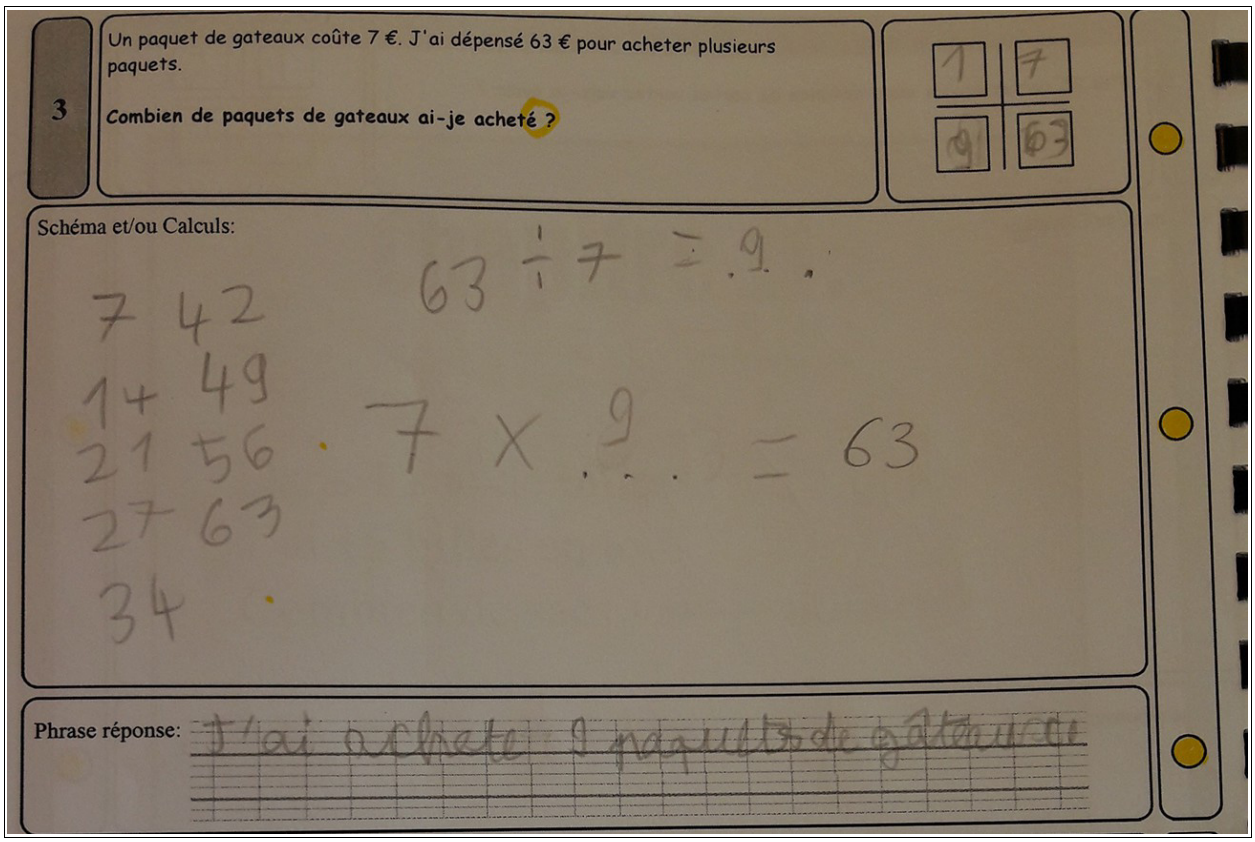


L'élève a modifié le modèle schématique pour y ajouter la partie manquante. Les modèles sont des bases qui sont modifiables.





Problème inachevé avec des corrections (schéma et phrase).



3

Un paquet de gateaux coûte 7 €. J'ai dépensé 63 € pour acheter plusieurs paquets.

Combien de paquets de gateaux ai-je acheté ?

1	7
9	63

Schéma et/ou Calculs:

7 42
14 49
21 56
27 63
34

63 ÷ 7 = 9

7 × 9 = 63

Phrase réponse: J'ai acheté 9 paquets de gateaux

8 - 5 Progression pour les CE2, CM1 et CM2

Note : Ces progressions ont été remaniées et ne sont pas forcément les progressions actuelles. Nous présenterons ici des progressions envisageables avec les élèves.

La première progression proposée était celle du fichier de niveau CE2, il y a plusieurs années lors des prémices de ce projet. L'actuel fichier de niveau 3 cible un niveau à peu près équivalent mais a une progression qui a été remaniée. Ce fichier était débuté par tous les CE2 dès le début de l'année. Il était néanmoins possible de le débuter dès la fin du CE1 si des élèves avaient terminé le Fichier CE1. Ce fichier était une proposition de travail et une première approche pour s'engager dans la résolution de problème. Il a été plusieurs fois remanié à mesure que la construction globale sur les cycles se mettait en place.

Durant les années de CE2, CM1 et CM2, les différentes familles et types de problèmes sont vus progressivement les uns après les autres et les uns avec les autres afin d'étudier le plus en profondeur les familles de problème tout en les différenciant et en travaillant leurs analogies. Il s'agit d'une reprise des 4 grands ensembles de problèmes vus au CE1 avec une plus grande variété. Le domaine numérique concerné est toujours en relation avec les attendus des programmes mais arrive en décalage de façon à ne pas surcharger la réflexion des élèves avant qu'ils aient les automatismes nécessaires. Le principe est de confronter les élèves à une majorité de problèmes dont les grandeurs sont déjà maîtrisées. Nous évitons de faire cohabiter plusieurs difficultés qui vont nuire à l'apprentissage des stratégies. À chaque automatisme acquis, il est devient possible d'augmenter une des difficulté progressivement.

Toutes les variances de problèmes ne sont pas encore abordées, ils le seront progressivement durant tout le cycle 3. Néanmoins toutes les familles seront étudiées. Les fichiers sont construits de manière spiralaire aussi chaque famille de problème sera revue régulièrement durant les 3 années du cycle afin de renforcer la mise en mémoire.

Le rythme de travail souhaité est au minimum de terminer un fichier chaque année, ce qui correspond à 128 problèmes environ. Ce nombre est un minimum qui ne tient pas compte des problèmes étudiés régulièrement et qui sont résolus tous les jours pour s'entraîner et s'exercer. Il s'agit ici d'un socle de problèmes à résoudre sur le créneau spécifique de résolution de problème et qui peut avoir un caractère évaluatif. Ces problèmes peuvent servir de modèles étudiés avec l'enseignant en complément d'un travail plus autonome. Cela correspond environ à 4 problèmes à résoudre, en moyenne, chaque semaine en 45 minutes. De manière brute, c'est évidemment très peu. Idéalement, il nous semble qu'il serait souhaitable de faire résoudre 4 à 5 problèmes quotidiennement. Le

fichier sert alors de support à l'enseignant pour « piocher » des problèmes dont les données sont modifiées afin de générer de multiples énoncés et permettre de s'exercer plus encore durant une phase de pratique guidée avec l'enseignant. Ainsi, le travail sur fichier est un moment d'explicitation et de travail méthodologique qui sera développé tout au long de la semaine dans des séances quotidiennes.

Ce rythme est également à mettre en lien avec la variété des élèves et il peut y avoir de grandes disparités entre eux. Les plus rapides peuvent résoudre une moyenne de 9 problèmes chaque semaine en 45 minutes et les plus lents 1 seul. Cette disparité permet de cibler immédiatement les besoins en analysant les freins possibles. Le travail « à côté » en amont permet de vérifier sur le support s'il est porteur pour l'élève.

La progression du fichier de niveau 4 n'est pas indiquée en détail. En effet chaque chapitre propose une variété de problèmes additifs puis multiplicatifs. Il y a premièrement dans chaque chapitre les 4 grandes familles de problèmes additifs avec des types choisis et proposés de manière aléatoire. L'élève doit reconnaître le modèle associé à chaque situation et à sa structure puis indiquer ce qu'il sait et ce qu'il cherche. Dans un second temps l'élève est confronté au domaine multiplicatif qui implique là aussi de cibler le modèle permettant de représenter la situation problème.

Le fichier de niveau 5 propose de manière totalement aléatoire au long des chapitres tous les types de la typologie. Y sont ajoutées les configurations triangulaires et les configurations cubiques de même que les problèmes de proportionnalité composée. Tous les problèmes se résolvent par étapes successives. Chaque étape correspond à un modèle, d'où la construction complexe de ces problèmes. Ainsi, tous les problèmes du niveau 5 sont des compositions de problèmes arithmétiques. Un support géométrique (plan, croquis…) est parfois présent pour illustrer le problème rencontré, le support peut évidemment être annoté par l'élève si besoin. Dans ces niveaux, nous n'oublions pas les problèmes faisant intervenir les fractions.

Vous trouverez donc à suivre deux propositions de progressions pour le niveau 3, ce qui correspond a une proposition pour des Ce2, ou début Cm1. D'un côté une progression qui sépare en deux le fichier, les problèmes additifs d'abord puis les problèmes multiplicatifs. D'un autre côté une progression parallèle additif/multiplicatif. L'organisation de nos fichiers est modulable selon les contextes mais et la mise en œuvre est tout de même très spécifique aussi il est hautement préférable de se familiariser avec celle-ci en lisant cet ouvrage afin de comprendre les intentions de l'auteur et comment cet outil a été pensé.

Problèmes additifs et soustractifs

	Compositions		Transformations						Comparaisons						Compositions de transformations					
	Type 1	Type 2	Type 1	Type 2	Type 3	Type 4	Type 5	Type 6	Type 1	Type 2	Type 3	Type 4	Type 5	Type 6	Type 1	Type 2	Type 3	Type 4	Type 5	Type 6
	■																			
		■																		
			■		■															
							■	■												
				■		■														
									■	■	■	■								
													■	■						
															■		■	■		
																■			■	■

Problèmes multiplicatifs

	Comparaisons multiplicatives						Produit cartésien		Conf Rect.		Conf Tri.		Conf Cub.		Proportionnalité				Proportionnalité simple composée				Proportionnalité double			
	Type 1	Type 2	Type 3	Type 4	Type 5	Type 6	Type 1	Type 2	Type 1	Type 2	Type 3	Type 4	Type 5	Type 6	Type 1	Type 2	Type 3	Type 4	Type 1	Type 2	Type 3	Type 4	Type 1	Type 2	Type 3	Type 4
	■	■	■	■																						
							■																			
									■	■																
															■											
																	■									
																■										
																		■								

Chapitre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Structure additive																
Structure multiplicative																
Addition	●	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R
Soustraction	●	●	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R
Multiplication	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
Division	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
Champ additif	<100	<150	<150	<200	<200	<250	<300	<300	<350	<400	<500	<500	<700	<800	<1000	<1000
Champ multiplicatif	×2,3,4,5	×3,4,5,6	×2,4,5,6	×3,4,6,7	×2,3,4,5	×4,5,6,7	×2,4,6,8	×3,6,9	×4,7,8,9	×2 à 9	×2 à 9	×2 à 12	×2 à 15	×2 à 20	×2 à 20	×2 à 30
€ et cents	●		●	●	●	●	●	●	●		●	●	●	●	●	●
cm et m	●	●	●	●	●	●		●		●	●	●	●		●	●
m et km		●	●				●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
kg et g	●	●	●	●	●	●	●			●		●	●	●	●	●
l et cl	●	●		●		●	●	●	●		●		●		●	●

Dans la proposition de progression précédente, le champ additif est donné comme une possibilité. Les ordres de grandeurs sont donc à doser selon les possibilités des élèves. La difficulté globale est dosée de manière à éviter la manipulation de quantités trop importantes. C'est un choix pour éviter que la grandeur rencontrée ne prenne le pas sur la compréhension de l'énoncé, car les élèves se focalisent très souvent sur les données numériques pour décréter qu'un problème est « trop dur ». D'un autre côté, il ne faut pas non plus que les quantités soient trop faibles afin de ne pas leurrer les élèves sur leurs compétences. L'équilibre doit se faire entre toutes les composantes et une progression sous cette forme permet de réguler si besoin.

Le champ multiplicatif montre la progression sur les tables de multiplication et divisions qui sont amenées petit à petit. Il est envisageable d'aller plus vite si l'enseignant en a la possibilité car encore une fois, tout dépend du contexte. Les multiplications à deux chiffres vont ensuite permettre d'aller beaucoup plus loin si la maîtrise des tables est assurée. Il s'agit d'un automatisme qui permet de développer encore plus les algorithmes de la multiplication et de la division.

Les grandeurs proposées permettent aussi de les manipuler quotidiennement. Il n'y a donc pas une catégorie à part qui serait « les problèmes de grandeurs » ou « les problèmes de mesures » mais plutôt des problèmes aux structures internes variées qui font intervenir des grandeurs et mesures particulières (volume, masse etc). Catégoriser les problèmes selon les grandeurs impliquerait une catégorisation de surface, thème déjà abordé, qui ferait abstraction de la structure interne du problème et enfermerait les élèves dans des stratégies non transférables, ou très limitées. Ici encore, la progression est une proposition de ce qu'il est possible de faire.

Chapitre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Structure additive																
Structure multiplicative																
Addition	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R
Soustraction	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R
Multiplication																
Division																

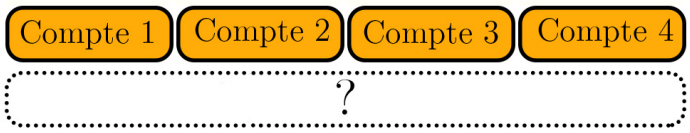
Champ additif	entre 0 et 10 000, utilisation de nombres décimaux et de fractions. Quelques problèmes avec des grandeurs plus importantes mais cohérentes.
Champ multiplicatif	Multiplication à 1, 2, et 3 chiffres, avec des nombres décimaux. Diviseurs a 1, 2 et 3 chiffres, quotient décimal. Division d'un nombre décimal.

€ et cents																
cm et m																
m et km																
kg et g																
l et cl																

Dans cette proposition de progression pour le Niveau 4, c'est à dire des élèves de CM1-CM2, chaque chapitre donne à travailler toutes les structures additives ou multiplicatives. L'essentiel est de travailler la méthodologie de résolution, « comment je fais ». Il faut donc continuer le travail de mise en mots de la situation pour articuler les données de manière à en comprendre la structure. Il faut également continuer à modéliser simplement la situation pour faire apparaître les liens entre les données et donner du sens à l'opération. Tout le travail débuté au cycle 2 va se poursuivre en affinant de plus en plus et en simplifiant la modélisation.

Ainsi, il n'apparaîtra peut-être plus nécessaire de proposer des modèles en barre avec des données numériques exactes et qui seront de grands nombres alors qu'il serait plus simple de proposer naturellement ces mêmes modèles avec des codages simples selon les problèmes.

Exemples : *« Martin possède 4 comptes sur lesquels il a 25678,56 €, 4562,23€, 54700,95€ et 3005,06€. »*



L'important est ici de savoir que ces comptes sont les parties d'un tout et qu'un modèle faisant apparaître 4 parties, nommées de 1 à 4, est une façon simple et judicieuse de modéliser cette situation avant de passer à la phase opératoire. Cette phase est nécessaire pour vérifier la pleine compréhension de la situation.

Dans cette proposition de progression, il nous apparaît également essentiel de proposer aux élèves des problèmes faisant intervenir les mesures de grandeurs diverses comme les volumes et les masses. Il y a ici un rebrassage permanent des connaissances des élèves.

8 - 6 Productions des élèves de CE2, CM1 et CM2

Les élèves de CE2 travaillent généralement avec le fichier de niveau 3. Malgré tout, comme les classes sont nombreuses et hétérogènes, il y aura toujours en début d'année des élèves avec des supports dont les niveaux sont différents. Il ne faut pas s'en inquiéter.

De même, dans le cas où les élèves utilisent un support identique, ils ne seront pas tous au même chapitre. Néanmoins, tous les élèves sont sur la même tâche : un travail méthodologique de catégorisation, de modélisation et de traduction pour résoudre des problèmes arithmétiques mais à une difficulté adaptée à leur niveau. Les supports permettent d'aider à doser la difficulté en proposant un « minimum » élevé au niveau des exigences tout en proposant de tendre vers un « maximum » à ceux qui avancent très vite. Il n'y a donc pas un allègement des exigences envers les plus lents ou les élèves qui ont des difficultés plus fortes, au contraire. Le principe est de donner plus de temps quand cela est nécessaire en différenciant non pas sur la difficulté proposée mais sur le temps d'acquisition nécessaire pour acquérir un « minimum » élevé. Si un élève a encore besoin d'exemples résolus, de guidage, d'accompagnement, il faut les lui donner tout en permettant aux autres de pratiquer en autonomie pour automatiser les processus.

La difficulté réside dans cette gestion de classe, car les besoins sont divers. Néanmoins, par expérience sur les différents niveaux, après plusieurs phases d'explicitation des procédures et stratégies, après des phases de pratique accompagnée de tous les élèves, plus des trois quarts des élèves peuvent travailler en autonomie pour parfaire leurs procédures et stratégies. C'est le quart restant des élèves qui bénéficiera d'une pratique guidée supplémentaire en groupe restreint pour enfin pouvoir pratiquer en autonomie. Cela peut durer, une difficulté scolaire ne se règle pas en quelques séances, mais il faut en avoir conscience pour ne rien rogner sur les exigences et penser la progression de ces élèves sur le long terme.

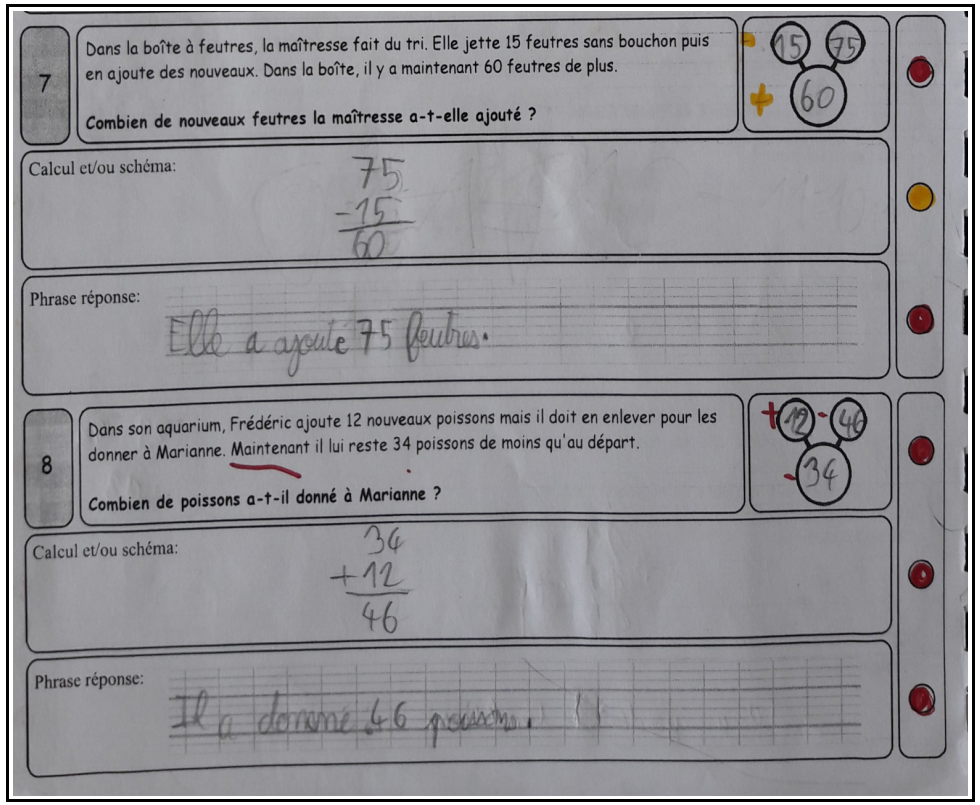
La pratique guidée sera alors continuée avec une portion élèves jusqu'à ce qu'ils puissent pratiquer en autonomie par la suite. Si la finalité est d'avoir des élèves autonomes et performants en résolution de problèmes à terme, il faut donc s'atteler dès que possible à leur donner les outils pour cela. Quand certains sont dans une phase de « sur-apprentissage » d'autres sont encore guidés.

Quel est ce minimum ? Nous pensons que le minimum que chaque élève devrait atteindre correspond aux attendus de fin de cycle. Les attendus ne sont donc pas la finalité vers laquelle nous tendons, au risque de ne jamais les atteindre, mais le minimum que nous devons donner à nos élèves afin de les amener au plus haut. Cela induit une exigence plus élevée au quotidien (viser plus haut, toujours) tout en tentant de maximiser

le temps d'apprentissage et d'exorcisation pour les élèves qui en ont le plus besoin. À la question, est-ce hors programme alors ? Nous répondons que rien n'est « hors » mais plutôt « au-delà » si ce qui devait être enseigné a été enseigné. S'il est possible avec sa classe d'aller au-delà des attendus car ceux-ci sont atteints, faisons-le car nous renforcerons encore plus les attendus initiaux.

Couverture du fichier de niveau 3 :

Approche des nombres relatifs par l'utilisation des compositions de transformation.



7 Dans la boîte à feutres, la maîtresse fait du tri. Elle jette 15 feutres sans bouchon puis en ajoute des nouveaux. Dans la boîte, il y a maintenant 60 feutres de plus.

Combien de nouveaux feutres la maîtresse a-t-elle ajouté ?

15 75 + 60

Calcul et/ou schéma: 75 − 15 = 60

Phrase réponse: Elle a ajouté 75 feutres.

8 Dans son aquarium, Frédéric ajoute 12 nouveaux poissons mais il doit en enlever pour les donner à Marianne. Maintenant il lui reste 34 poissons de moins qu'au départ.

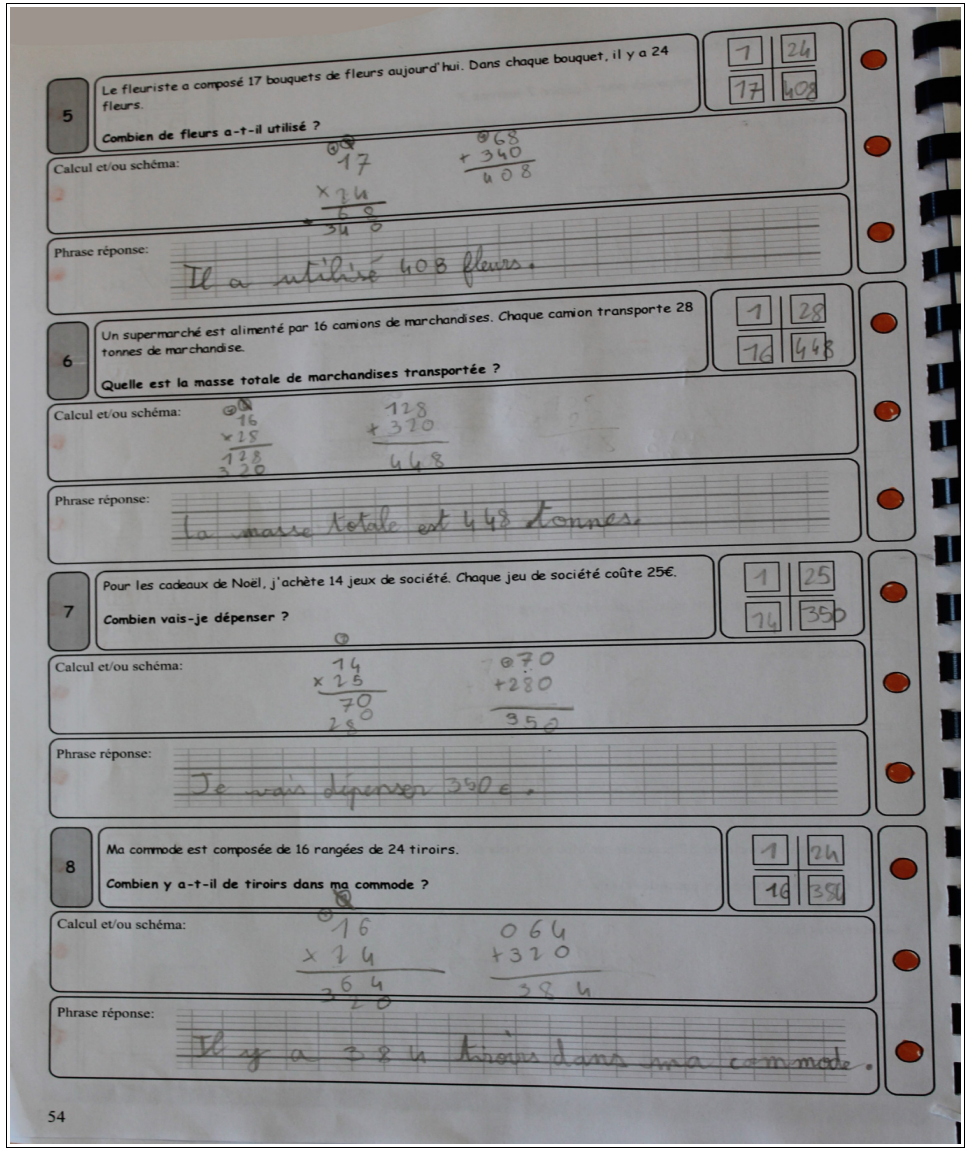
Combien de poissons a-t-il donné à Marianne ?

+12 -46 -34

Calcul et/ou schéma: 34 + 12 = 46

Phrase réponse: Il a donné 46 poissons.

Proportionnalité simple, multiplication : Recherche du nombre d'éléments.



5 Le fleuriste a composé 17 bouquets de fleurs aujourd'hui. Dans chaque bouquet, il y a 24 fleurs.

Combien de fleurs a-t-il utilisé ?

1	24
17	408

Calcul et/ou schéma: 17 × 24 = 68 ; 340 ; 408 ; 68 + 340 = 408

Phrase réponse: Il a utilisé 408 fleurs.

6 Un supermarché est alimenté par 16 camions de marchandises. Chaque camion transporte 28 tonnes de marchandise.

Quelle est la masse totale de marchandises transportée ?

1	28
16	448

Calcul et/ou schéma: 16 × 28 = 128 ; 320 ; 128 + 320 = 448

Phrase réponse: La masse totale est 448 tonnes.

7 Pour les cadeaux de Noël, j'achète 14 jeux de société. Chaque jeu de société coûte 25€.

Combien vais-je dépenser ?

1	25
14	350

Calcul et/ou schéma: 14 × 25 = 70 ; 280 ; 70 + 280 = 350

Phrase réponse: Je vais dépenser 350 €.

8 Ma commode est composée de 16 rangées de 24 tiroirs.

Combien y a-t-il de tiroirs dans ma commode ?

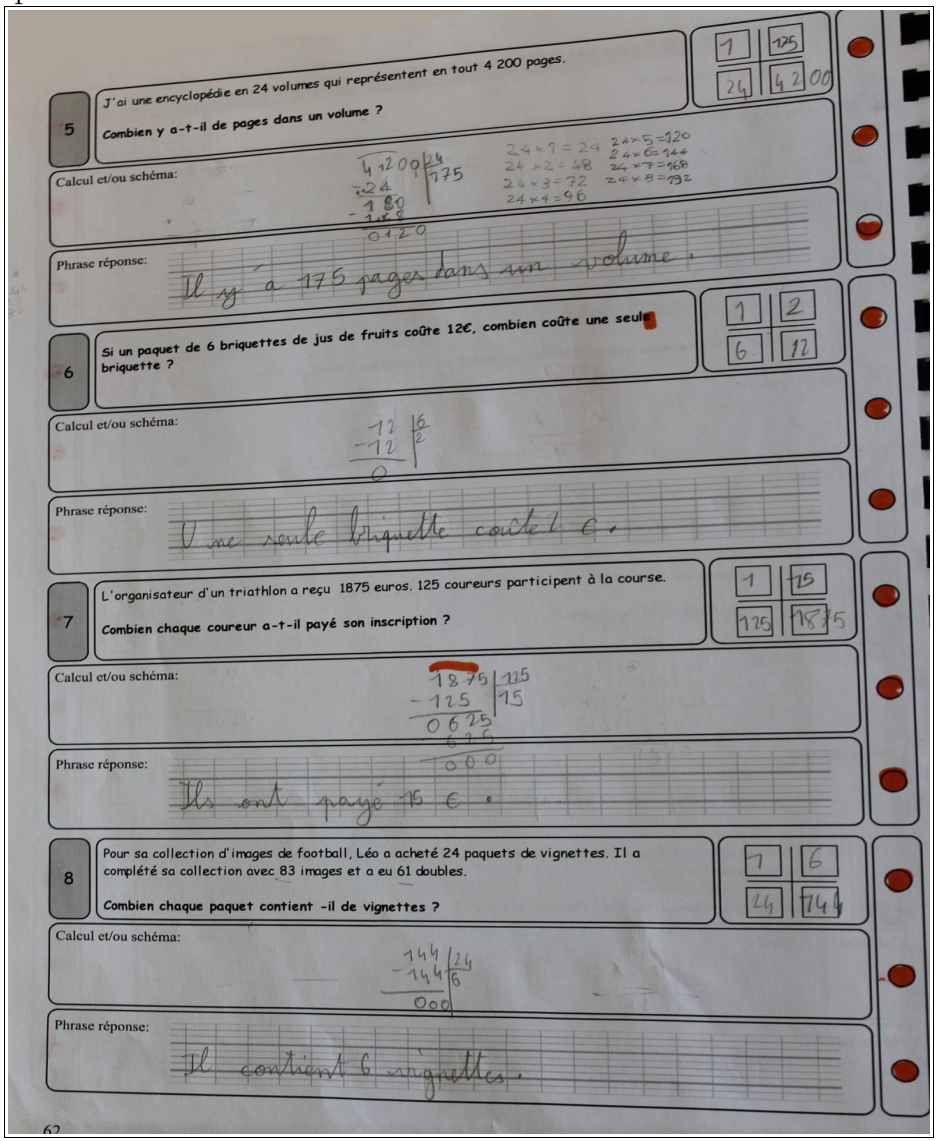
1	24
16	384

Calcul et/ou schéma: 16 × 24 = 64 ; 320 ; 64 + 320 = 384

Phrase réponse: Il y a 384 tiroirs dans ma commode.

54

Proportionnalité simple, division/partition : Recherche du nombre de parts.



5 J'ai une encyclopédie en 24 volumes qui représentent en tout 4 200 pages.

Combien y a-t-il de pages dans un volume ?

1	175
24	4200

Calcul et/ou schéma: 4200 | 24 = 175 ; 24 × 1 = 24 ; 24 × 2 = 48 ; 24 × 3 = 72 ; 24 × 4 = 96 ; 24 × 5 = 120 ; 24 × 6 = 144 ; 24 × 7 = 168 ; 24 × 8 = 192

Phrase réponse: Il y a 175 pages dans un volume.

6 Si un paquet de 6 briquettes de jus de fruits coûte 12€, combien coûte une seule briquette ?

1	2
6	12

Calcul et/ou schéma: 12 | 6 = 2

Phrase réponse: Une seule briquette coûte 2 €.

7 L'organisateur d'un triathlon a reçu 1875 euros. 125 coureurs participent à la course.

Combien chaque coureur a-t-il payé son inscription ?

1	15
125	1875

Calcul et/ou schéma: 1875 | 125 = 15

Phrase réponse: Ils ont payé 15 €.

8 Pour sa collection d'images de football, Léo a acheté 24 paquets de vignettes. Il a complété sa collection avec 83 images et a eu 61 doubles.

Combien chaque paquet contient -il de vignettes ?

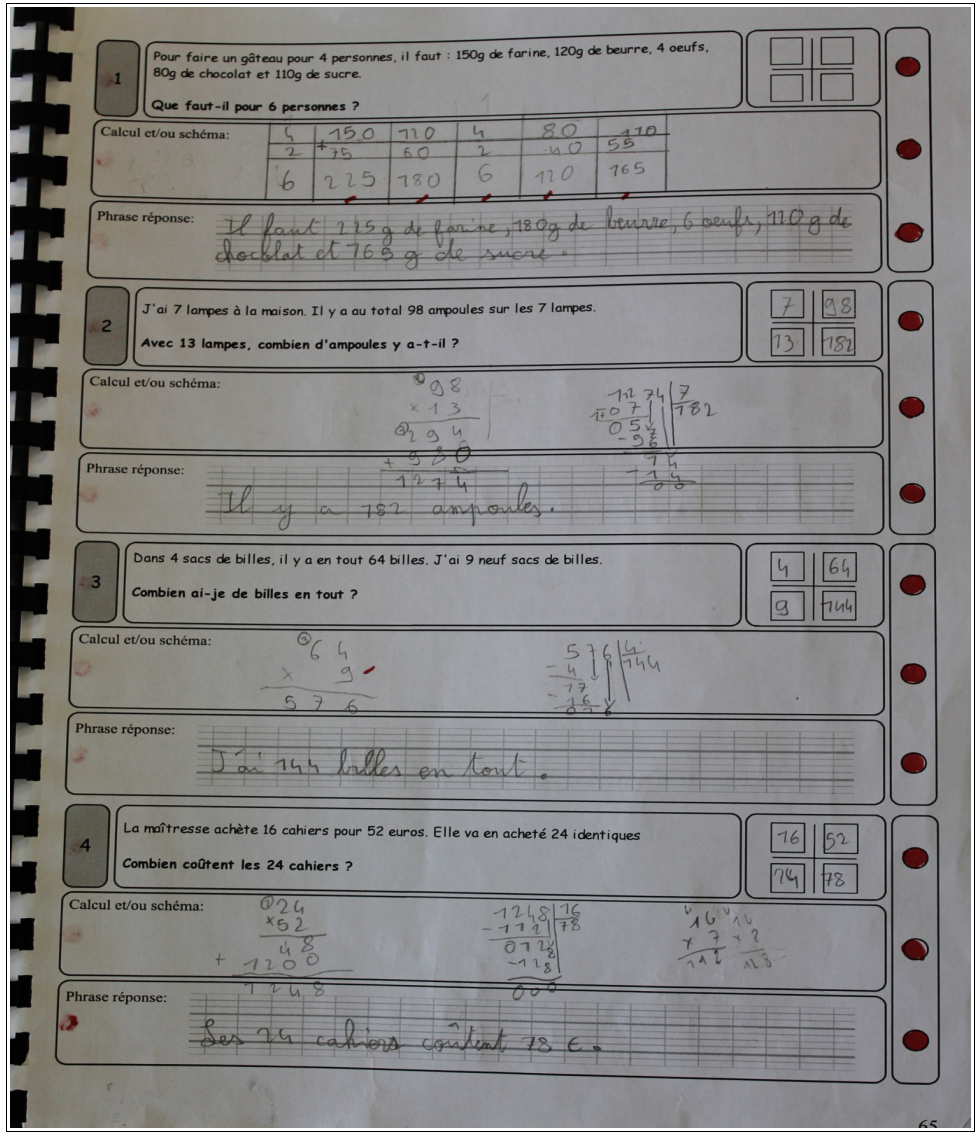
1	6
24	144

Calcul et/ou schéma: 144 | 24 = 6

Phrase réponse: Il contient 6 vignettes.

62

Proportionnalité simple : Règle de 3.



1 Pour faire un gâteau pour 4 personnes, il faut : 150g de farine, 120g de beurre, 4 oeufs, 80g de chocolat et 110g de sucre.

Que faut-il pour 6 personnes ?

Calcul et/ou schéma:

4	150	120	4	80	110
2	+75	60	2	40	55
6	225	180	6	120	165

Phrase réponse: Il faut 225 g de farine, 180g de beurre, 6 oeufs, 120 g de chocolat et 165 g de sucre.

2 J'ai 7 lampes à la maison. Il y a au total 98 ampoules sur les 7 lampes.

Avec 13 lampes, combien d'ampoules y a-t-il ?

7	98
13	182

Calcul et/ou schéma: 98 × 13 = 294 + 980 = 1274 ; 1274 : 7 = 182

Phrase réponse: Il y a 182 ampoules.

3 Dans 4 sacs de billes, il y a en tout 64 billes. J'ai 9 neuf sacs de billes.

Combien ai-je de billes en tout ?

4	64
9	144

Calcul et/ou schéma: 64 × 9 = 576 ; 576 : 4 = 144

Phrase réponse: J'ai 144 billes en tout.

4 La maîtresse achète 16 cahiers pour 52 euros. Elle va en acheté 24 identiques

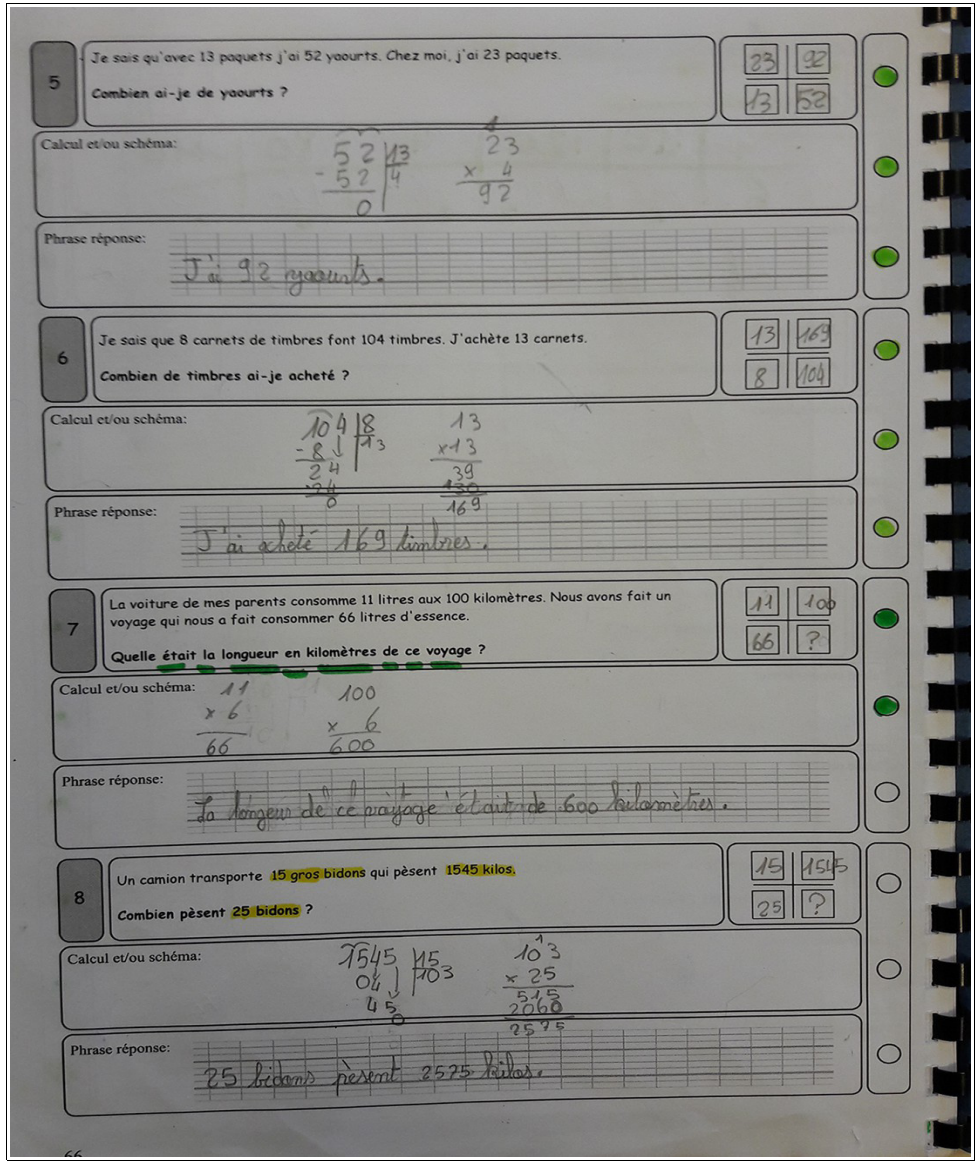
Combien coûtent les 24 cahiers ?

16	52
24	78

Calcul et/ou schéma: 24 × 52 = 48 + 1200 = 1248 ; 1248 : 16 = 78 ; 16 × 7 = 112 ; 16 × 2 = 32

Phrase réponse: Les 24 cahiers coûtent 78 €.

Proportionnalité simple : Règle de 3.



5 Je sais qu'avec 13 paquets j'ai 52 yaourts. Chez moi, j'ai 23 paquets.

Combien ai-je de yaourts ?

23	92
13	52

Calcul et/ou schéma: 52 : 13 = 4 ; 23 × 4 = 92

Phrase réponse: J'ai 92 yaourts.

6 Je sais que 8 carnets de timbres font 104 timbres. J'achète 13 carnets.

Combien de timbres ai-je acheté ?

13	169
8	104

Calcul et/ou schéma: 104 : 8 = 13 ; 13 × 13 = 39 + 130 = 169

Phrase réponse: J'ai acheté 169 timbres.

7 La voiture de mes parents consomme 11 litres aux 100 kilomètres. Nous avons fait un voyage qui nous a fait consommer 66 litres d'essence.

Quelle était la longueur en kilomètres de ce voyage ?

11	100
66	?

Calcul et/ou schéma: 11 × 6 = 66 ; 100 × 6 = 600

Phrase réponse: La longueur de ce voyage était de 600 kilomètres.

8 Un camion transporte 15 gros bidons qui pèsent 1545 kilos.

Combien pèsent 25 bidons ?

15	1545
25	?

Calcul et/ou schéma: 1545 : 15 = 103 ; 103 × 25 = 515 + 2060 = 2575

Phrase réponse: 25 bidons pèsent 2575 kilos.

Le premier problème de la page précédente est une recette à réaliser. La recette n'est pas le point de départ de l'étude des cas de proportionnalité mais est une situation du quotidien qui peut faire intervenir des situations de proportionnalité. Cette situation est abordée depuis de nombreuses années par les élèves, mais il est ici question de modéliser cette situation pour mettre en équation. Il semblait donc tout à fait légitime de proposer régulièrement des problèmes ayant cette structure pour en étudier les redondances (les quantités sont multipliées ou divisées selon le nombre de personnes) et les limites car comment faire quand nous obtenons des moitiés d'œufs ? À première vue difficile, ce problème est également réalisable concrètement par les élèves, ce qui est un point d'appui essentiel. Plusieurs élèves témoignent du fait qu'ils ont questionné leurs parents sur les recettes de cuisine et sur le « comment adapter une recette ? » afin de voir comment ils faisaient et ce que cela voulait dire mathématiquement. Cette liaison « manipulation — modèle schématique —abstraction » prend alors tout son sens car en partant d'un écrit, la recette, l'élève est en mesure de proposer un modèle mathématique qui avait déjà été étudié.

Nous avons donc vu ici des problèmes de proportionnalité simple ou l'élève va coder la recherche de la règle de 3 via le modèle schématique. L'élève n'a pas noté dans son fichier la démarche pour trouver la règle dans un problème donné par recherche intermédiaire de l'unité afin de signifier les calculs : n fois plus que et n fois moins que. Il n'y a donc pas un écrit du type :

« Si 4 pommes coûtent 5 euros, alors une pomme coûte 4 fois moins, soit 5 euros divisé par 4, c'est-à-dire 0,8 euros, et 6 pommes coûtent 6 fois plus, soit 6 fois 0,8 euros, c'est-à-dire 4,8 euros. »

Ce raisonnement est travaillé en classe, régulièrement. La séance de résolution de problème ne peut devenir le moment de tous les apprentissages. C'est un moment de formalisation, d'approfondissement, de travail explicite sur les stratégies. Par contre, il est attendu que l'élève puisse justifier par oral ou écrit ce raisonnement qu'il a codé dans le modèle schématique.

Il a simplement utilisé le modèle pour coder cette démarche. L'écriture de cette règle pour résoudre fait l'objet d'un travail plus spécifique en classe dont on ne voit que la version épurée dans ce fichier.

Nous voyons également que les diviseurs peuvent être à 1, 2 et même 3 chiffres dans les problèmes de division-partition. L'utilisation du modèle schématique permet d'aider les élèves à visualiser les opérations consécutives. Comme avec les autres schémas, un travail de modélisation a été effectué afin que les élèves s'approprient pleinement le modèle en tenant compte de la notion de « rapport » entre les éléments constitutifs du problème. Le modèle est une aide « abrégée » qui permet de « dérouler » le raisonnement si besoin. Attention, le raisonnement et les stratégies ont été enseignées au préalable. Ici, il s'agit d'un codage rapide pour signifier les interactions entre les grandeurs.

Durant la première année de mise en place de ce projet de travail, l'algorithme de la division posée a été abordée avec les élèves les plus avancés dès la Toussaint durant l'année de CE2. Cet algorithme a pu être ensuite travaillé durant l'année par toute la classe. Les collègues ne pouvait l'aborder avant le CM1 les années précédentes. La division euclidienne de 2 entiers ne pose pas de difficultés car, du fait de la différenciation incluse dans le projet (au sens de « temps supplémentaire d'apprentissage »), du temps « qualitatif » peut être donné à chacun pour s'améliorer. Un système de ceintures de calcul est présent dans les classes de CE2.

Concernant l'algorithme de la division avec un diviseur qui est un nombre à 2 ou 3 chiffres, nous observons que son étude formelle, dans un temps très proche, avec un diviseur qui n'a qu'un chiffre peut permettre de rassurer de nombreux élèves sur le présupposé degré de complexité de la tâche, surtout s'ils sont familiers de cette opération depuis le CP. Nous avons ainsi remarqué que des élèves n'ayant jamais travaillé au CP et au CE1 sur la division (même en ligne, ou mentalement) ont une crainte de cette opération et sont en blocage devant des problèmes de cet ordre. Ils ont une image a priori négative qui s'estompe rapidement s'ils y sont confrontés souvent et très progressivement. Ainsi, si cet algorithme est présenté de manière très explicite avec un étayage fort au départ, avec une phase d'exercisation importante, la difficulté tendra à s'estomper.

Nous observons tout de même que si un travail régulier à été mené au CP et au CE1 sur le sens de la division, que si les élèves ont rencontré des situations de divisions, qu'ils ont également utilisé les signes opératoires et calculé en ligne ou mentalement, l'algorithme opératoire devient beaucoup plus facilement abordable dès le CE1. C'est pourquoi les fichiers destinés aux élèves proposent ces situations dès le début du CP pour travailler toutes les opérations.

La question est alors de savoir de quel algorithme de la division nous parlons, car il existe plusieurs méthodes et elles n'ont pas le même fonctionnement et la même efficacité. À ce titre, en abordant les diviseurs à plusieurs chiffres, un élève témoigne du fait suivant : *« En fait je croyais que c'était plus dur, mais en fait c'est pareil qu'avec 1 chiffre. Par contre c'est plus long parce qu'on ne connaît pas la table des grands nombres. »*

Cet élève utilise l'algorithme de la division qui fait chercher tout le répertoire multiplicatif (« la table des grands nombres ») pour les soustraire progressivement par la suite. Il commence donc par établir la table du diviseur d'un côté de sa feuille avant de commencer la division une fois le répertoire terminé. Il va ensuite poser progressivement les soustractions dans son algorithme. Ci-après un exemple de cette méthode :

901 836	47	
- 47	19 188	47×1= 47
431		47×2= 94
- 423		47×3= 141
8 8		47×4= 188
- 4 7		47×5= 235
4 13		47×6= 282
- 3 76		47×7= 329
376		47×8= 376
- 376		47×9= 423
0		

D'un point de vue personnel : C'est très long, très coûteux mentalement et cela augmente les possibilités d'erreurs avec tous les calculs préalables. Si cette présentation est abordée transitoirement, comme un intermédiaire, pour expliquer comment fonctionne l'algorithme de la division par retrait d'une quantité multipliée plusieurs fois, oui. Cela se conçoit très bien et permet de travailler encore une fois le sens de cette opération, ce que l'algorithme nous dit sur elle.

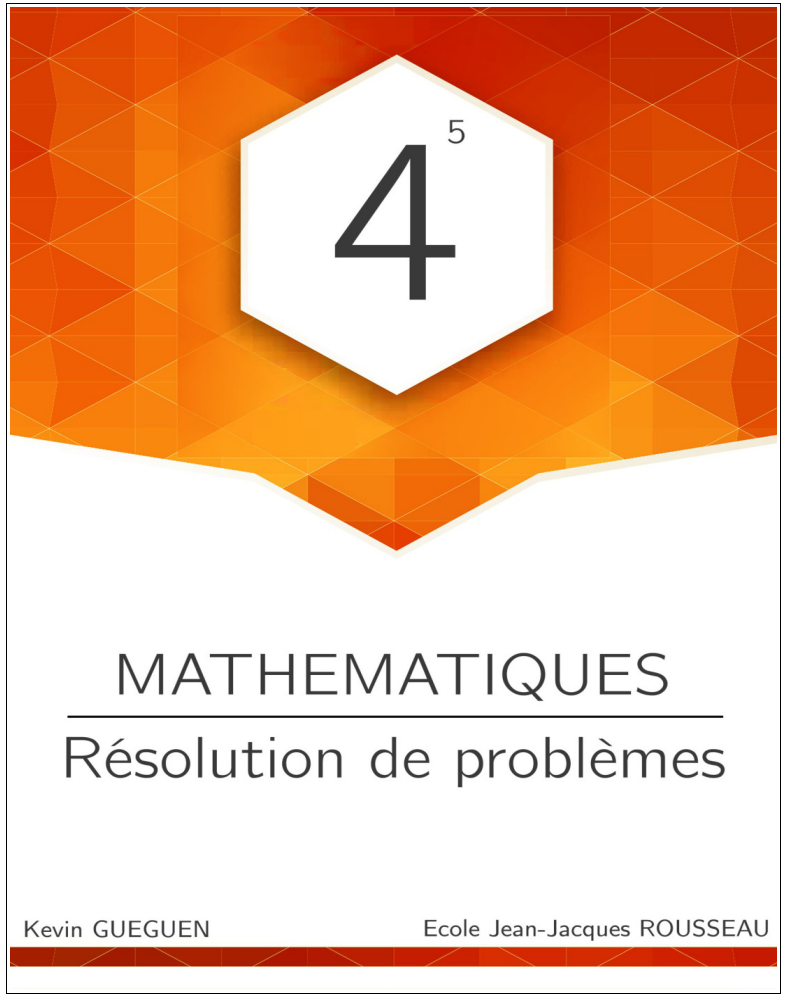
Néanmoins, il serait vraiment dommageable pour l'élève de s'arrêter là et de se priver de l'utilisation de l'algorithme final qui aura le mérite de faire travailler solidement la numération, les ordres de grandeurs, la multiplication et les compléments des soustractions, et cela mentalement sans rien surcharger, car ces différentes compétences auront été automatisées bien avant. Plus besoin de connaître la table des grands nombres, les tables simples suffisent (cela n'enlève en rien la possible difficulté de leur apprentissage par les élèves). Cet algorithme à également le mérite de mobiliser les compléments à la dizaine supérieure et de reprendre les ordres de grandeurs via la numération (ici, 47 c'est presque 5 dizaines).

$9_{1}0\ 1\ 8\ 3\ 6$	4 7
$4\ 3\ {}_{7}1$	19 188
8 8	
$4\ 1\ {}_{6}3$	
$3\ 7\ {}_{5}6$	
0	

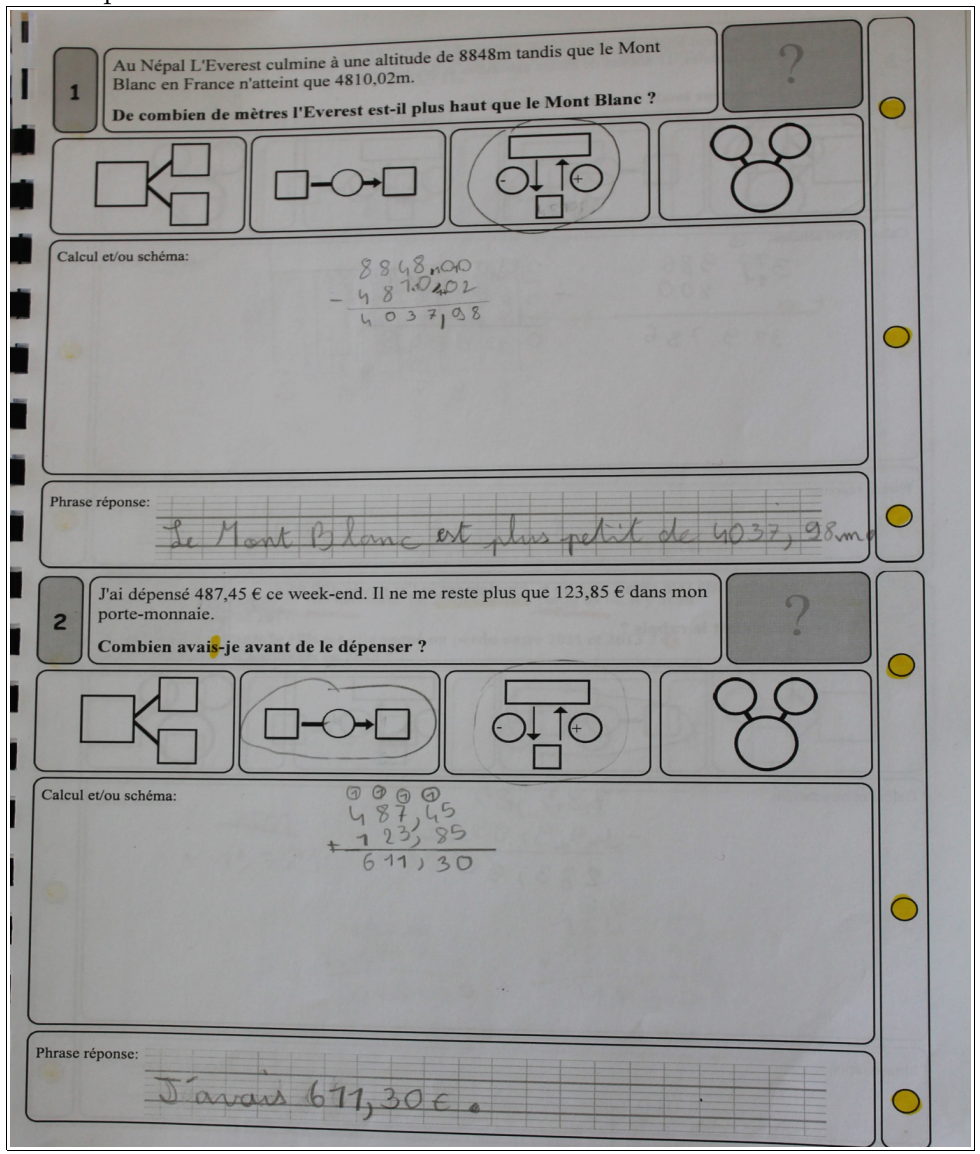
Exemple : *en 413, combien de fois 47 ?* 413, c'est 41 dizaine et 47 c'est presque 5 dizaines. Donc en 41 combien de fois 5 ? Essayons alors 8 fois 47.

Nous soustrayons de proche en proche, colonne après colonne pour ne pas surcharger le calcul. Nous utilisons pour cela des retenues comme dans la soustraction posée.

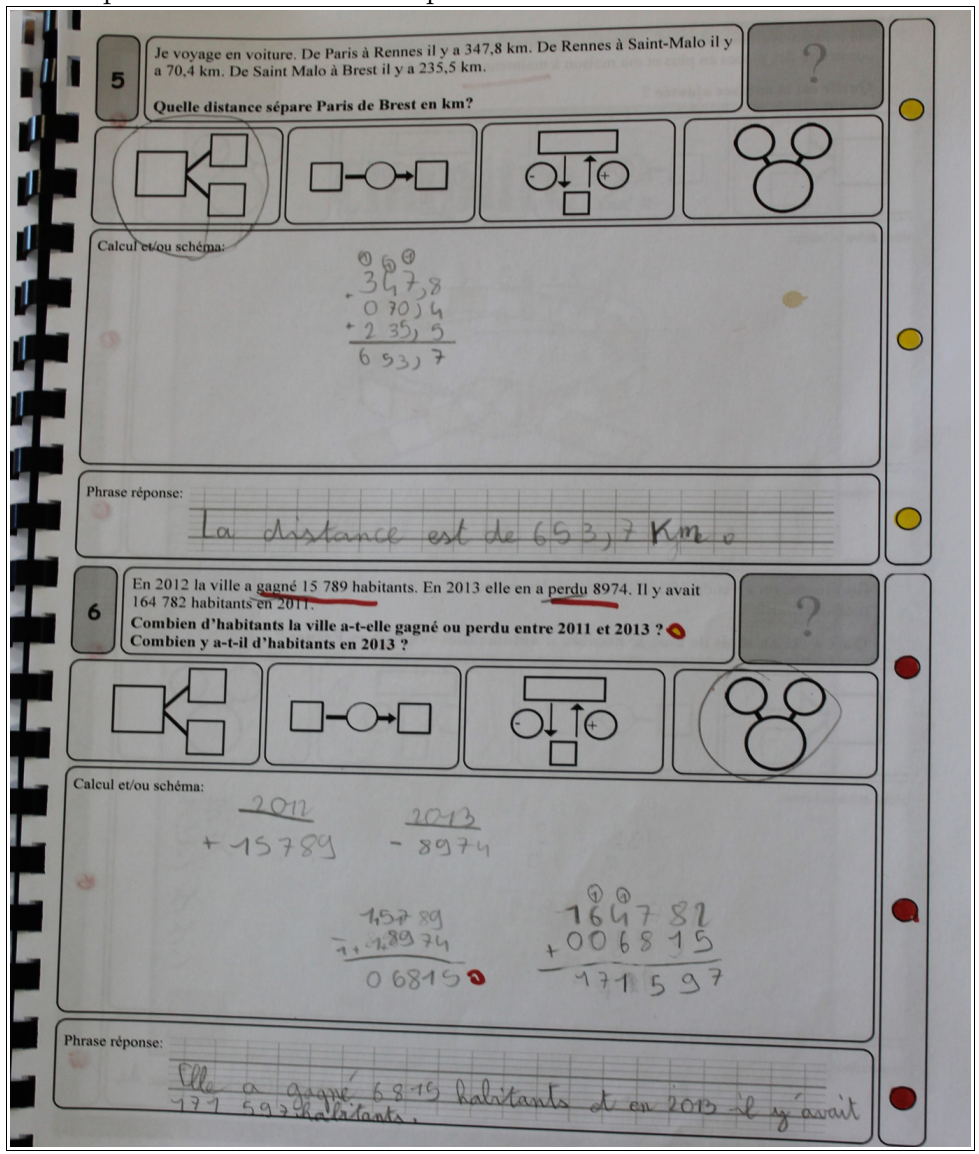
Couverture du fichier de niveau 4 :



Comparaison d'états et Transformation de mesures.



Composition d'états et Composition de Transformations :



5 Je voyage en voiture. De Paris à Rennes il y a 347,8 km. De Rennes à Saint-Malo il y a 70,4 km. De Saint Malo à Brest il y a 235,5 km.

Quelle distance sépare Paris de Brest en km?

Calcul et/ou schéma:

347,8
+ 70,4
+ 235,5
653,7

Phrase réponse: La distance est de 653,7 Km.

6 En 2012 la ville a gagné 15 789 habitants. En 2013 elle en a perdu 8974. Il y avait 164 782 habitants en 2011.

Combien d'habitants la ville a-t-elle gagné ou perdu entre 2011 et 2013 ?
Combien y a-t-il d'habitants en 2013 ?

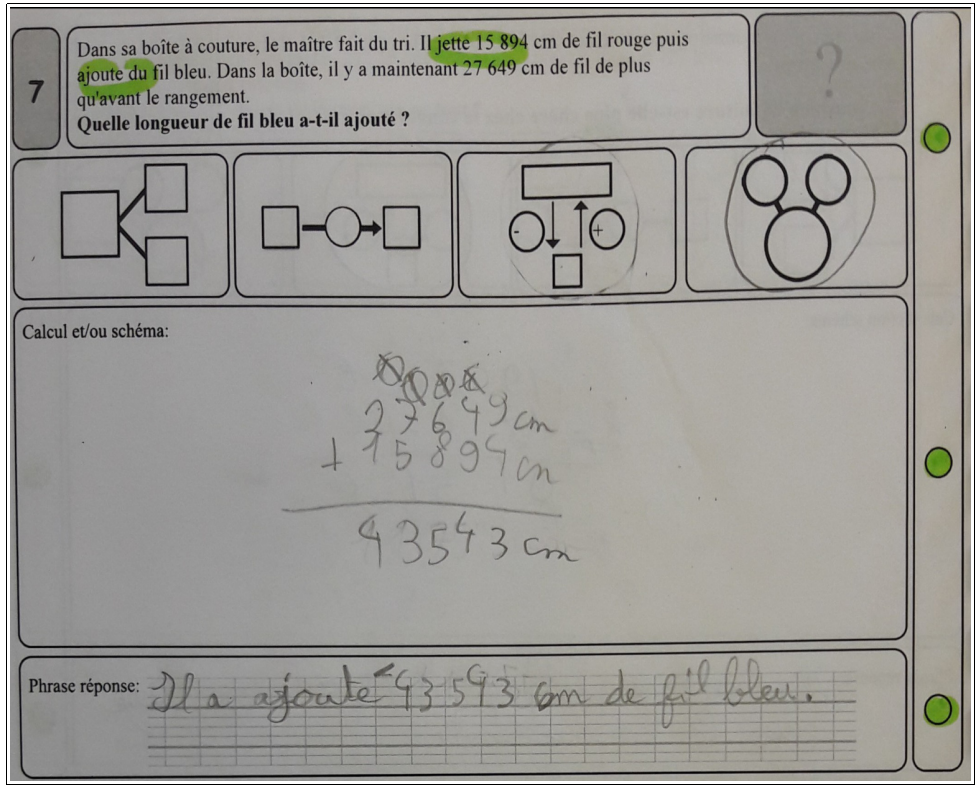
Calcul et/ou schéma:

2012 + 15789
2013 - 8974

15789
- 8974
06815

164782
+ 006815
171597

Phrase réponse: Elle a gagné 6815 habitants et en 2013 il y avait 171 597 habitants.



7 Dans sa boîte à couture, le maître fait du tri. Il jette 15 894 cm de fil rouge puis ajoute du fil bleu. Dans la boîte, il y a maintenant 27 649 cm de fil de plus qu'avant le rangement.

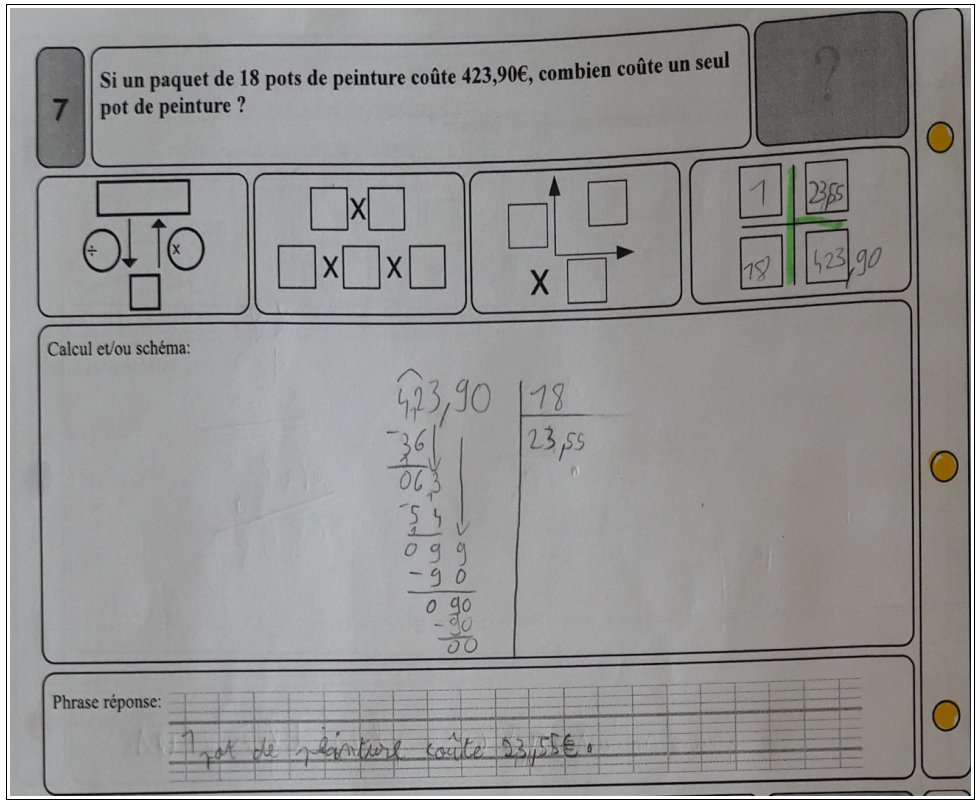
Quelle longueur de fil bleu a-t-il ajouté ?

Calcul et/ou schéma:

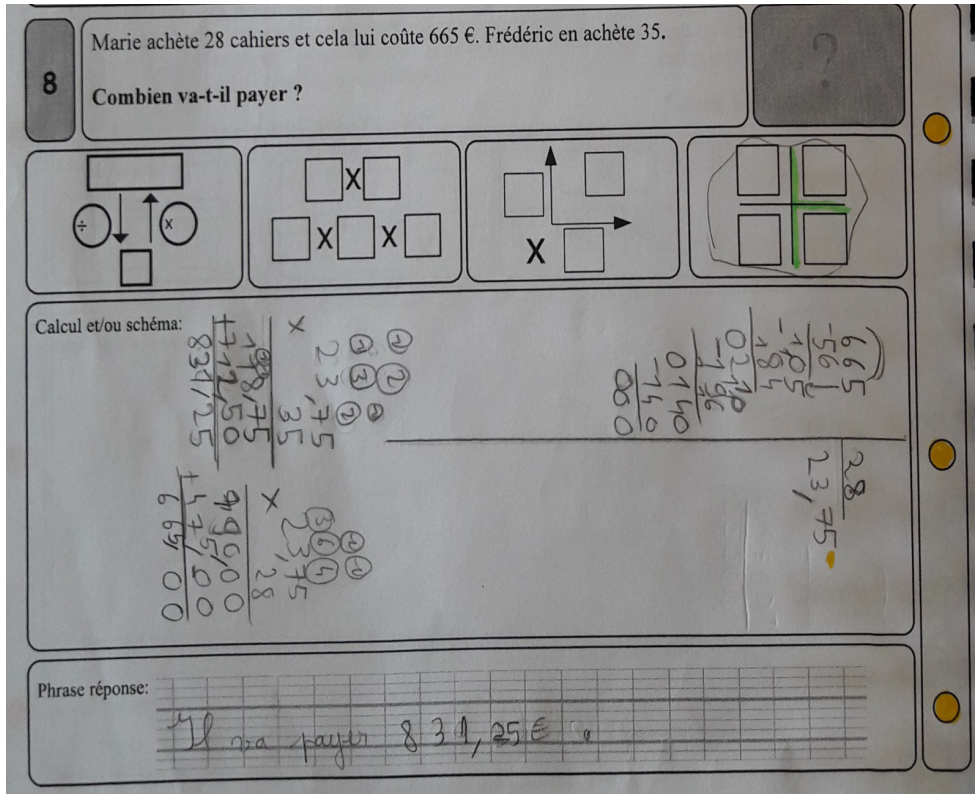
27649 cm
+ 15894 cm
43543 cm

Phrase réponse: Il a ajouté 43543 cm de fil bleu.

Comme dans le niveau précédent, les compositions de transformations permettent de travailler sur les relatifs. Cette rencontre fréquente permet aux élèves et aux enseignants d'aborder et d'approfondir des notions qui seront ré-abordées au collège.

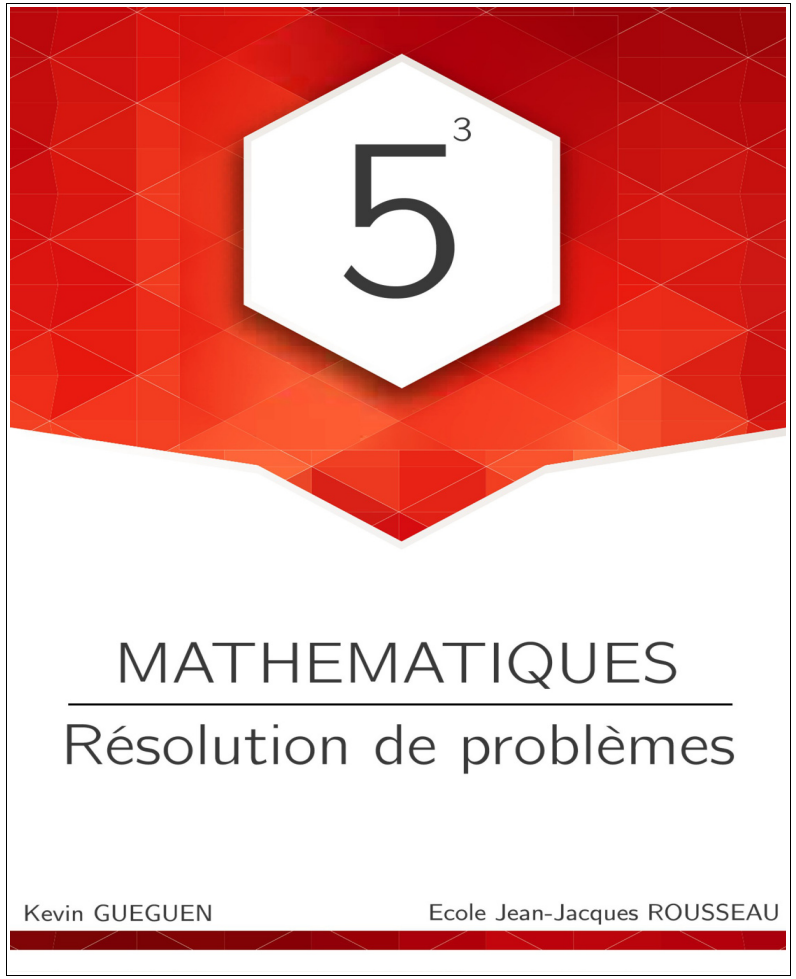


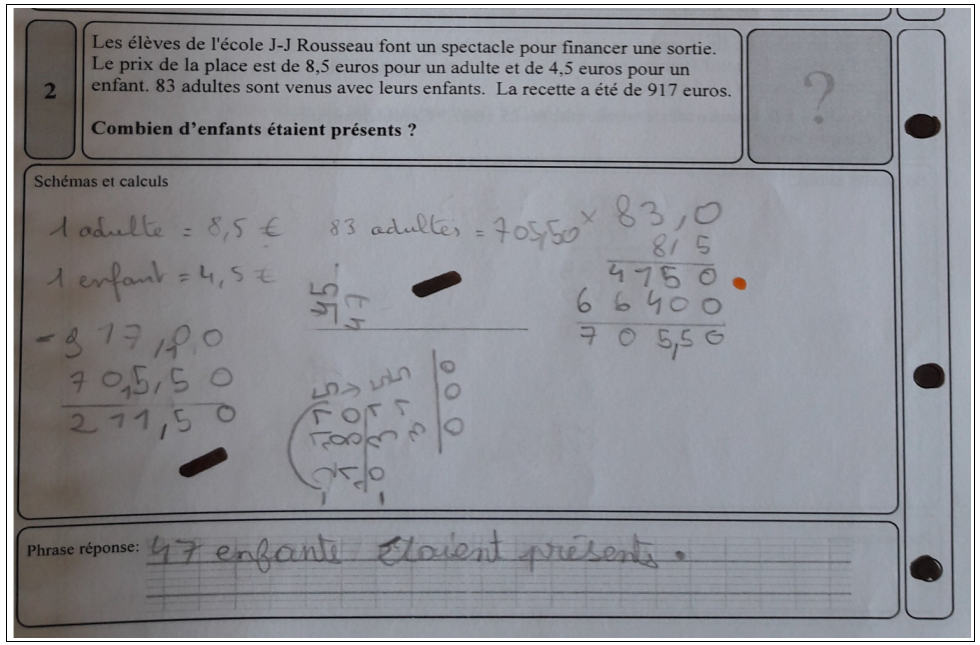
La technique présentée n'est pas encore la technique experte de la division. Celle-ci sera abordée par la suite.



Problème pouvant se résoudre par la recherche de la Règle de 3. L'élève passe par l'unité avec son premier calcul. l'élève chemine vers la technique experte qui se construira très progressivement en abordant les écritures fractionnaires. La fraction permettra de faire apparaître les deux facteurs (numérateur et dénominateur) qui lient les quantités données (n fois plus et n fois moins) lors du passage par l'unité quand la règle de 3 est recherchée.

Niveau 5 : dernier fichier





2 Les élèves de l'école J-J Rousseau font un spectacle pour financer une sortie. Le prix de la place est de 8,5 euros pour un adulte et de 4,5 euros pour un enfant. 83 adultes sont venus avec leurs enfants. La recette a été de 917 euros.

Combien d'enfants étaient présents ?

Schémas et calculs

1 adulte = 8,5 €
1 enfant = 4,5 €
83 adultes = 705,50

Phrase réponse: 47 enfants étaient présents.

6

Durant la fête de l'école, la maîtresse vend 304 canettes de jus de fruit durant la journée. Elle a vendu 58 canettes de plus l'après-midi que le matin.

Combien de canettes a-t-elle vendues l'après-midi ?

?

Schémas et calculs

304 canettes

58 canettes en plus l'après-midi

304 | 2
10 | 152
04
0

152 + 58 = 210 l'après-midi

304
− 158
246

246 | 2
04 | 123
06
0

123
+ 58
181

Phrase réponse: Elle a vendu 181 canettes l'après-midi

6

Durant la fête de l'école, la maîtresse vend 304 canettes de jus de fruit durant la journée. Elle a vendu 58 canettes de plus l'après-midi que le matin.

Combien de canettes a-t-elle vendues l'après-midi ?

?

Schémas et calculs

M → ?246

J → 304

AM → 58

304
− 58
246

M + AM = J

M + 58+M = 304

246 | 2
−2 | 123
04
−4
06

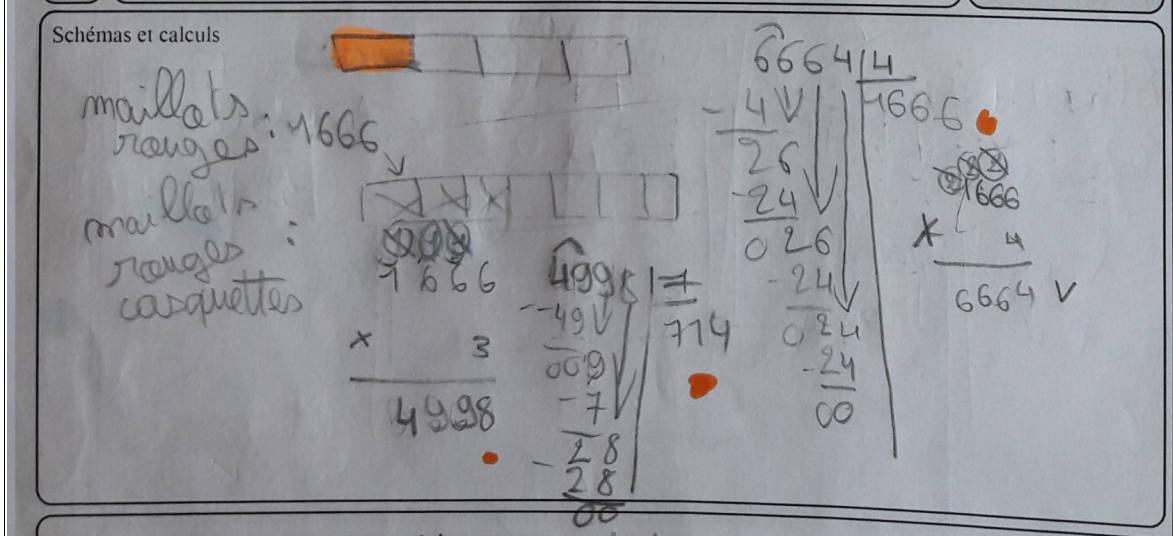
Phrase réponse: Elle a vendu 123 l'après-midi.
canettes

4

Dans un stade il y a 6664 spectateurs. $\frac{1}{4}$ de ces spectateurs porte des maillots rouges. Les $\frac{3}{7}$ de ces spectateurs en maillot rouge portent des casquettes.

Combien y a-t-il de spectateurs avec casquettes et maillots rouges ?

Schémas et calculs



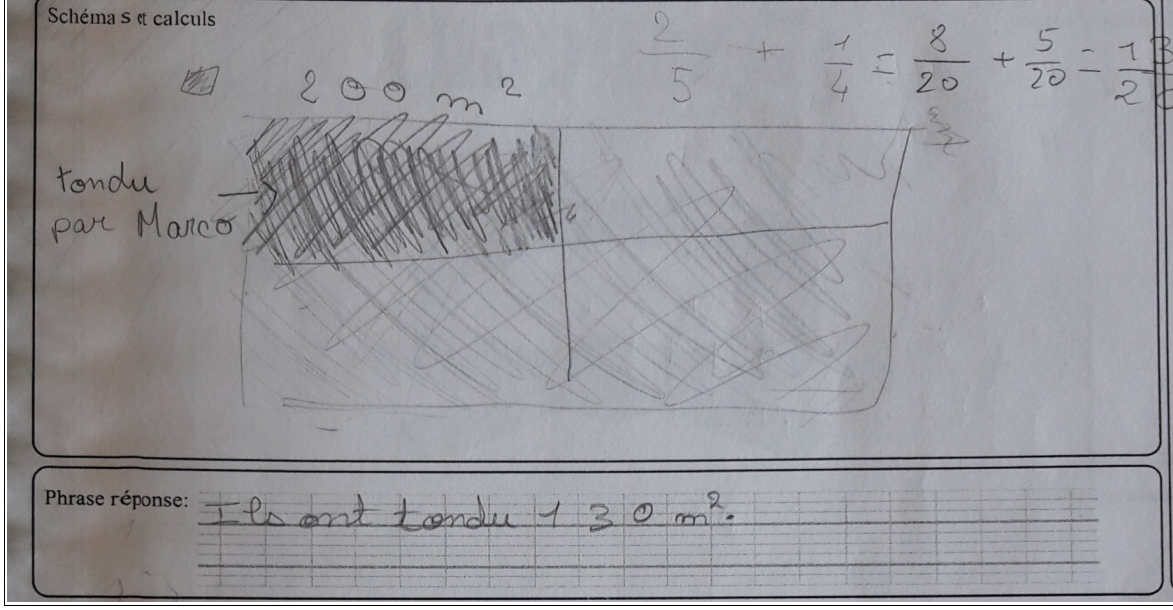
Phrase réponse: Il y a 714 spectateurs avec casquettes et maillot rouges.

5

Un jardin a une aire de 200 m². Marco tond les $\frac{2}{5}$ du jardin et son frère Polo en tond $\frac{1}{4}$.

Quelle est l'aire tondue par Marco et Polo ?

Schéma s et calculs



Phrase réponse: Ils ont tondu 130 m².

5

Un jardin a une aire de 200 m². Marco tond les $\frac{2}{5}$ du jardin et son frère Polo en tond $\frac{1}{4}$.

Quelle est l'aire tondue par Marco et Polo ?

Schémas et calculs

80
+50
130

$\frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{8}{20} + \frac{5}{20}$
$= \frac{130}{200}$

Phrase réponse:

L'aire tondue par Marco et Polo est de 130 m².

7

Je sais qu'avec 35 € je peux acheter 875 morceaux de carrelage or j'utilise 45 € pour en acheter. J'utilise ces morceaux pour refaire ma salle de bain et j'en dispose 45 sur la longueur.

Combien de morceaux vais-je pouvoir acheter ?
Combien de morceaux vais-je mettre sur la largeur ?

Schémas et calculs

1125 | 45
-90 | 25
022
-225
000

35 | 875
45 | 1125

875
× 45
4375
35000
39375

39375 | 35
-35 | 1125
048
-35
135
-70
-175
-175
000

45 | 1125
× 45

35
× 3
125

Phrase réponse:

Je vais pouvoir acheter 1125 morceaux.
Je vais mettre 25 morceaux sur la longueur.

Attention :

Le travail de modélisation doit absolument continuer à se faire en parallèle. Modélisation avec les modèles structuraux et modélisation avec des éléments quantitatifs comme les barres. Ce n'est pas parce que c'est productions ne sont pas toujours apparentes que cet aspect n'est pas existant. Ainsi, même si le schéma peut être donné en aide-mémoire dans les problèmes, il faut toujours travailler avec régularité la modélisation (sur la structure et sur le calcul) au-delà des séances de résolution sur le fichier. Un élève peut également travailler sur brouillon avec des modèles en barres pour modéliser en complément des schémas donnés sans que cela ne puisse se voir sur fichier. Le fichier est une formalisation de ce travail mené en parallèle et tout le travail mené à côté n'est pas toujours visible.

Cette activité de modélisation peut prendre place en début de séance, sur une séance « méthodologie », en atelier décroché, quotidiennement, etc. Ce n'est pas parce que le schéma peut être donné qu'il ne faut plus le construire. C'est aussi dans cette optique que les derniers fichiers ont été créés afin de faire porter une grande part de la réussite sur la pertinence du modèle construit par les élèves. Il y a un mélange construction / imprégnation qui se produit et qui doit se dérouler sur le long terme. Il faut donc maintenir les exigences de bout en bout.

Exemples :

— Modélisation d'une histoire racontée aux CPs (Transformation d'états)

— Modélisation mathématique d'une partie de jeu de l'oie. (Composition de transformations)

— Modélisation d'une « composition d'états » à partir d'un ticket de caisse.

— Modélisation d'une recette (Proportionnalité)

— tri de problèmes et création de modèles.

— Association entre des problèmes et des modèles.

— modélisation de situation additives / soustractives (avec des barres)

— modélisation de situation multiplicatives (avec des barres)

8 - 7 Evaluer la progression des élèves

Durant toute la durée du projet les élèves vont avoir pour support un fichier à construction spiralaire dont le but est l'étude de tous les types de problèmes additifs et multiplicatifs. Ce fichier ne sera pas le support exclusif, cet ouvrage présente nombre d'activités et d'ateliers possibles du cycle 2 au cycle 3, mais il permettra d'évaluer au quotidien la progression des élèves dans différents aspects (orthographe, grammaire, calcul, catégorisation, compréhension, etc.) Au fur et à mesure, les élèves vont être amenés à utiliser un modèle, choisir et modifier un modèle et enfin construire un modèle qui sera la base du processus d'abstraction. Les fichiers vont donc faire travailler ces 3 niveaux de complexification.

En utilisant ces fichiers à difficulté croissante, nous proposons un passage de ceinture en parallèle pour concrétiser la réussite des élèves. Chaque problème est validé selon 3 grands points de vigilance et les problèmes arithmétiques additifs et multiplicatifs sont organisés en chapitres. Chaque chapitre maîtrisé est donc par la suite symbolisé par un passage à la ceinture supérieure. Les ceintures sont présentes dans les classes qui le souhaitent et l'évolution des élèves est donc visible. Les ceintures sont également présentes dans les fichiers, car des enseignants peuvent ne pas vouloir d'un tel affichage.

L'élève voit ou il en est dans son cheminement personnel et quels sont ses buts. Il nous apparaît important pour l'élève qu'il puisse se situer dans une progression globale où les étapes sont clairement détaillées et compréhensibles pour lui. Cela permet également à l'enseignant d'adapter sa progression et de proposer des séances de remédiation au moment opportun. Cela permet également de constituer des groupes de coopération ou des groupes avec les mêmes besoins selon l'avancement des élèves. L'objectif est d'avoir une image claire de la situation des élèves. Il est tout à fait possible pour l'enseignant de ne pas afficher les ceintures et d'utiliser tableau bilan personnel de l'avancement des élèves. Quel que soit le choix de l'enseignant, le point important est d'avoir une trace visible de ce cheminement dans la progression afin que l'élève ait conscience de ce qu'il a accompli.

L'utilisation de ceintures peut laisser l'impression de la mise en place d'un protocole compétitif qu'il ne faut pas nier et qui est, selon nos observations, un moteur puissant pour les élèves. Mais il s'agit ici d'une compétition personnelle dans un groupe, pas contre les autres. Nous sommes ici dans le registre du dépassement personnel, pas du classement entre pairs, ce qui n'aurait aucun sens dans notre projet. La relation de l'enseignant avec cette modalité influe également sur la perception qu'en ont les élèves. Ainsi, la pratique en elle-même et l'utilisation des ceintures n'est pas porteuse de jugements ou de

comparaisons mais le positionnement de l'adulte pourrait l'induire selon la prise en charge du ressenti des élèves.

L'élève mène une compétition personnelle pour atteindre un but qu'il s'est fixé et pour aller au-delà grâce à ses efforts. L'objectif est que chacun puisse cibler ses forces et faiblesse pour mieux y remédier. Nous cherchons donc un ciblage explicite de ce qui doit être travaillé et approfondi. La confiance en soi se construit progressivement par les réussites, par la capacité à surmonter les échecs et par les efforts fournis. Plusieurs années d'observations nous montrent un gain de confiance indéniable qui se traduit par des résultats pérennes. L'élève voit qu'il est capable et est encouragé en ce sens.

Le passage des ceintures est une motivation, un challenge et un défi intellectuel qui produit fierté et confiance dans ses capacités. L'élève voit qu'il peut y arriver. Chaque élève est soutenu dans le dépassement de soi et l'effort fait partie du processus. Chaque ceinture témoigne d'un niveau relatif de maîtrise à un instant donné et est un but temporaire à atteindre. Les ceintures choisies sont issues du Judo et c'est aussi tout l'esprit de cette philosophie qui est transmis. Le choix des ceintures fait sens avec les valeurs qui sont celles du Judo :

« En Judo, les progrès individuels passent par l'entraide et par l'union de notre force et de celle des autres. La présence du partenaire, du groupe est nécessaire et bénéfique à la progression de chacun. »

Chaque élève passant une ceinture est félicité pour son travail et sa persévérance, aussi bien par ses camarades que par les enseignants. Les félicitations récompensent les efforts et les progrès quels qu'ils soient. Nous encourageons et motivons aussi ceux qui feront prochainement leur passage. L'élève voit la concrétisation de ses efforts et a toujours un but à atteindre, l'émulation est favorisée et la confiance se consolide.

Photos prisent dans des classes de niveaux différents.

Le principe du fichier spiralaire permet sur les 5 ans à tous les élèves de travailler tous les types existants et même plusieurs fois pour les élèves les plus lents. Il est essentiel de s'exercer plusieurs fois sur les mêmes structures pour améliorer sa compréhension des situations. Pour un chapitre, plusieurs variantes d'un même type sont proposées afin d'éviter la systématisation sans réflexion, ils savent bien sûr qu'il risque d'y avoir des « pièges » et que cela est partie intégrante du projet. Le but est d'éviter la systématisation d'un même calcul (en proposant toujours des problèmes additifs par exemple. L'élève sait qu'il faudra additionner même s'il ne comprend rien à la situation) mais de favoriser la systématisation de l'utilisation des stratégies de résolution indépendamment de l'opération.

En plus de la construction du schéma et de la maîtrise des techniques opératoires, nous effectuons un travail sur la réponse écrite à un problème. Orthographe, grammaire, conjugaison, compréhension sont autant d'éléments rentrant en ligne de compte dans la validation d'un problème. À chaque erreur repérée l'élève est guidé vers la leçon ou affichage lui permettant une auto-correction.

Exemple :

- Majuscule, ponctuation.
- Pluriel des noms.
- Concordance des temps.
- Repérage du sujet.
- Construction des phrases.
- Accords avec les auxiliaires.

Aucun problème ne saurait être validé si la moindre erreur dans le domaine de l'écrit est repérée. Au contraire, nous profitons de toutes les erreurs pour relancer une leçon, faire un rappel, faire employer les différents supports nécessaires à la résolution de cet(te) oubli / erreur par l'élève. Nous faisons verbaliser systématiquement le raisonnement afin que l'élève automatise les processus réflexifs.

De même, une opération se doit d'être posée correctement en respectant tous les critères qui seront énoncés par les enseignants. Les critères seront communs au cycle pour viser toujours la plus grande cohérence mais sans oublier la progression dans cet apprentissage.

À chaque séance des rappels sont faits systématiquement sur les erreurs vues et qui sont facilement évitables, des conseils sont donnés à la classe ou de manière ciblée selon l'avancement de chacun. Toutes les bonnes astuces, techniques et outils sont transmis à tous. Nous le répétons, il faut enseigner explicitement les stratégies efficaces aux élèves et s'entraîner à les utiliser. Les élèves sont **tous** encouragés et soutenus mais avec une ambition et une exigence élevée.

Le bilan est un moment extrêmement important qui se déroule avec ou sans le Maître Supplémentaire (quand un PDM est présent dans l'école). Durant cette phase les 2 enseignants apportent leurs observations aux élèves et se complètent dans leurs observations du groupe. Le bilan permet de cibler ce qui n'est pas efficace et ce qui l'est, il

permet d'expliciter ce qui manque pour avancer et ce qui doit être travaillé pour franchir un palier. Le bilan permet d'apporter à un élève ou un groupe d'élèves un guidage pour améliorer sa pratique. Ce qui est bénéfique pour un élève peut l'être aussi pour un autre qui n'aurait pas signalé un besoin ou qui ne l'aurait pas perçu. Un adulte peut avoir des difficultés à cibler précisément ses besoins dans un domaine où il n'est pas expert, ce qui se traduit par des demandes sur la surface du problème, pas sur le fond qu'il ne perçoit pas. Il en est de même pour les élèves, les questionnements du novice ont besoin de l'éclairage de l'expert.

La parole de l'élève est donc importante dans cette phase, surtout pour qu'il puisse évoquer ses besoins ou nommer ses difficultés, mais il ne faut pas oublier que l'enseignant est toujours le meilleur analyste des difficultés de ses élèves dans la classe. L'enseignant régule donc la parole entre les élèves, pour les élèves. Un bilan auto-géré entre les élèves, avec une intervention minimale de l'enseignant, n'aurait aucun sens, car il manque aux élèves la vision globale des progressions individuelles et le risque est immense d'en rester à un traitement de surface des difficultés. Le bilan est un temps d'interaction groupe/ élève / enseignant qui est court, rythmé, précis pour explicter, consolider, préparer.

Une affiche bilan peut être annotée et modifiée progressivement à chaque séance si besoin afin de visualiser les écueils qui disparaissent et ceux qui apparaissent. Un enseignant peut aussi noter au tableau les points sur lesquels il interviendra en fonction des observations durant la séance. La phase d'analyse des pratiques est un levier essentiel dans la recherche de l'efficacité et dans la compréhension explicite des points faibles et points forts. Cette phase d'analyse est essentiel pour les élèves et les enseignants, si bien qu'ils sont fortement incités à verbaliser leurs actions.

Les élèves sont invités à exprimer leurs besoins pour avancer dans le projet, il faut prendre soin d'éviter les implicites pour gagner en efficacité. Nous nous posons donc toujours cette question *« De quoi avons-nous besoin pour avancer / De quoi ai-je besoin pour réussir ? » « Que dois-je faire pour cela ? Que dois-je savoir ? Que dois-je renforcer ? »*

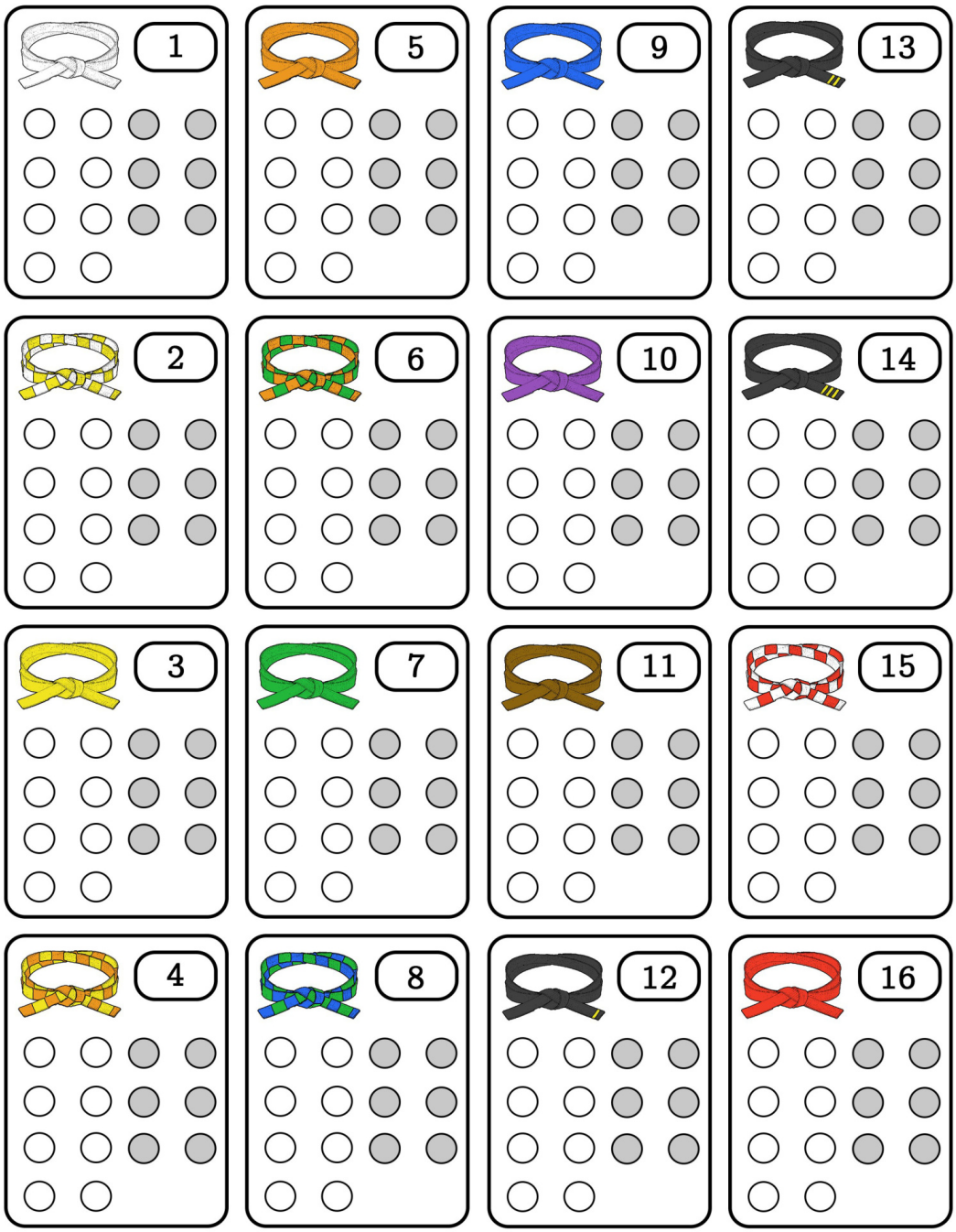
Pour résumer, au CE2, CM1 et CM2

- 3 fichiers. (niveau 3, 4 et 5)
- Les fichiers 3 et 4 proposent un travail de catégorisation. L'élève doit aussi choisir le bon modèle de schéma selon le problème rencontré. (Analyse de la structure du problème et catégorisation). Mais ce n'est qu'une partie du travail demandé et qui peut se faire avec le guidage plus ou moins prononcé de l'enseignant selon le besoin d'expliciter les stratégies. Les élèves peuvent être amenés à modéliser le calcul rencontré en plus de la modélisation de la situation.
- Le 5e fichier propose à l'élève de construire si nécessaire son ou ses modèles schématiques selon la situation rencontrée avec un mélange de tous les problèmes dans le fichier. Les problèmes sont complexes d'où une modélisation plus poussée. À ce niveau, suite à plusieurs années de préparation, les élèves ont une vision plus globale et pertinente des problèmes proposés.

– Une « fiche bilan » personnelle est complétée par les élèves à chaque problème résolu. Les élèves peuvent donc traiter les problèmes dans l'ordre chronologique ou, s'ils le souhaitent, dans l'ordre de leur choix en allant généralement du plus simple au plus complexe pour eux. Il y a donc une progression proposée à l'élève, la progression du fichier, mais celui-ci a la possibilité de traiter les problèmes en fonction de ce qu'il pense savoir faire ou ne pas faire. Ce choix est donné à partir du CM1. L'élève progresse donc selon sa vision de ses difficultés et ne reste jamais bloqué. Il devra de toute façon résoudre l'ensemble des problèmes ce qui ne permet pas à l'élève d'éviter ses difficultés. Il devra s'y confronter mais aura pu s'y préparer.

– Au bout d'un nombre de problèmes résolus, les élèves peuvent passer une ceinture. Ainsi aucun blocage ne peut durer, car il y a possibilité de basculer d'un mode d'avancement à un autre. Il est à noter que la grande majorité des élèves préfère l'avancement progressif du fichier car « sauter » une difficulté est synonyme de renoncement. Ils préfèrent prendre plus de temps, quels que soient les efforts à fournir, pour réussir. La persévérance devient une normalité et les élèves ne renoncent pas devant la difficulté. Ils savent qu'ils finiront par réussir, car ils ont patiemment engrangé une confiance dans leurs capacités.

Exemple de fiche bilan qui est complétée progressivement. Chaque cercle correspond à un problème additif ou multiplicatif. L'enseignant valide, mais il peut aussi s'agir de l'élève. Il est alors aisé de voir le travail effectué par l'élève, sa progression et ses difficultés. En changeant la couleur des cercles à chaque séance, il est aussi possible de voir le rythme de travail de l'élève.



9 - 1 Modalités d'intervention et analyses personnelles

Plusieurs documents de travail existent pour aborder les possibilités d'intervention quand deux enseignants partagent une classe. Le premier document est issu du Rapport du comité national de suivi du dispositif « Plus de maîtres que de classes », septembre 2015. Il expose les possibilités d'intervention quand deux enseignants vont être amenés à gérer un groupe d'élèves lors de phases d'apprentissage. Il nous semble important de prendre ce document comme un éventail des possibles et non comme une liste où des modalités types correspondraient à des séances types. Les propositions se transformeraient alors en un formatage du type : « Leçon A donc configuration A, leçon B donc configuration B ».

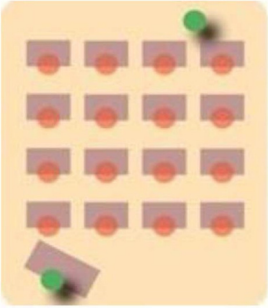
Le risque serait grand de s'enfermer exclusivement dans une des modalités au lieu de viser l'articulation souple de celles-ci entre les séances et au sein même de la séance. La nature même de ce projet est de pouvoir moduler les types d'interventions dans les séances en fonctions des besoins des enseignants et des élèves. Une posture trop rigide pourrait ne pas permettre l'apparition de situations d'apprentissage non prévues mais potentiellement bénéfiques aux élèves. Tout comme une posture trop souple pour l'élève se traduirait par une implication moindre, parasitée par les à-côtés, et un rendement trop faible. Selon que le travail de l'élève se fera seul ou en groupe, qu'il nécessitera des échanges ou alors un calme propice à la réflexion et la reprise en mémoire, il existera une modalité qui s'y prêtera mieux.

Bien qu'en anglais, il est intéressant de lire à ce sujet le travail d'Hastings et Schwieso sur le lien entre la disposition en classe et l'engagement des élèves dans la tâche[1]. La disposition des élèves selon la tâche réellement proposée va influer sur la qualité de production des élèves. Pour résumé, est-ce que la tâche demandée est une tâche individuelle ou collective ? Est-ce que la disposition choisie correspond à cette tâche ?

1Tasks and tables: the effects of seating arrangements on task engagement in primary classrooms. Hastings et Schwieso. Educational Research Volume 37, 1995

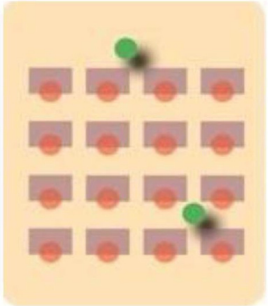
Modalités d'organisation pour les enseignants

1. L'un enseigne, l'autre observe



L'un des avantages de cette co-intervention est qu'une observation plus précise est possible. Il est possible de décider à l'avance ensemble quels types de données d'observation spécifique recueillir au cours de la séance.
Par la suite, les enseignants ont à partager l'analyse des observations.
Cette organisation est intéressante au début de la collaboration entre enseignants, mais pas seulement.
Elle est utile pour observer la mise au travail et les démarches des élèves, l'impact du rôle de l'enseignant : compréhension des consignes, mobilisation des élèves, comportements parasites, etc.

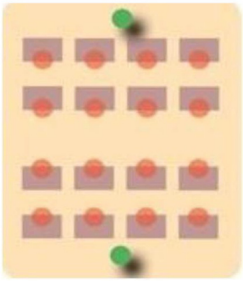
2. L'un enseigne, l'autre aide



Dans ce fonctionnement du co-enseignement, un professeur garde la responsabilité de l'enseignement tandis que l'autre circule à travers la classe, fournissant une aide discrète aux élèves en fonction des besoins.
Cette organisation est pertinente lorsque :
- l'un des enseignants a approfondi un domaine pour l'enseigner
- l'activité risque de présenter des difficultés immédiates, mais il est important qu'elle reste collective
- lorsque des élèves manifestent des difficultés à se mobiliser.

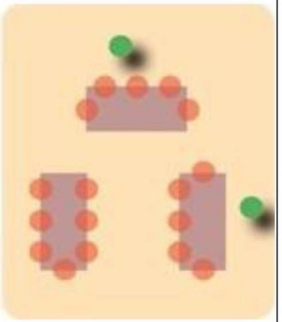
C'est intéressant d'alterner les rôles.

3. Enseignement parallèle



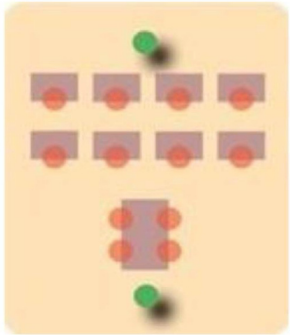
Les enseignants font en même temps la même chose : l'avantage est la réduction du nombre d'élèves. Dans un certain nombre de cas, l'apprentissage des élèves serait grandement facilité s'ils avaient juste eu plus d'attention de l'enseignant et davantage la possibilité de prendre la parole.
La composition des deux groupes hétérogènes peut être intentionnelle, réfléchie.

4. L'enseignement en ateliers



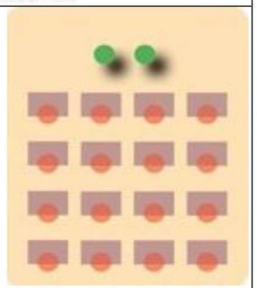
Dans cette approche de co-enseignement, les enseignants se divisent le contenu.
Chaque professeur enseigne le contenu à un groupe et reproduit son intervention ensuite auprès de l'autre groupe.
Un troisième atelier peut donner aux élèves la possibilité de travailler en autonomie.
Cette organisation est intéressante par exemple quand il y a un matériel spécifique.

5. Enseignement avec groupe différencié



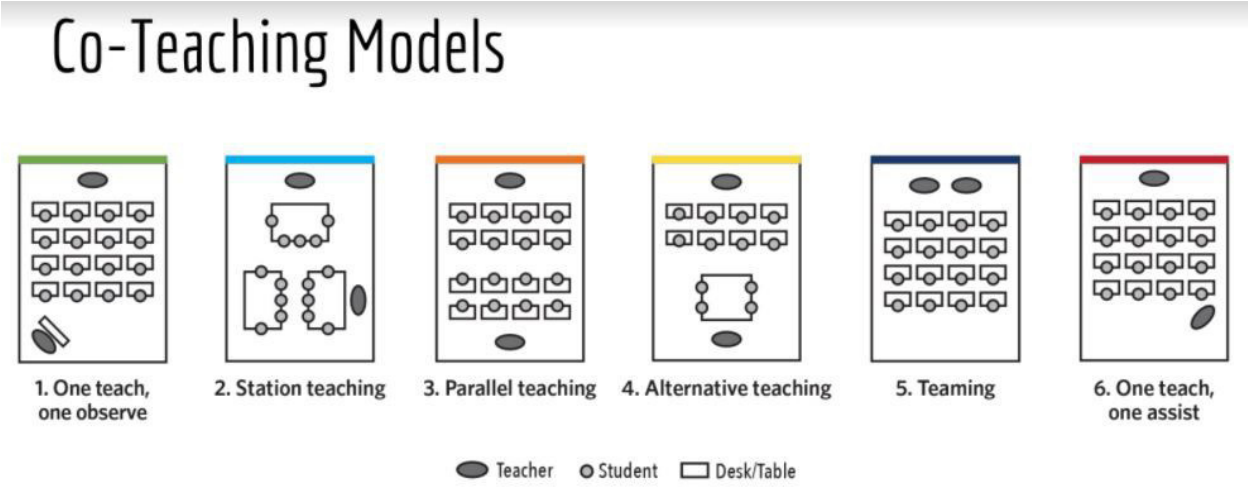
Dans toute classe, il y a des moments pendant lesquelles les élèves ont besoin d'une attention particulière. Dans cette formule, un enseignant prend la responsabilité de l'ensemble du groupe, tandis que l'autre œuvre avec un petit groupe.
Cette organisation peut être choisie à des moments différents – au début ou à la fin d'une séance ; elle peut être brève. Elle peut concerner des élèves ayant des difficultés ou tout au contraire des élèves à l'aise qui vont être stimulés de manière approfondie. La différenciation peut concerner un domaine sur lequel travaille le grand groupe ou bien un autre domaine.

6. En tandem



Dans l'enseignement en tandem, les enseignants sont acteurs avec toute la classe en même temps.
Cette organisation peut être très utile lorsque l'un parle, mène un dialogue avec le groupe classe, tandis que l'autre agit, manipule, écrit.

Le même document dans sa version anglophone [2]



Une séance peut voir s'exprimer plusieurs approches selon les besoins rencontrés. La variabilité dans les parcours des élèves implique que peuvent se former des groupes ayant les mêmes besoins didactiques, méthodologiques, mémoriels à un temps donné, sur une durée donnée mais que cet état n'est que temporaire. Il convient alors de pouvoir passer d'une modalité à une autre si cela est nécessaire. Cela implique d'une part une maîtrise du domaine disciplinaire concerné afin de reprendre, approfondir et expliciter les notions et d'autre part une capacité d'adaptation et d'improvisation (relative, dans la mesure où tous les cas de figure ont été globalement envisagés préalablement). La maîtrise disciplinaire permet de rebondir plus efficacement sur les propositions des élèves, de donner une plus-value, elle permet d'articuler les besoins individuels et ceux du groupe. Le couplage de cette maîtrise disciplinaire avec une connaissance des possibilités d'action (co-enseignement, co-intervention) permet de maximiser l'apprentissage en évitant autant que possible les flous, non-dits, temps morts, reprises. Nous sommes donc ici dans la recherche de l'optimisation du temps d'apprentissage et du temps d'enseignement, indépendamment de la modalité choisie.

Le second document présente certains avantages et inconvénients des modalités présentées. Il est donc plus aisé pour les participants à ce projet de corriger les éventuels écueils des propositions d'organisation. Les inconvénients présentés peuvent apparaître si la modalité est appliquée sans tenir compte du contexte classe et de la singularité des élèves. Cette présentation fait apparaître des inconvénients comme étant intrinsèquement liés à des pratiques, et sur ce point nous émettrons des réserves, car il nous semble qu'il y a confusion entre *inconvénients* et *dérives* d'une part, et entre outil et utilisation de l'outil d'autre part (part de la pratique, part de l'enseignant). Les « inconvénients » possibles étant connus, il convient alors d'agir en amont pour les prévenir. À notre sens, ce document n'est pas objectif quant aux réalités des pratiques (quels processus engagés devant les élèves engendrent quelles réactions ? Dans quelle mesure ?) mais orienté selon les conceptions de ses auteurs qui sont très « fixistes » sur les approches.

2 https://buildingmathematicians.wordpress.com/2017/09/28/co-teaching-in-math-class/

5 types de regroupements des élèves en classe

Les types de groupe peuvent concerner la co-intervention comme l'enseignement « en solo » dans la classe ou hors de la classe.
Le contenu du tableau n'est qu'indicatif et mériterait une personnalisation pour chaque enseignant.

Type de groupe	Avantages	Inconvénients	Exemples d'activités
Grand groupe	- Constitue une formule efficace et économique qui permet de s'adresser à tous les élèves - Simplifie la préparation - Facilite la mise en œuvre - Constitue l'occasion d'une activité entre tous les élèves - Développe l'esprit de classe et le sentiment d'appartenance	- Certains élèves ne suivent pas. - Comporte peu d'interactions dans le groupe - Procure peu de retour de l'enseignant à chacun - Rend les élèves peu actifs - La mobilisation des élèves peut diminuer	- Présentation d'une notion nouvelle - Explication d'une stratégie, d'une procédure, d'une technique - Présentation d'un projet collectif - Lecture aux élèves - Débat de classe
Petit groupe homogène	- Permet un enseignement convenant au niveau de compétence de l'élève - Vise à pallier les difficultés et donc à réduire les écarts	- Stigmatise certains élèves, nuit à l'estime de soi et à la confiance en soi des élèves - Est parfois centré sur des tâches de bas niveau cognitif et des activités non signifiantes	- Analyse d'erreurs - Retour sur une notion particulière ou une procédure - Présentation d'une histoire correspondant à un texte difficile qui va être lu en grand groupe
Petit groupe hétérogène et coopératif	- Favorise les interactions sociales et le dialogue entre élèves - Permet d'acquérir des compétences de collaboration	- Demande une bonne préparation des activités et du matériel - Nécessite que les élèves soient capables de travailler ensemble - Certains laissent faire les autres	- Recherche d'un classement - Écriture en groupe - Résolution de problèmes - Activités scientifiques
Binôme	- Donne l'occasion de mettre en commun des compétences - Assure un soutien entre élèves - Favorise l'estime de soi et la motivation - Nécessite peu de préparation matérielle et s'organise facilement	- Nécessite que les élèves soient capables de travailler ensemble - Les élèves sont facilement hors tâche	- Mise en ordre d'un texte en désordre - Révision d'un texte écrit - Mémorisation des tables - Dialogue en langue étrangère
Enseignement individuel	- Permet de consolider les démarches - Favorise la réflexion personnelle	- Doit être de courte durée - Peut faire perdre de vue le reste de la classe	- Aide en rédaction - Aide en résolution de problèmes - Entretien métacognitif

Tableau adapté du document du département de l'Yonne sur les dispositifs « Plus de maîtres que de classes », d'après l'ouvrage de Lise Saint-Laurent (Université de Laval, Québec), *Enseigner aux élèves à risque et en difficulté au primaire* (Gaëtan Morin éditeur-Chenelière éducation, 2008)

Le document précédent note par exemple comme inconvénient du « petit groupe homogène » le centrage sur un bas niveau cognitif. Est-ce le groupement homogène qui induit intrinsèquement le centrage bas ? Est-ce l'enseignant qui induit inconsciemment le centrage bas ? Lorsqu'une tâche est non-signifiante, est-ce la modalité qui est responsable ? Dans cette situation il apparaît évidemment que certaines situations peuvent être stigmatisantes, car les approches sont utilisées comme tel et non comme il conviendrait de l'aborder. L'inconvénient est-il alors le fruit de la disposition pédagogique ou le fruit de la pratique inconsciente de l'enseignant ?

En simplifiant, on pointe un « inconvénient » d'une pratique comme si cet inconvénient résultait de la pratique en elle-même et que celui-ci était forcément présent. Nous pouvons au contraire penser qu'une modalité pédagogique est pensée et utilisée pour de bonnes raisons par l'enseignant même si son application n'est pas optimale. Il s'agira alors de ne pas prêter des intentions malvenues aux enseignants au travers de leurs pratiques, mais de signifier simplement qu'il faut prendre garde à certaines dérives sans disqualifier la pratique qui n'est que ce que l'enseignant en fait.

En réalité, les inconvénients résultent bien souvent, à notre avis, d'une non-préparation à ces possibles inconvénients et de fait ne sont plus des inconvénients inhérents à la pratique, mais des dérives possibles pour toutes les pratiques. Il faut, autant que possible, anticiper ce que nous ne voulons pas et donc évacuer les dérives. Ainsi, les inconvénients cités dans le document sont des dérives à éviter et non des inconvénients (au sens : « cela va arriver forcément avec cette pratique »). Ce changement de paradigme redonne à l'enseignant une légitimité à utiliser des groupes homogènes dans la mesure ou il a conscience des dérives possibles et qu'il veille au quotidien à les éviter. Il n'y a donc pas de jugement de valeur de la pratique pédagogique (*c'est une bonne pratique / c'est une mauvaise pratique*) sur d'hypothétiques inconvénients (qui sont des dérives) mais un jugement de son efficacité et de sa pertinence selon que l'enseignant veille à en utiliser toute l'efficacité potentielle.

Cette confusion entre inconvénient et dérive peut conduire à sur-responsabiliser ou déresponsabiliser l'enseignant et à condamner a priori une pratique. Proposer des tâches de bas niveau en cherchant la réussite « facile » pour les plus faibles est une dérive qui n'est pas du ressort de la pratique (au sens modalité d'action pédagogique). Nous en revenons toujours à *« l'outil et l'utilisation de l'outil »*. Nous devons donc être vigilants quant aux jugements des pratiques en différenciant *dérives* et *inconvénients* et en ciblant nos analyses sur l'efficacité réelle des pratiques, une fois les dérives écartées. C'est évidemment un sujet complexe qui mériteraient un approfondissement réflexif.

Ainsi, le petit groupe homogène n'a pas vocation à donner l'illusion de réussite aux plus faibles par l'exécution de taches simplistes, au contraire ! (Nous serions dans la dérive). Tous les élèves méritent notre exigence. Il ne faut pas entrer dans la création de prophéties autoréalisatrices du type « Ils ont un niveau faible parce que…, baissons nos exigences pour les mettre en réussite, ils gagneront forcément en confiance ».

Les élèves en question risquent de rester à un niveau toujours faible car leur *réussite* est

basée sur une tâche trop simpliste qui n'aurait pas demandé un effort suffisant de leur part (dans une optique de progrès réel mesurable avec une exigence claire et explicitée pour lui). D'où un questionnement sur *« Baisser les attentes pour Mettre/ Créer la réussite afin que l'élève gagne en confiance et qu'il apprenne et s'engage ? Maintenir les attentes et apprendre à l'élève à apprendre et s'engager pour réussir et gagner en confiance à la fin ? »*. Les élèves plus faibles ne sont pas plus « bêtes », ils ont peut-être un potentiel différent (dans le sens ou les rythmes d'apprentissages peuvent varier) dû à un vécu scolaire/ familiale/… différent, des habitudes scolaires différentes qui font qu'ils peuvent mettre plus de temps pour assimiler une notion, car il y a des manques à combler. Les élèves plus lents ont généralement les mêmes capacités cognitives, mais ils peuvent avoir des lacunes de différents ordres, qui ralentissent les apprentissages, sur lesquelles nous pouvons agir dans la mesure de nos capacités et du temps dont nous disposons. Il faut donc prendre conscience que l'enseignant à un impact sur l'élève et ses apprentissages.

Cela ne signifie aucunement que l'élève n'a aucune responsabilité dans ses apprentissages et qu'il peut se dédouaner de sa situation, la question est de savoir si ce qu'il n'a pas appris et qu'il ne sait pas faire a été enseigné. Si non, il faut l'enseigner ; si oui, pourquoi n'a-t-il pas appris ? Nous nous trouvons donc dans un équilibre permanent entre enseignement et apprentissage où chacun a son rôle à jouer. Et parfois, nous ne trouvons pas de réponses. Nous acceptons l'existence des difficultés et nous les affrontons mais en clarifiant autant que possible la situation pour l'élève (*faire ce que l'on dit et dire ce que l'on fait*) afin que chacun sache clairement où il en est et ce qu'il reste à faire. Il faut valoriser objectivement les efforts des élèves et rendre visible les progrès sans camoufler les ratés. Les erreurs, ratés, fautes, échecs, sont autant de marches à utiliser pour atteindre une meilleure expertise dans un domaine. L'erreur est incontournable dans un processus d'apprentissage, il en est une des conditions. Pour apprendre de ses erreurs il faut intérioriser le fait que nous ne sommes pas nos erreurs, que c'est un processus normal durant un apprentissage et pas un état fixe. Toute la difficulté pour l'élève, et l'enseignant, est de se servir de l'erreur positivement comme étant ce qu'il ne reste plus qu'à peaufiner dans une logique de progression. En ce sens, l'erreur permet de s'orienter dans les apprentissages et les enseignements pour progresser.

En reprenant le document abordant le « petit groupe homogène », cet inconvénient du « bas niveau cognitif » apparaît selon une conception de ce que pourrait être la *différenciation*. Si elle consiste à amener le niveau de la tâche à un niveau moindre que celui des élèves pour qu'ils réussissent, l'aspect qualitatif n'existe donc plus. Si chaque élève ne se voit pas proposer un challenge cognitif adapté à ses besoins et ses capacités à cette étape de son parcours, qui stimule mémoire, connaissances et procédures, il persistera dans une illusion de réussite. Dans la mesure où l'exigence est proposée pour tous, la différenciation est donc moins dans le registre qualitatif (tous sont concernés, a leur niveau, donc le qualitatif est présent) et plus dans l'aspect quantitatif et dans l'étayage proposé (donner plus à ceux qui ont besoin de plus). Toute la difficulté réside

dans la capacité à donner à ces élèves un contenu riche et exigeant, qu'ils méritent, mais pas hors de portée. Petits pas par petits pas, ils progressent vers un niveau ciblé qui doit être élevé. Il s'agirait donc ici d'expliciter tout ce qui sera nécessaire pour atteindre l'objectif en rendant visible le travail de l'élève. Il faut qu'il puisse visualiser le fruit de son travail dans un continuum. Il conviendrait alors d'accompagner et étayer les élèves sans rogner sur l'ambition et l'exigence. La stigmatisation ressentie quand l'élève ne réussit pas peut peut-être venir des 2 cas suivants :

– Incapacité répétée pour l'élève à réaliser la même tâche que son condisciple. Il est en échec continue et se sent abandonner / dévaloriser par l'enseignant (c'est un ressenti, pas un fait). C'est-à-dire que chacun estime faire au mieux, mais il y a peut-être malentendu. A-t-on enseigné ? A-t-il appris ? Entraînement suffisant ?

– Se voit toujours proposer des taches simplistes d'un niveau cognitif très faible, inférieur au sien, très éloignées des taches réalisées par les autres élèves. Il n'y voit aucune valorisation. Vouloir le mettre en réussite quitte à créer une illusion de réussite ? Ou accepter qu'on ne sait pas pour s'appuyer sur ses erreurs et progresser ?

Or, la variété de nos supports et des approches associées, en gardant toujours à l'esprit la notion d'exigence personnalisée, propose à chacun un défi cognitif adapté faisant de la sorte disparaître, ou du moins amoindrir fortement, toute stigmatisation. L'élève, quel que soit son niveau, est donc toujours en position de faire un effort pour réussir une tâche de même type que celle de son camarade. Il y a valorisation du progrès et pas simplement du résultat brut. Il y a toujours une marche à gravir, pas 4 ou 5, une. Une marche après l'autre. Chacune des marches est un défi qui demande du travail pour l'élève (sinon ennui et lassitude devant la facilité) atteignable (sinon découragement). Les élèves ne sont pas tous sur la même marche, mais ils ont tous une marche à gravir pour aller au plus haut (et au-delà bien sur).

Rappelons également qu'un groupe homogène est possiblement envisageable, ponctuellement, pour tous les niveaux, excellents et faibles, et que ce qui pourrait sembler « faible cognitivement » pour un « élève théorique » peut être au contraire « élevé cognitivement » pour d'autres. Il convient d'être objectif quant au niveau de maîtrise des élèves dans leurs singularités (des évaluations claires et ciblées). Le petit groupe homogène peut être extrêmement valorisant si le contenu proposé est stimulant intellectuellement pour les élèves du groupe, quel que soit leur niveau d'expertise. La vraie différenciation qualitative doit apporter à chacun un défi cognitif exigeant afin de permettre le franchissement d'un palier. De plus, l'homogénéité est toute relative, car les élèves n'en sont pas tous au même point à un instant donné. Nous pourrions plutôt voir leur avancement, leurs progrès, comme composé de zones à vitesses variables pouvant créer des zones denses momentanément.

Pour résumer, toutes les modalités ont leur intérêt et peuvent/doivent s'articuler, selon la situation rencontrée par un ou des élèves et selon le fonctionnement du groupe classe. L'enseignant doit s'y retrouver pour y être à l'aise (ne pas jongler entre trop de modalités

au risque de perdre toute cohérence, garder une structure explicite pour les élèves) mais en recherchant également l'efficacité réelle (progrès observés ? Dans quelle proportion ? Avec quelle intensité ?) pour ses élèves (être à l'aise pédagogiquement dans une modalité inefficace auprès des élèves est-il éthiquement tenable ? Vraie question !).

Ne jamais s'enfermer dans une seule voie mais garder à l'esprit que plusieurs chemins sont possibles pour que les élèves progressent réellement. Tenir compte des dérives potentielles d'une approche pour les prévenir en amont en étant toujours exigeant pour tous les élèves en tenant compte objectivement du chemin parcouru et du chemin à parcourir. Valoriser les efforts et progrès de tous les élèves (tous, faibles ou forts), est un renforcement positif qui permet le gain de confiance en soi et qui se traduit par une qualité et une quantité de travail de l'élève bien plus importante. La confiance de l'élève vient s'asseoir sur la réussite (progrès) observable.

La pratique reste le plus sur moyen de trouver son fonctionnement optimal en gardant toujours à l'esprit que, dans la mesure où ce projet se mène avec le maître supplémentaire, le croisement des regards et l'analyse régulière permet un affinement des pratiques et un centrage sur l'efficacité de celles-ci. Par expérience, nous préconisons les modalités suivantes pour les séances de résolution de problèmes basées sur nos fichiers :

– **L'enseignement en tandem car cela permet de s'adresser à un nombre réduit d'élèves.**

L'avantage est de pouvoir accorder du temps à chacun, d'expliciter, de personnaliser. Nous pouvons effectuer des feedback (des retours explicatifs) précis et immédiats tout en maximisant le temps effectif de résolution. De part notre expérience, les élèves sont dans une forte dynamique de travail avec beaucoup d'émulation et cela quel que soit le niveau des élèves car encore une fois, chaque élève est confronté à un travail cognitivement stimulant et exigeant. Les enseignants peuvent aussi agir à 2, échanger et compléter le collègue si besoin. Cette modalité est très présente au cycle 3 et fonctionne parfaitement mais il faut une relation de confiance au sein du tandem qui décide de se former (les binômes artificiels sont moins performants) et une maîtrise du domaine travaillé. Il faut pouvoir ne pas différer les questionnements des élèves et proposer le retour le plus explicite et efficace auprès de l'élève et du groupe, cela implique une maîtrise disciplinaire de tous les aspects présents dans ce projet. Nous ne disons pas « c'est réservé aux enseignants qui sont bons en maths », nous disons qu'il peut arriver que l'enseignant se retrouve dans la situation suivante (au CM2) :

4 élèves se présentent et il faudra ré-expliciter au premier la modélisation d'une situation de comparaison, rappeler au deuxième l'algorithme de la division d'un nombre décimal, enchaîner avec le troisième qui ne trouve pas son erreur dans la multiplication 14523 × 967,6 et que vous vérifierez avec lui sans calculatrice et le quatrième qui n'a pas encore bien assimilé les relations dans une règle de trois.

De prime abord cela peut sembler ardu de passer très rapidement d'une notion mathématique à l'autre mais avec l'expérience, ce n'est plus problématique. Il y a une

période de rodage et la bonne articulation et répartition entre les deux enseignants permet de gérer au mieux ces situations. C'est une tâche complexe pour l'enseignant d'où la nécessité de la plus grande clarté possible avec les élèves et une connaissance des contenues. Il est néanmoins important d'avoir une base disciplinaire solide pour aider au mieux les élèves.

– **L'enseignement en groupes différenciés. (dans une même classe ou non)**

Les élèves sont répartis en groupes de niveaux à hétérogénéité faible (dans le sens où les compétences du plus avancé ne sont pas inaccessibles au moins avancé) selon le principe « montante descendante » ou la taille des groupes varie selon l'avancement de chacun. Les élèves ont tous des temps d'acquisition différents selon les domaines, nous prenons donc avec eux le temps qui est nécessaire pour maîtriser le domaine concerné mais avec exigence et recherche d'efficacité. La passation de consignes, l'explicitation, la verbalisation et la relance sont favorisées de même que l'interaction entre élèves qui peuvent s'appuyer sur leurs condisciples. Le travail est personnel mais le coup de pouce du voisin peut parfois s'avérer salvateur. L'enseignant dispose ainsi de plus de temps « qualitatif » pour expliquer, manipuler, approfondir une notion. Cette modalité nous apparaît comme très efficace avec les CP et CE1 mais demande nécessairement des temps d'échanges et d'analyse des pratiques entre les enseignants pour assurer la cohérence des interventions.

– **Une modalité qui peut être inefficace ou efficace selon comment elle est comprise par l'enseignant :**

Le groupe coopératif hétérogène peut donner l'illusion d'un travail de groupe alors qu'il est de manière quasi systématique le travail du leader du groupe. Cela vient régulièrement du fait qu'il y a un amalgame coopératif / collaboratif où, en pensant faire coopérer les élèves, ils sont placés en position de collaboration peu structurée qui n'est que peu profitable aux élèves et encore moins pour ceux ayant des difficultés. Ces deux pratiques sont très différentes à notre sens et souvent prises l'une pour l'autre. Le but, dans notre conception de ce projet, n'est pas tant de faire ensemble (aspect social) mais d'apprendre ensemble. En coopérant les élèves travaillerons ensemble, en interagissant, mais l'objectif restera toujours l'apprentissage et le travail de tous les élèves pour eux et le groupe.

Un travail coopératif est efficace, selon nous, s'il est réellement coopératif et non pas collaboratif, c'est-à-dire que chacun apporte aux autres ses compétences et savoirs dans un but commun de résolution. Les apports des membres du groupe doivent tous avoir de l'importance pour la réalisation globale. La coopération est une mise en commun des connaissances / compétences réelles des membres pour atteindre un objectif commun mais aussi personnalisé qui n'aurait pu être atteint seul. Ainsi la modalité « coopération » n'est utilisée que parce qu'elle est réellement indispensable pour les élèves. Les élèves sont responsables individuellement de leurs apprentissages et collectivement de celui des membres du groupe, car ils ne sont pas là pour « faire » ensemble mais pour apprendre « ensemble ». L'apport de chacun doit donc être visible et se traduire par une compétence accrue.

Le travail coopératif est guidé et structuré explicitement et chacun sait clairement et concrètement ce qu'il a à faire pour lui et le groupe. Les élèves ne sont alors pas en groupe pour *« être en groupe »* et ne sont en groupe que pour réaliser ce qu'ils ne pourraient réaliser seuls. La tâche doit vraiment nécessiter cette modalité. Si la « coopération » devient une modalité qui impose un travail de groupe pour une tâche simple qui est réalisable seul, elle ne présente plus aucun intérêt en termes d'apprentissages. Est-ce l'organisation de la classe qui décide du type pédagogique de l'activité ? Ou est-ce l'activité pédagogique qui va induire une modification de l'organisation de la classe ? Autrement dit : Un travail à mener seul dans un îlot de 4 élèves où un travail coopératif avec une disposition en rangées ont-ils du sens dans ces conditions ? Il faut, si cela est possible (et souvent c'est très difficile) modifier l'organisation spatiale en fonction de ce que l'on propose plutôt que caler toutes les propositions pédagogiques dans une organisation formatée. Des phases où l'élève est seul sont nécessaires, des phases en groupe aussi. L'idéal serait de pouvoir passer d'une configuration à l'autre.

Il nous semble qu'une question importante à se poser sera : Est-ce que ce que je propose est efficace auprès des élèves ? Est-ce mesurable ? Est-ce la pratique la plus efficace pour ce que je cible au niveau des apprentissages ? Nous mettons donc en avant ici une articulation souple de pratiques qui se veulent efficaces (et qui doivent l'être, pour nos élèves) dans des cadres donnés et pas dans une pratique unilatérale de tel ou tel « dogme » (ou énoncé comme tel) (On pourrait, pour les amateurs de JDR, voir la coopération comme un groupe « Héros, Mage, Voleur, Archer, Guerrier » ou chacun apporte une compétence au groupe. Il y a un gain pour le groupe et l'individu dans une quête inaccessible seul.)

Le travail présenté ici étant personnel, la dérive est évidente si la modalité choisie ne respecte pas ce principe initial. Cela ne conviendrait pas, de prime abord, avec nos modalités de travail. Mais dans le cas ou cette modalité est mise en place, l'enseignant doit effectuer un cadrage permanent pour s'assurer de la participation et de la compréhension de tous sans « passer à côté ». S'il y a malentendu coopératif/collaboratif, le coût risque d'être très élevé en comparaison des autres modalités pour un rendement très faible.

Dans les faits (sans guidage ni structure), un leader se dégage systématiquement lors des phases collaboratives, celui qui sait réellement ou celui qui impose ce qu'il pense savoir. Dans le reste du groupe nous retrouvons souvent les « consommateurs » qui attendent que le leader donne la réponse qu'ils copieront. Ils n'ont débuté aucune démarche de résolution personnelle (si les copains font à ma place, pourquoi le faire ?) et n'ont pas mobilisé les processus cognitifs mis en jeu contrairement au leader. Ainsi, le résultat correct de leur travail donne l'illusion de l'acquisition du savoir et de la compétence, eux-mêmes pensent savoir faire, alors que ce n'est que le reflet du savoir et de la compétence d'un nombre restreint d'élèves. Le risque est grand de voir des élèves qui ne s'investissent pas dans la tâche.

Les évaluations des élèves retranscrivaient de manière claire que les leaders des groupes

avaient des taux de réussite élevés alors que les « consommateurs » échouaient. L'enseignant pouvait avoir l'illusion qu'ils maîtrisaient les compétences, qu'ils savaient faire, or il devra effectuer des ateliers de remédiation coûteux en temps d'apprentissage. Le temps apparaît comme perdu, ce que nous ne souhaitons absolument pas dans notre optique de travail efficace.

Entendons-nous bien, nous ne remettons absolument pas en cause la pratique coopérative, au contraire. Nous signifions dans un premier temps qu'il ne faut pas la confondre avec un travail collaboratif (le travail en groupe pour être en groupe) et dans un second temps qu'elle n'est pas la plus adaptée, au quotidien, à notre démarche qui cible la progression personnelle de l'élève dans un domaine particulier. Mais elle est néanmoins très efficace sur une séance « décrochée » ou « complémentaire » permettant de travailler différents aspects méthodologiques ou pour affronter un problème complexe de grande envergure qui remobilisera des connaissances et procédures du fichier (quelque chose que l'élève ne pourrait aborder seul). Cela permettra à tous les élèves de confronter leurs compétences à une tâche qui nécessitera une réelle coopération pour apprendre individuellement et collectivement. (la coopération peut se faire à 2, comme le tutorat, ce n'est pas la taille du groupe qui induit la qualité des productions)

C'est une modalité qui doit simplement être utilisée dans le cadre adapté et ce cadre est une pratique parmi d'autres qui n'a pas à être unique et imposée. Ainsi, la pratique coopérative est une pratique possible en classe si elle a été préparée et pensée (et n'est pas un pseudo travail de groupe) et elle pourra alors en devenir une des finalités. C'est selon ce principe que les CM2 (2015 – 2016) ont abordé un problème complexe de grande envergure qui remobilisait implicitement toutes les stratégies et modèles étudiés dans un contexte nouveau. Ils ont tous apporté leur pierre à un édifice mathématique qu'ils n'auraient pu aborder en solitaire (sauf peut-être élèves très très performants ?). Cette pratique coopérative a été préparée par les enseignants de manière progressive durant l'année alors que les élèves ont travaillé individuellement sur la résolution de problèmes et affûté leurs connaissances et compétences. La composition des deux a pu se traduire par un travail de grande qualité qui nécessitait réellement le travail conjoint de tous les élèves.

La confrontation personnelle de l'élève face à la tâche permet de différencier les approches et de cibler les échecs et réussites individuels pour proposer de manière immédiate la remédiation adaptée. La réactivité (feed-back) diminue fortement les risques « d'illusion » sur les capacités de nos élèves. Il est bien plus efficace d'agir en amont pour limiter/ éviter / corriger les difficultés que de dépenser temps et énergie quand les dégâts sont faits. Il faut se servir des erreurs pour progresser mais ne pas réagir trop tard. Il faut donc associer attention permanente et bienveillance mais avec rigueur et exigence.

Niveau	Modalités les plus vues dans l'école
CP	**1) Observation :** Durant les premières séances, lors de l'introduction du projet par le maître supplémentaire. Bilan et analyse entre les enseignants à chaque séance pour affiner la démarche. **6) En tandem :** Pendant quelques séances ou durant une période selon les profils de classes. **5) Groupes différenciés** : Les groupes sont de tailles variables allant de deux demi-classes a des groupes ¾ classe et ¼ classe. Les groupes peuvent se trouver dans la même classe ou dans deux classes selon les besoins. Un groupe peut être dédié à de la manipulation, de la méthodologie. La constitution des groupes et des objectifs de ceux-ci sont issus des bilans et analyses des enseignants.
CE1	**1) Observation :** Durant les premières séances, lors de la réintroduction du projet par le maître supplémentaire. **6) En tandem :** De quelques séances à l'année entière selon les besoins des élèves et le profil de la classe. **5) Groupes différenciés** : groupes de deux demi-classes. Les groupes sont modulables selon les bilans et analyses des enseignants. Le travail en groupes séparés (hors-classe) implique une cohérence et donc une analyse des pratiques de façon régulière.
CE2 / CM1	**6) En tandem :** Durant l'année entière.
CM2	**6) En tandem :** Durant l'année entière. **5) Groupes différenciés** : Les groupes sont de tailles variables allant de deux demi-classes a des groupes ¾ classe et ¼ classe. Un groupe est composé d'élèves reprenant le travail de modélisation sur des fichiers de niveau inférieur (fichiers de CE1 par exemple) avant de ré-utiliser les fichiers supérieurs. Le principe est de relancer les élèves en retravaillant toutes les lacunes observées quand elles se présentent.

9 - 2 Analyses et commentaires des enseignants, des élèves

Les propos suivants ont été majoritairement recueillis auprès des enseignants lors de l'année scolaire 2014/2015. Ces témoignages datent donc des débuts de ce projet d'intervention auprès des élèves et sont donc à replacer dans leur contexte. Avec une expertise grandissante des différents acteurs, les aspects évoqués « en tension » ont pu trouver des adaptations acceptables selon les classes et les niveaux. L'aspect collectif du travail, en développant la cohérence d'action via un outil commun permet de mieux gérer ces écueils, et les réussites, par les échanges et observations, mais il persistera toujours des points sensibles. Les attentes des enseignants sont fortes et même si nous pouvons tendre vers beaucoup plus d'efficacité et de réussite, il ne nous semble pas possible, de façon modeste, de pouvoir éradiquer toutes les difficultés.

Témoignages pour les CE2 :

Motivation :

« Les élèves sont motivés et attendent la séance avec impatience. Les bons élèves peuvent avancer à leur rythme sans qu'ils soient obligés d'attendre que tout le monde ait compris une nouvelle notion, une nouvelle stratégie, une nouvelle technique. Les élèves « moyens » sont boostés par l'aspect « compétitif ». Concernant les élèves en difficulté, la résolution de problèmes permet de cibler clairement les difficultés (Compréhension, technique opératoire, etc.) et donc de proposer une aide appropriée en classe ou durant les APC. »

Pratique de classe :

« Cette méthode oblige à revoir la pratique de classe. Nous travaillons avec des groupes de niveaux différenciés dans la classe, notamment en calcul, car tous n'ont pas la même avancée dans les apprentissages. La séance de résolution de problème est une opportunité pour découvrir une notion en duel ou en groupe restreint, ou de la consolider. Le temps est alors qualitatif. Lorsque une notion est abordée en classe, certains élèves la maîtrise déjà via la résolution de problèmes et nous pouvons ainsi développer un tutorat efficace. »

Le maître supplémentaire permet de donner du temps « qualitatif » à chacun, les uns après les autres pour découvrir ou approfondir une notion. Le tutorat par les pairs permet de transmettre le savoir reçu en plus de l'intervention de l'enseignant. La rapidité d'acquisition d'une notion est grandement accentuée.

Raisonnement et technique opératoire :

La technique opératoire de la division fut abordée entre la fin de la période 2 et le début de la période 3 (2014/2015) pour quelques élèves. Cet apprentissage s'est fait en duel et est hautement efficace contrairement à une séance avec le groupe classe. À mesure que les autres élèves ont progressé, les plus avancés ont aidé ponctuellement leurs condisciples sur la technique de la division et les problèmes de division avec supervision de l'enseignant. Lorsque la notion fut abordée de manière formelle pour tout le groupe classe, l'enseignant put alors se concentrer sur une seule partie de la classe tandis que l'autre, maîtrisant déjà la notion, put agir sous forme de tutorat. Actuellement (période 5), $\simeq$ 75 % des CE2 utilisent la technique de la division euclidienne avec un diviseur à 1, 2 ou 3 chiffres.

L'année précédente, la technique de la division n'a pu être abordée en classe, l'impact est donc nettement visible cette année. Plusieurs élèves s'essayent à la division décimale. (Ce fonctionnement développe la confiance des élèves dans leurs capacités, ainsi ils veulent se frotter à ce qu'ils estiment être difficile. La difficulté tombe alors très vite et la limite qu'ils veulent désormais atteindre se voit repousser, d'où des demandes concernant l'apprentissage de la division décimale, de la division de décimaux par des décimaux ou de la multiplication de décimaux. De manière triviale, un nombre important et croissant d'élèves exprime une « faim » de savoir et de maîtrise de concept plus poussés.

La co-intervention :

Nécessité d'être à 2 pour gérer les corrections, les explications et les demandes en temps réel des élèves. Le bilan en fin de séance est donc de toute importance pour cibler, noter et répondre aux demandes qui n'ont pu être traitées durant le créneau. Le bilan permet de verbaliser les demandes des élèves en termes de savoirs ou de savoir-faire. Nous pouvons alors axer notre action sur un travail notionnel ou méthodologique.

Inconvénients :

Certains élèves ne jouent pas le jeu totalement et n'avancent pas aussi vite qu'ils le pourraient ($\simeq$ 10 %). Certains élèves ne cherchent pas le sens du problème et essayent de manière systématique de plaquer la même technique opératoire pour tous les problèmes. Nous en revenons aux difficultés signalées concernant la compréhension lors de la lecture et de ce qui découle de ces informations. Le maître supplémentaire observe que si le problème est abordé oralement en duel, le taux d'erreur baisse très visiblement concernant le choix de l'opération et la compréhension globale. Le point faible, de manière redondante, est la lecture et la compréhension de ce qui est lu. Il est donc essentiel de travailler de manière approfondie sur la grammaire des problèmes et donc la recherche de termes, de verbes pour structurer l'énoncé avant de structurer sa démarche. Cette grammaire est un objet d'apprentissage.

Témoignages pour le CM2 :

Motivation :

Les élèves sont extrêmement motivés. Même les élèves en « extrême difficulté » progressent et sont motivés. Chacun se voit proposer un défi stimulant selon ses capacités à un moment donné. La séance résolution de problèmes est attendue avec enthousiasme par les élèves. Implication de tous les enfants dans le système des ceintures.

Compétitivité et émulation entre les élèves qui est productive car chacun veut atteindre le plus haut niveau de maîtrise. Les élèves voient là où ils se situent par rapport au reste de la classe et par rapport aux limites du projet. Ils ne sont pas perdus et sont conscients du chemin parcouru et du chemin à parcourir.

Raisonnement et technique opératoire :

Mise en avant du raisonnement lors de la modélisation d'un problème (ce qu'ils ne font pas systématiquement habituellement).

La technique opératoire est au service de la résolution de problèmes. Travail sur les opérations posées et sur les phrases réponses.

L'élève découvre ou redécouvre une notion non travaillée ou (re)travaillée dans l'année en cours, ce qui peut être déstabilisant pour lui mais qui, finalement se transforme en : *« la résolution de problèmes permet d'acquérir ou de revoir d'autres notions mathématiques. »*

Maîtrise de la langue :

Ils sont plus appliqués quant à la rédaction de leurs phrases réponses. Il y a couplage entre l'écriture lors de la rédaction de réponses et la lecture pour la compréhension de la situation. Il y a reprise des règles de grammaire et d'orthographe lors de la phase d'écriture. L'attention des élèves est accrue et portée sur le respect de ces aspects, car il n'y a pas de tolérance au moment de la correction.

Différenciation :

La possibilité pour chaque élève d'avancer à son rythme et de chercher ses limites. Les très bons élèves peuvent « enfin, pour une fois » avancer à leur rythme de manière autonome ce qui libère du temps pour soutenir ceux qui ont encore besoin d'aides ponctuelles. Un tutorat s'est installé naturellement entre élèves. Chaque élève peut avancer à son rythme

Le temps :

Celui consacré à la résolution de problèmes est bien respecté : une séance chaque semaine de 45 minutes à 1 heure. Les contraintes humaines font qu'il est impossible d'augmenter ce temps malgré l'envie des élèves et des enseignants.

Au cycle 3, pour des élèves de CM2 débutant le projet :

Le niveau 3 permet de bien comprendre l'utilisation de schémas. Le niveau 4 permet plus de travailler sur la compréhension de l'énoncé et la mise en place de stratégies pour résoudre le problème. Le niveau 3 comprend des problèmes de proportionnalité, de mesure de longueur ou de mesure d'aire qui sont en adéquation avec le programme de CM2 et qui font intervenir les 4 opérations. Le niveau 4 correspond plus au programme CM2 en incluant les nombres décimaux.

Inconvénients :

Le fait d'intervenir à deux est me semble-t-il indispensable. Dans le cas contraire il y aurait trop d'attente pour certains élèves. Être deux par classe permet de pouvoir aider plus d'élèves à avancer. Ajouter des fractions sur le niveau 2. **(Mais présence forte au niveau 3).** Le niveau 2 (niveau 4 actuel) est plus adapté au CM2, car il demande une certaine réflexion pour choisir le schéma et la stratégie de résolution. C'est pourquoi en CM2, les élèves doivent déjà avoir pris connaissance du niveau 1. **(Ce qui va être le cas dès l'année 2015/2016.)**

Il faut se dire qu'en ZEP, en CM2, tous les élèves n'arriveront pas à adopter les stratégies nécessaires pour la résolution du niveau 2, il sera sans doute indispensable de mettre en place un groupe d'aide en classe qui travaillera avec un adulte car certains ont encore besoin en CM2 de manipulation ou théâtralisation pour vraiment comprendre l'énoncé (travail de lecture) et à trois adultes, on pourrait mettre en place un atelier de manipulation pour mieux comprendre (dans nos rêves !) car même avec un petit effectif, on court pour voir un maximum de monde, mais il serait bon de se poser davantage avec ceux qui sont en difficulté.

Les CM2 2014/2015 débutent le projet (première année pour eux) hors les CM2 2015/2016 ont débuté au CE2 (ils débuteront leur 3e année au CM2). Ils n'ont donc pas le même avancement dans le projet et ont largement dépassé le stade de la découverte. Les difficultés et priorités risquent donc de ne pas être les mêmes. Une nouvelle analyse sera donc effectuée durant l'année 2015/2016.

Beaucoup aiment la compétition mais les plus faibles n'apprécient pas forcément de voir leur étiquette prénom sur les premières ceintures. On place certains élèves face à leur difficulté ce qui peut avoir pour effet une sur-motivation ou l'effet inverse une démotivation. L'analyse de l'avancement des élèves dans le passage des ceintures ne montre pas d'essoufflement significatif du rythme. Néanmoins les enseignants jouent excellemment leur rôle car malgré le risque de « démotivation », aucun élève ne lâche prise. L'encouragement, l'accompagnement, le soutien en gardant une exigence importante de bout en bout stimule l'élève dans les efforts qu'il produit pour construire sa réussite. Les ceintures sont une proposition, les enseignants décident de leur utilisation ou non.

Impacts sur la pratique de classe :

Je m'appuie sur les niveaux et difficultés des élèves pour les APC. Cela permet de voir précisément là où les élèves bloquent (Maîtrise de la langue et mathématiques) et les notions sur lesquelles il est bon de revenir en groupe classe

Conclusion de Marie :

« En clair, pour moi, même le négatif se transforme en positif. Il n'y a que des avantages à travailler la résolution de problèmes avec une mise en place d'un travail commun sur tout le cycle et l'aide supplémentaire du maître plus. Pas de retour en arrière possible !!!!!!!! »

Paroles d'élèves :

Émilie : *Je ne m'aide plus des schémas sauf pour la proportionnalité. Je confonds parfois les compositions et les compositions de transformations.*

Lina : *Ça m'aide, car je confonds parfois addition et soustraction. C'est plus clair avec un schéma.*

Nour : *J'aime beaucoup les schémas, car j'en ai encore besoin. Surtout pour la proportionnalité, c'est plus simple à comprendre.*

Adam : *Je n'ai plus besoin des schémas sauf pour la proportionnalité.*

Feryel : *C'est trop bien ! J'adore le niveau 3.*

Sébastien : *Le problème 5 du chapitre 11 du niveau 2 était très dur. J'ai passé 4 séances pour le résoudre. Le niveau 2 est quand même très cool, c'est mon préféré.*

Dillan : *Je suis super motivé. J'utilisais les schémas au début et plus maintenant, je comprends beaucoup mieux. J'ai adoré me creuser la tête surtout au niveau 3.*

Enzo : *J'y arrive beaucoup mieux avec les schémas, je comprends mieux, surtout la proportionnalité.*

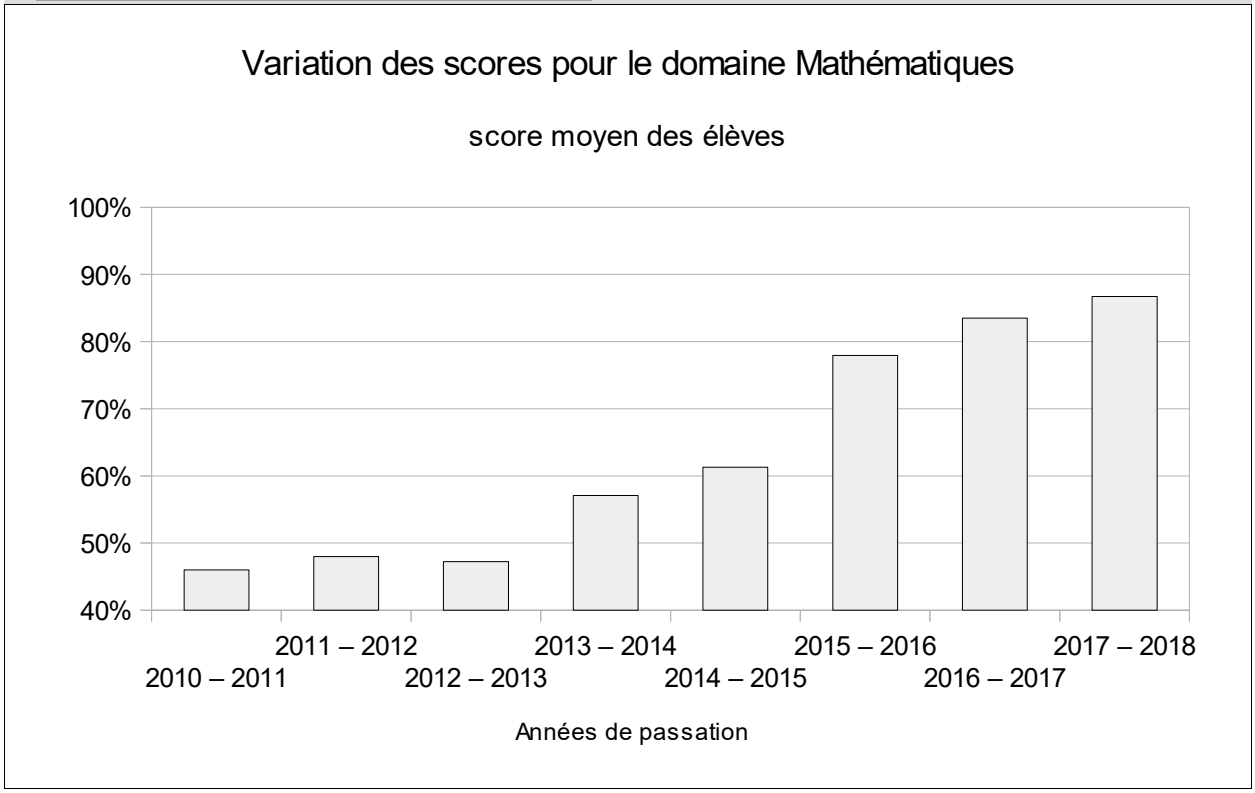
Rayan : *Au début je n'y arrivais pas mais après on s'améliore et on y arrive quand même.*

Encore une fois il ressort que la proportionnalité, de manière générale, est le point qui pose encore des difficultés aux élèves.

Date	Informations / documents à transmettre / notes à coller	Signature parents / enseignants
2/12	Bonjour,	
	Thibault a sauté chez le docteur ce jour. (Il n'a pas de fièvre) Il a souhaité venir à l'école car d'après ses dires "c'est important il y a des problèmes de mathématiques". Si toutefois vous estimez qu'il a besoin de rentrer n'hésitez pas à me contacter 0662503686, je prendrai le récupérer. Pour le RI, je vous le remettrai jeudi matin ~~signés~~ car nous n'avons pas eu le temps de le lire. Merci de votre compréhension	

10 -1 Résultats des élèves aux évaluations départementales et nationales CP

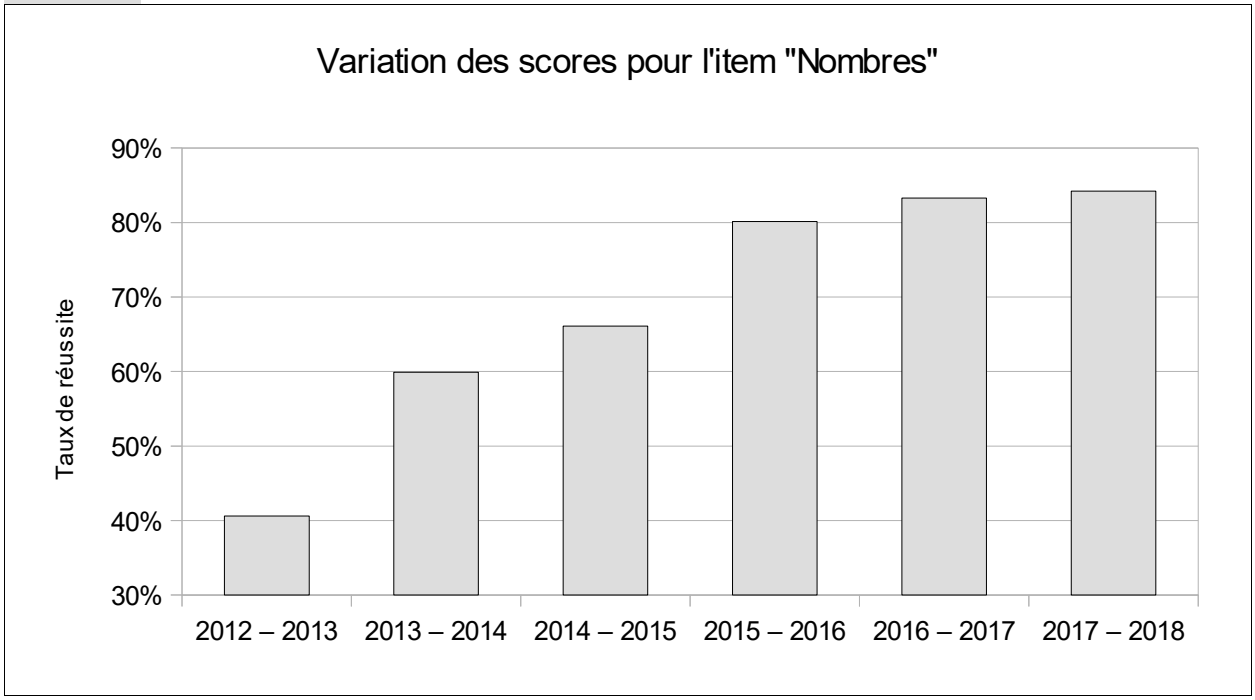
Évaluations CP de milieu d'année :



L'école continue à évaluer ses élèves en utilisant les évaluations départementales CP. C'est un choix d'équipe et même si nous pouvons être critique vis-à-vis de certains items ou de certaines formulations, nous les utilisons pour avoir à un moment donné, un panorama de ce que savent faire nos élèves et de ce qui est encore problématique. Ces évaluations ont le mérite de permettre un suivi des élèves et de voir si nos pratiques ont un impact sur eux et dans quelle mesure. Nous en faisons un outil pour l'équipe et nous analysons les résultats pour voir ce qui peut être amélioré, modifié ou rester inchangé. Ce n'est pas le seul outil d'analyse, c'en est un parmi d'autres avec ses qualités et défauts.

Il y a d'un côté la recherche du « faire mieux » pour les élèves et celle de ne pas « faire mal » pour la suite de leur parcours. Tout en émettant, quand nous le jugeons nécessaire, des critiques sur les items proposés

Nombres : Item de numération. Passage de 40 % de réussite en 2012-2013 à 83 % en 2016-2017



En plus de travailler de manière approfondie la résolution de problèmes, quelques changements ont eu lieu concernant la construction du nombre mais l'essentiel des pratiques se retrouve ci-dessous.

– Ralentir la découverte des nombres en restant beaucoup plus longtemps sur la construction des petits nombres. Les 2 premières périodes de CP ne sont pas de trop pour se focaliser sur la construction des nombres inférieurs à 20 en décomposant et recomposant avec toutes les opérations.

– Aborder parallèlement les opérations pour calculer et construire les nombres et non pas séquentiellement. Additionner et soustraire, multiplier et diviser (notamment les doubles et moitiés) de manière ritualisée.

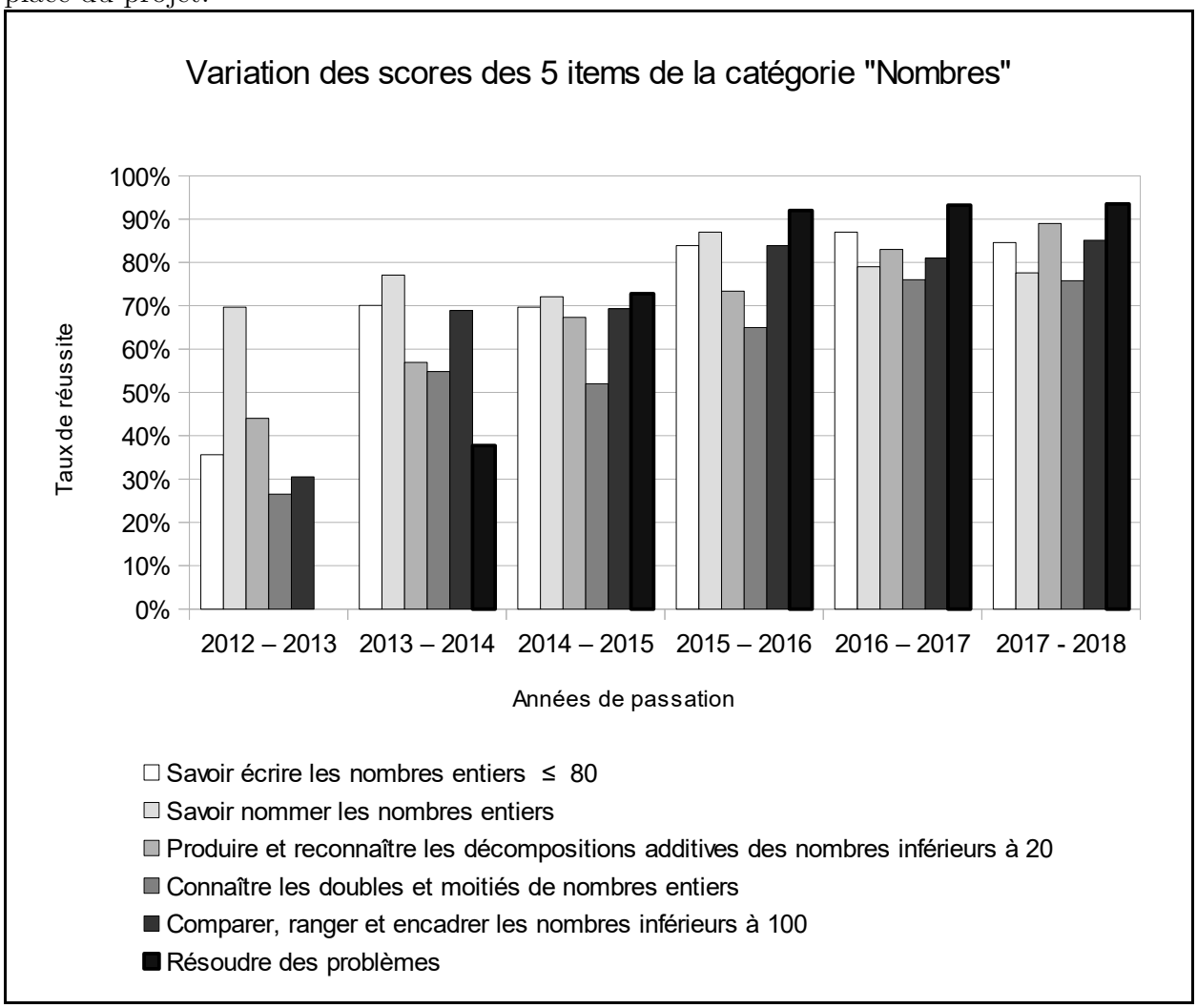
– Le matériel comme le château des nombres qui fait travailler le +1, -1, +10, -10 de manière régulière à la place des files numériques.

– Résoudre des problèmes qui mobilisent les connaissances et procédures pour concrétiser encore plus les apprentissages des élèves.

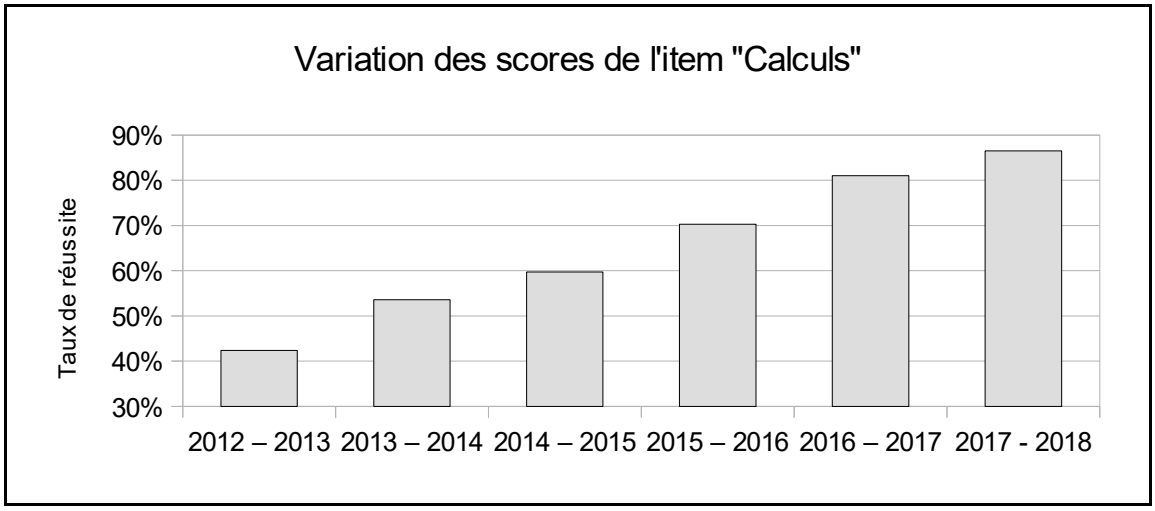
-Verbaliser la manipulation, dire comment je fais pour composer, décomposer, calculer en ajoutant, en ôtant, en partageant. Manipuler mentalement des objets physiques pour expliciter les procédures et apprendre aux élèves comment le faire. Ne pas penser que la manipulation se suffit à elle-même, c'est une tâche mentale avant tout.

Détail des 5 items du domaine « Nombre » :

On remarquera l'homogénéité des résultats, environ 80 %, dans tous les sous-domaines et la performance dans le sous-domaine « résolution de problèmes » depuis la mise en place du projet.

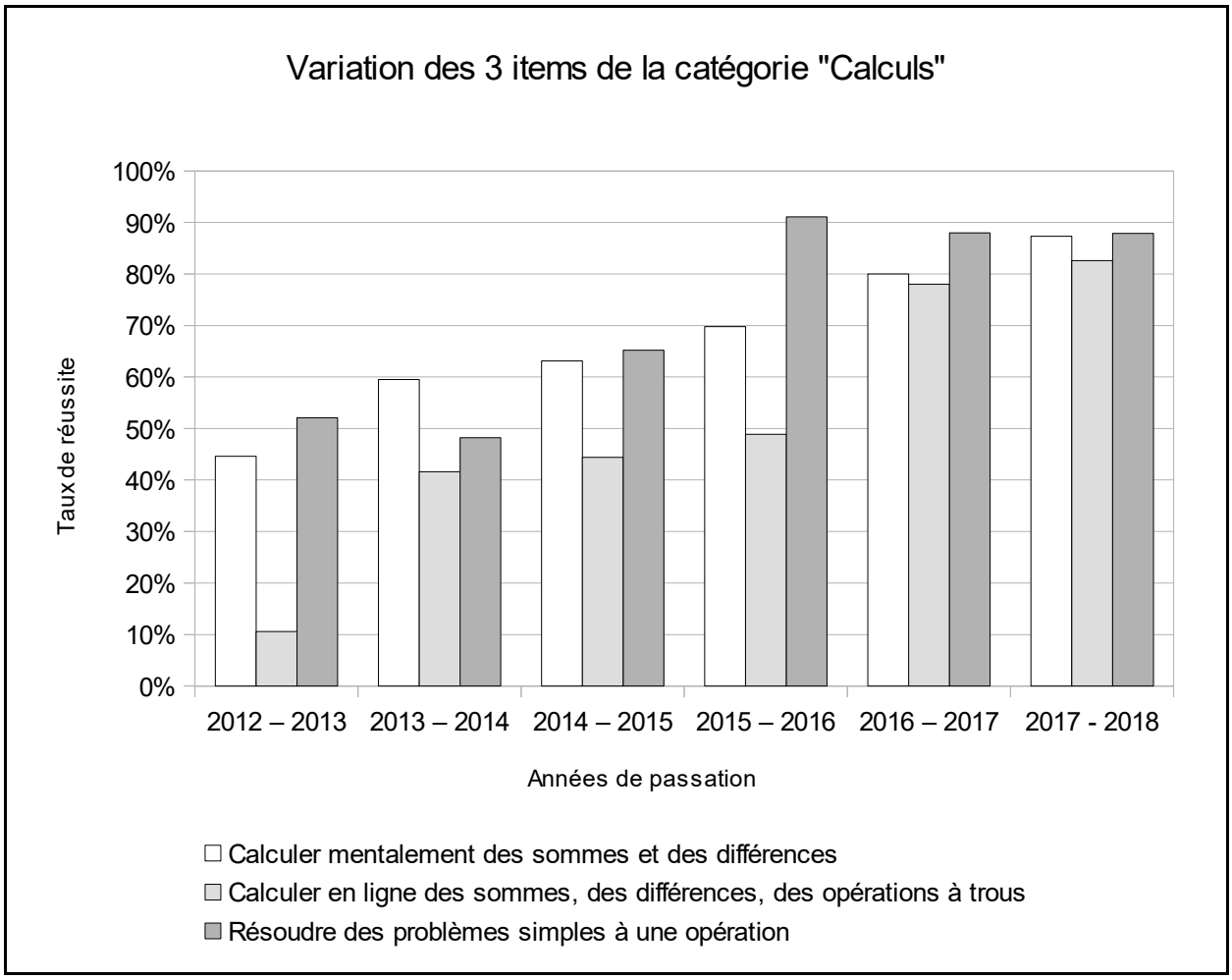


Calcul : Item de calcul. Passage de 43 % en 2012-2013 à 87 % en 2017-2018.



Détail des 3 items du domaine « Calculs » :

On remarquera là aussi l'homogénéité croissante des résultats, ≃ 80 %, dans tous les sous-domaines et la performance, encore, dans le sous-domaine « résolution de problèmes » qui reste supérieure à 85%. Ce score se maintient pour la troisième année consécutive indépendamment des cohortes d'élèves et des changements dans l'équipe. Il semble probable que le fonctionnement en lui-même garantisse cette réussite.

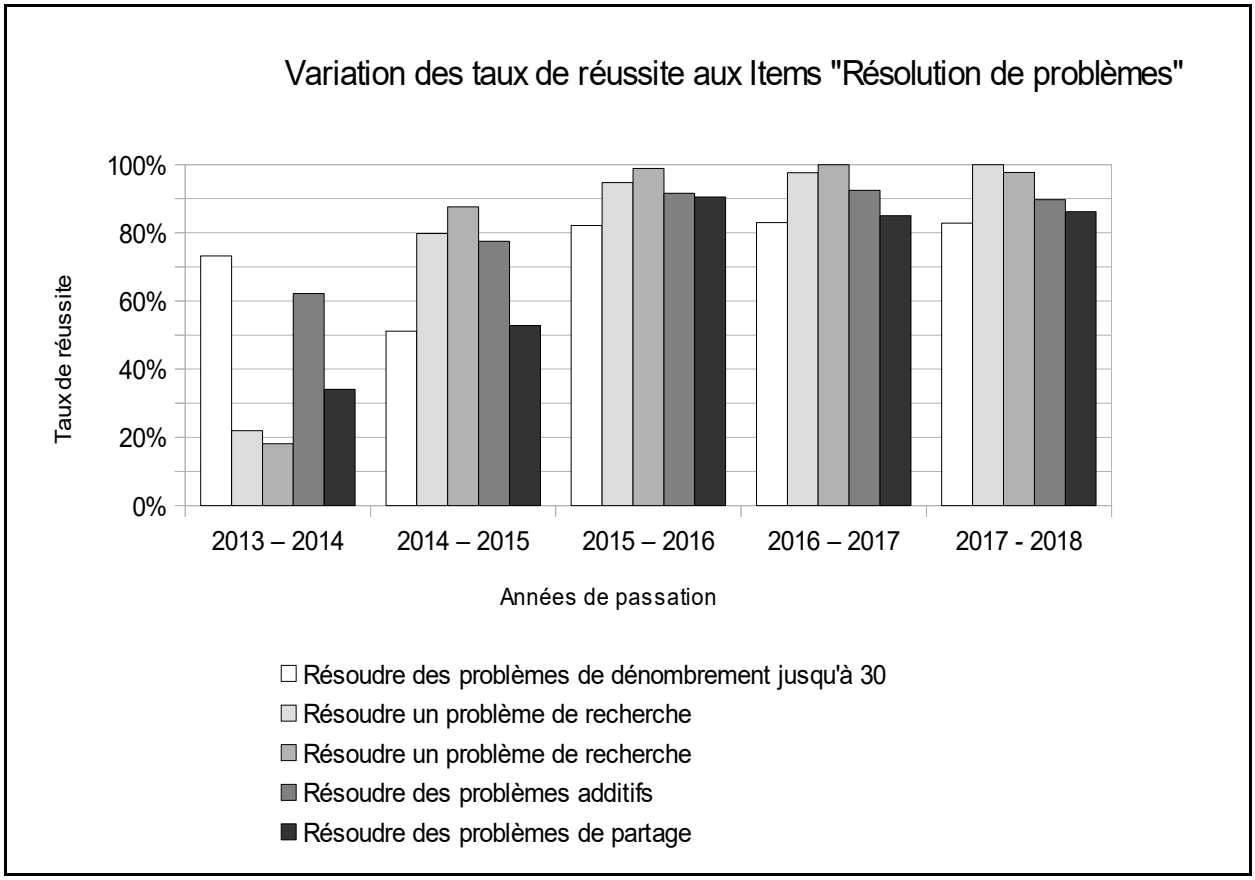


Résolution de problèmes :

Projet élaboré avec les enseignants et le PDM (fin 2012 – 2013) et utilisé depuis 2013-2014 (Manipulation, Modélisation, Abstraction) et pratiqué en co-enseignement avec les enseignants de CP. Apprentissage de la catégorisation et des stratégies de résolution. Les fichiers sont renouvelés chaque année progressivement jusqu'à atteindre le format actuel qui fait travailler toutes les opérations progressivement.

Sont abordés dans le fichier : les problèmes additifs, soustractifs et multiplicatifs (dont division partition très précocement.). Est travaillé : Lecture, compréhension, numération, calcul, structuration d'une situation (modélisation / représentation) et rédaction de phrases de réponse.

Détail des 5 items concernés par la Résolution de problèmes.

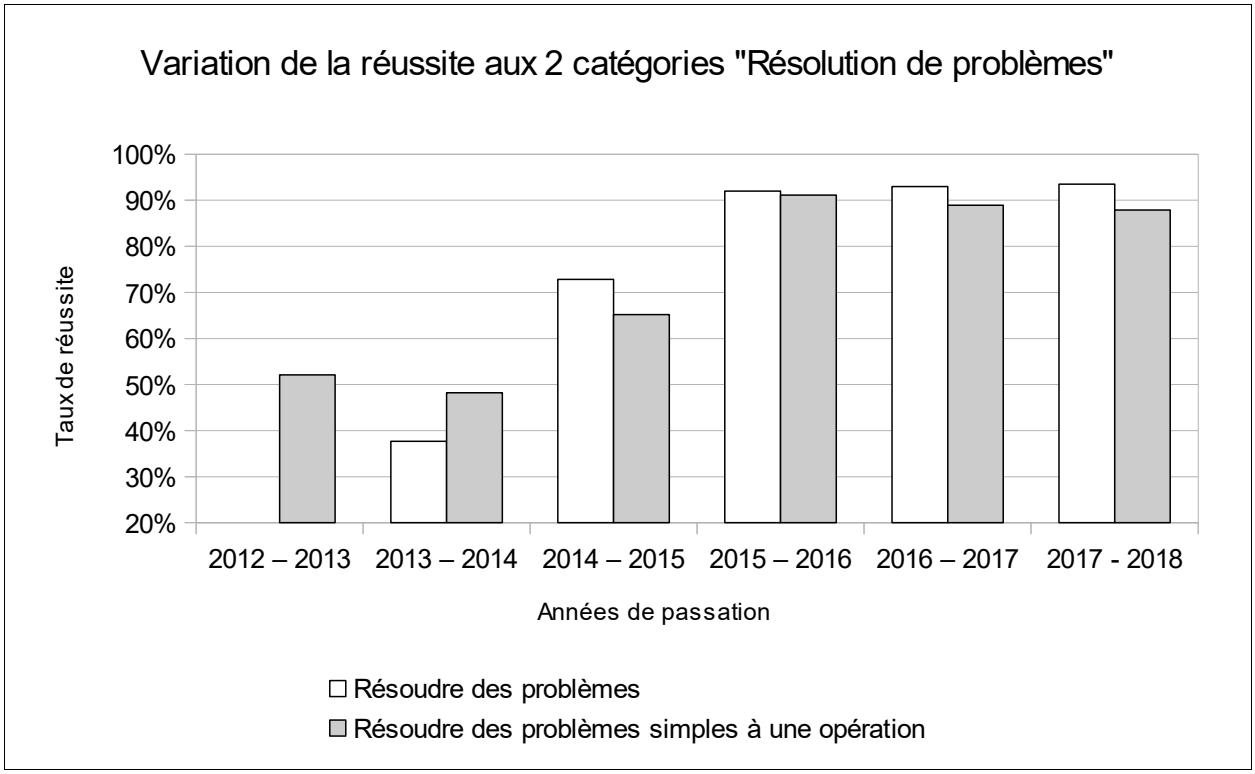


La réussite dans les items « Problèmes de recherche » semble corrélée à la performance dans les items « classiques ». Transfert ? Attitude vis-à-vis de la difficulté ? De la recherche ?

Note de l'auteur : Il semble que pour les CP, un problème arithmétique et un problème de « recherche » représentent la même activité. C'est en quelque sorte l'inconscience du débutant sur ce qu'il a devant lui. Et ça ne l'empêche en rien de réussir, car cette activité lui semble très familière. Il semble donc que l'élève n'est pas assez expert pour différencier les 2 activités et s'engage dans les deux de manière identique.

Résoudre des problèmes : Items 13, 14 et 15 (dénombrement et recherche)

Résoudre des problèmes simples à une opération : Items 24 et 25 (additifs et partage) Dans la version 2017-2018, le problème de partage disparaît et est remplacé par un problème additif. Il n'y a pas de variation des scores chez nos élèves.



Répartition des élèves : Taux de réussite pour la cohorte 2016 – 2017

Déciles	0 à 10 %	10 % à 20 %	20 % à 30 %	30 % à 40 %	40 % à 50 %	50 % à 60 %	60 % à 70 %	70 % à 80 %	80 % à 90 %	90 % à 100 %
	0%	**0%**	**2%**	**4%**	**2%**	**4%**	**10%**	**5%**	**20%**	**53%**

Quartiles	0 à 33 %	33 % à 50 %	50 % à 66 %	66 % à 100 %
	2%	**7%**	**10%**	**81%**

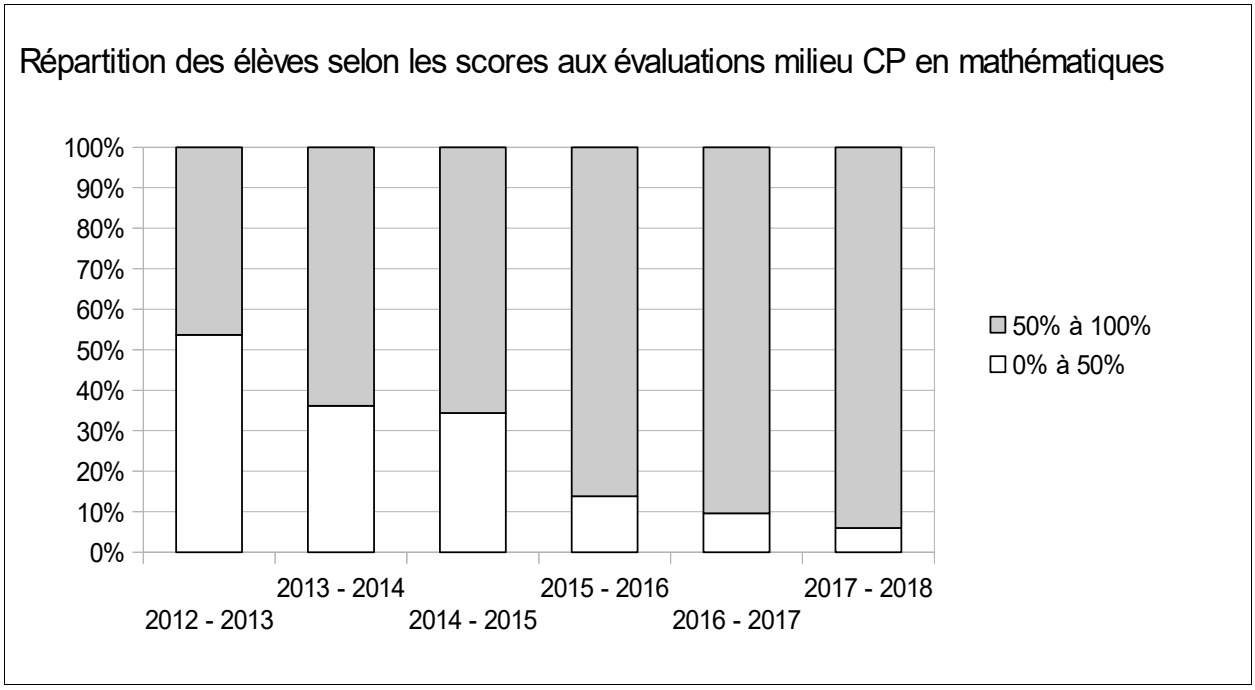
	0 à 50 %	50 % à 100 %
	9%	**91%**

Répartition des élèves : Taux de réussite pour la cohorte 2017 – 2018

Déciles	0 à 10 %	10 % à 20 %	20 % à 30 %	30 % à 40 %	40 % à 50 %	50 % à 60 %	60 % à 70 %	70 % à 80 %	80 % à 90 %	90 % à 100 %
	0%	**0%**	**0%**	**3%**	**2%**	**8%**	**8%**	**7%**	**10%**	**62%**

Quartiles	0 à 33 %	33 % à 50 %	50 % à 66 %	66 % à 100 %
	2%	**3%**	**10%**	**85%**

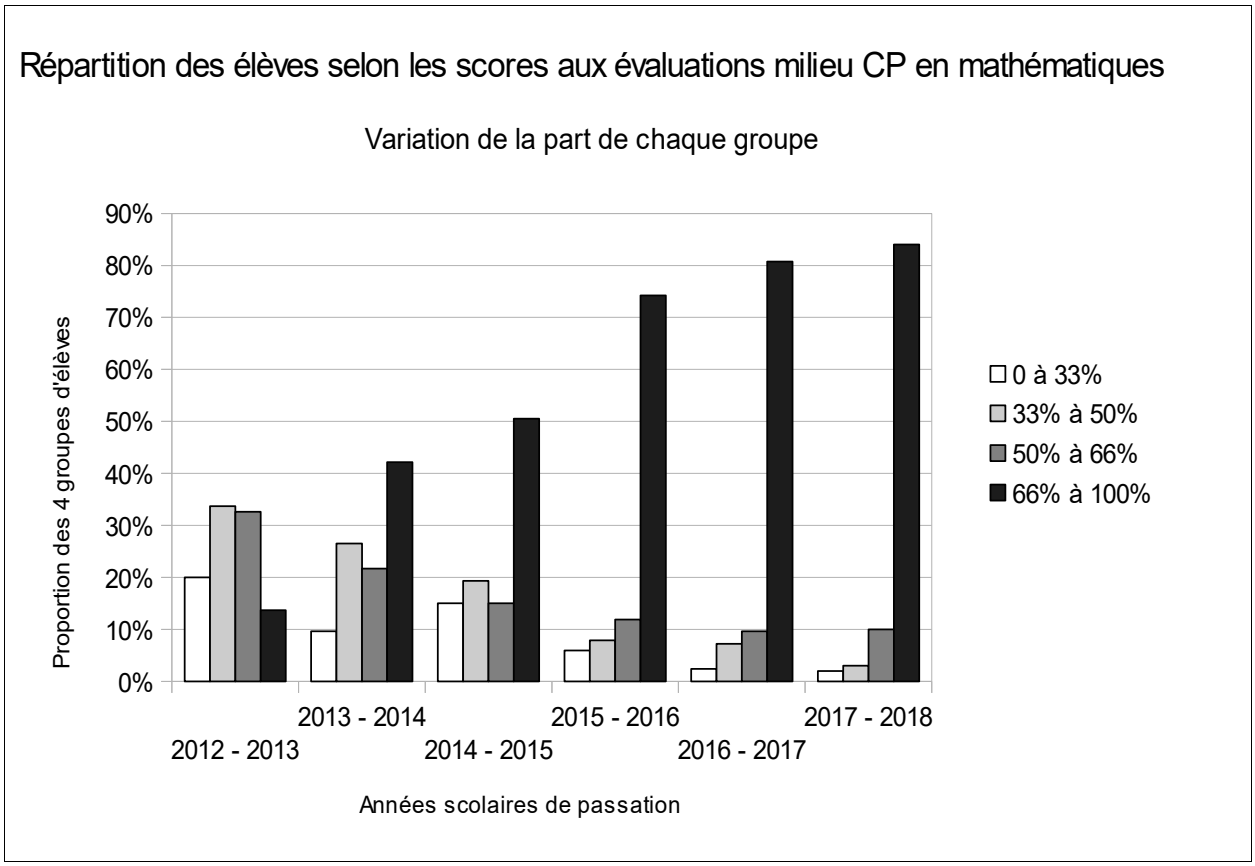
	0 à 50 %	50 % à 100 %
	5%	**95%**



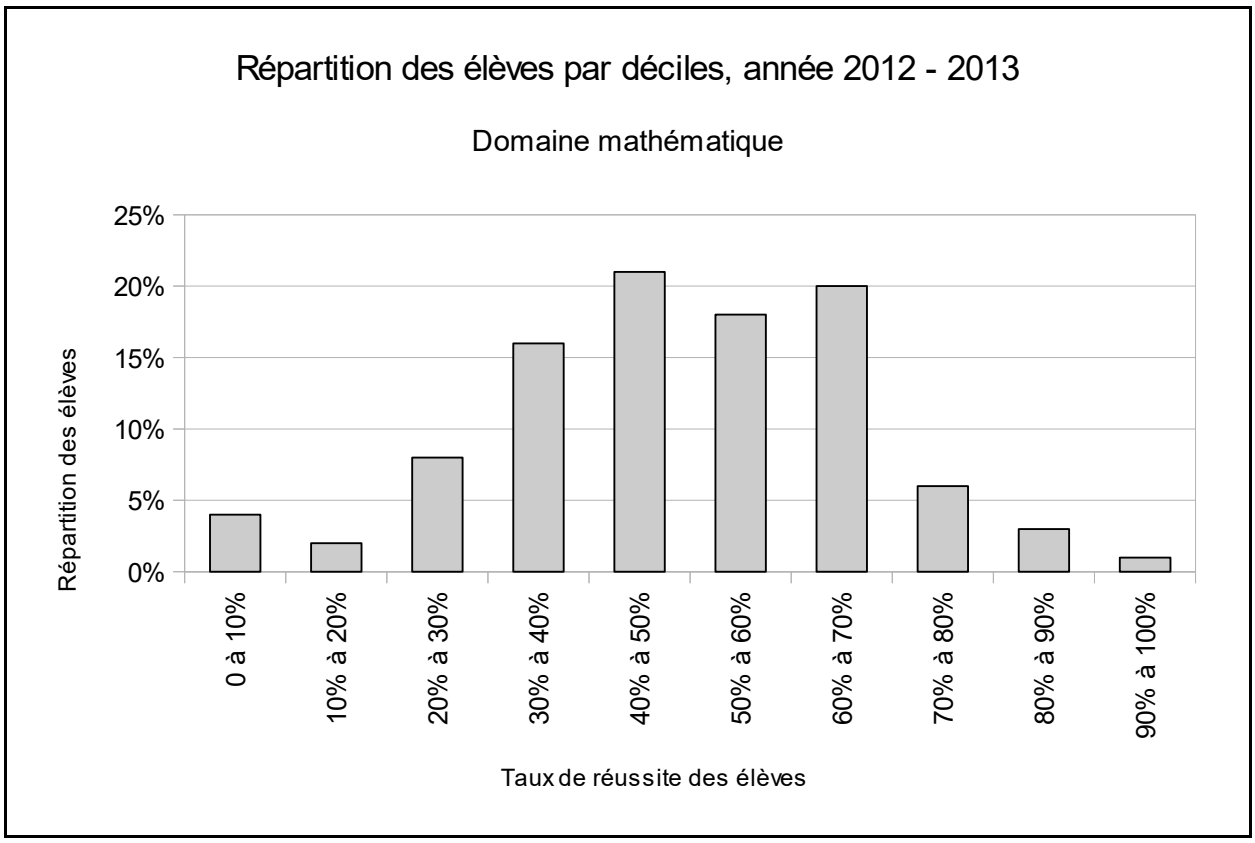
Le changement des pratiques pédagogiques dans le domaine « mathématiques » se traduit par une baisse constante du nombre d'élèves en grande difficulté par rapport aux années précédentes. Il y a moins d'élèves avec des difficultés et ces élèves sont globalement moins en difficulté que les années précédentes. La difficulté scolaire est tout de même présente.

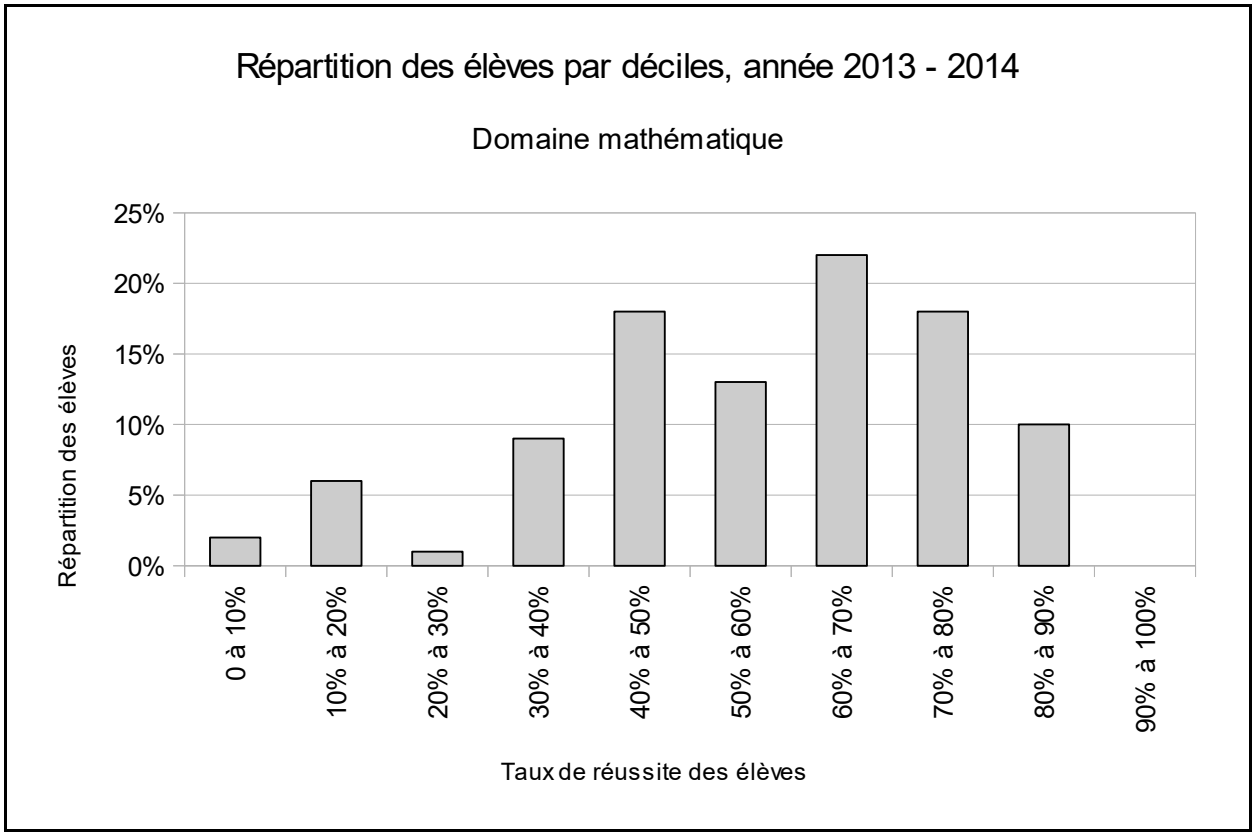
La pratique de classe quotidienne de l'enseignant à limité fortement le nombre d'élèves en situation d'échec, la réussite concerne aussi tous les élèves indépendamment du niveau initial. 1 élève sur 4 a 100% de réussite à l'évaluation départementale de mathématiques, ce qui pour une école REP est non négligeable. Les élèves dont les difficultés sont « résistantes » pourront bénéficier de l'aide du Poste E qui de fait, peut accorder plus de temps à ces élèves qui ont de « bons profils » pour cette aide.

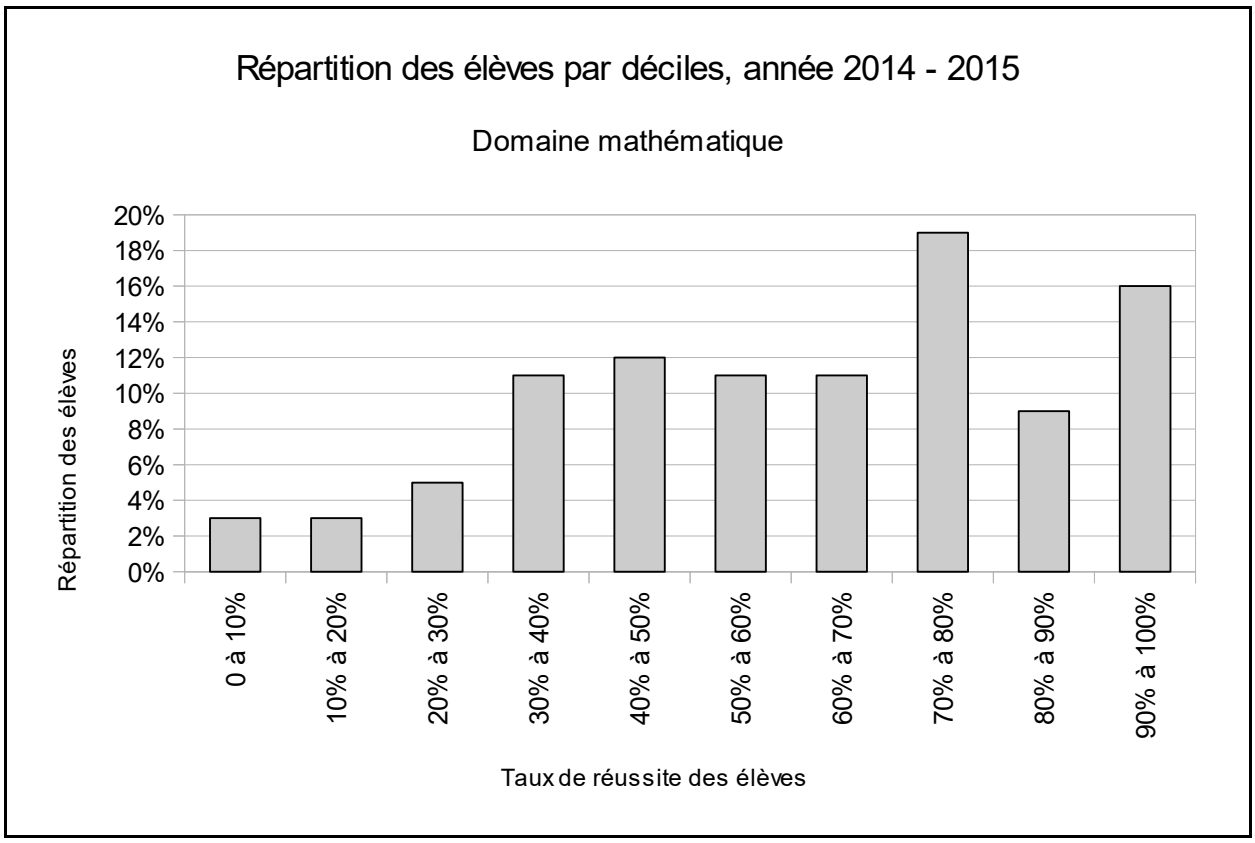
Pour l'année 2016 – 2017, 9 % des élèves sont sous le seuil des 50 % de réussite. Cette restriction de la difficulté offre de fait un temps plus important à ces élèves pour une remédiation. Ils ne sont plus que 6% en 2017 – 2018. Malgré tout, il existe encore des élèves qui auront des difficultés persistantes et nous n'avons pas de solutions efficaces à 100%. C'est-à-dire que le 100% de réussite est illusoire, nous avons pu aider nos élèves à améliorer leurs résultats, et c'est déjà une victoire, mais nous ne pouvons pas tout. L'effet enseignant existe mais beaucoup d'autres facteurs externes entrent en ligne de compte et ils ne sont pas du ressort de l'enseignant.

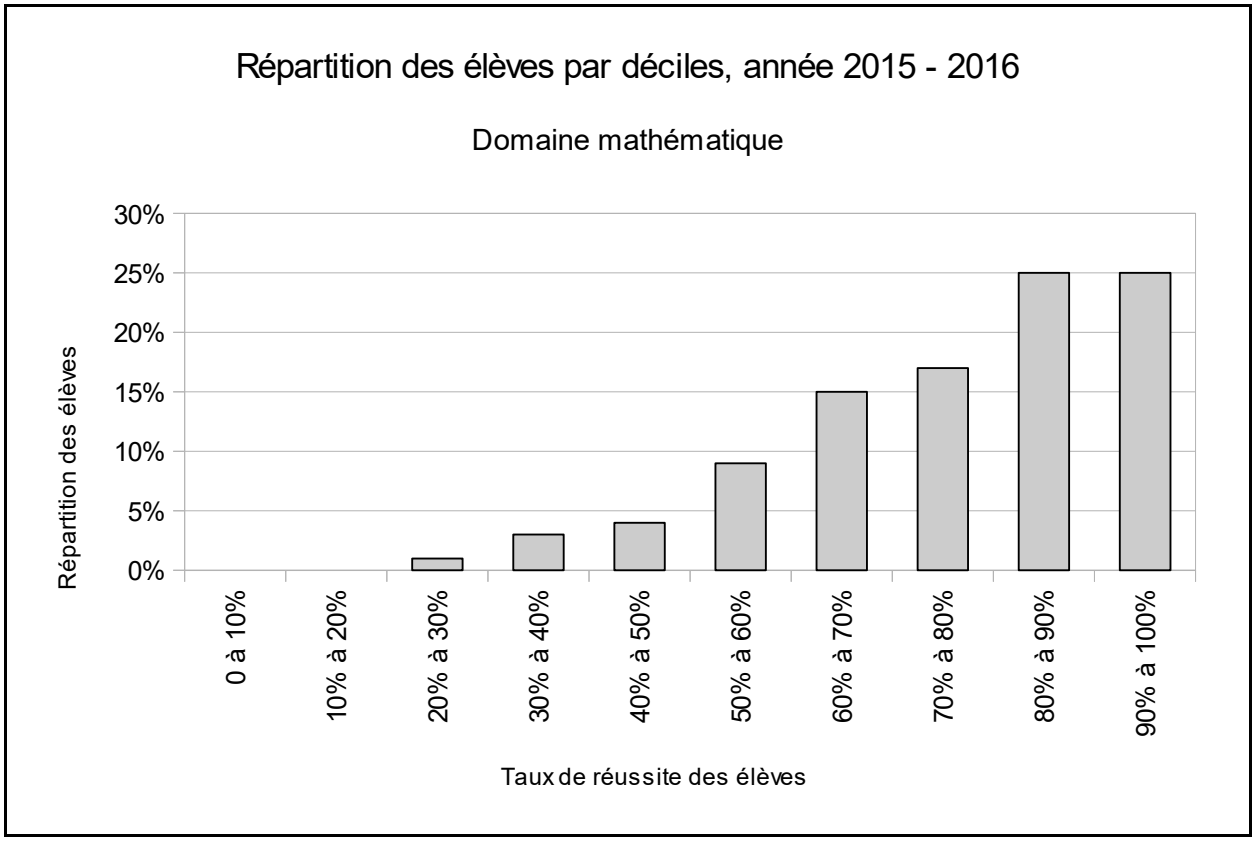


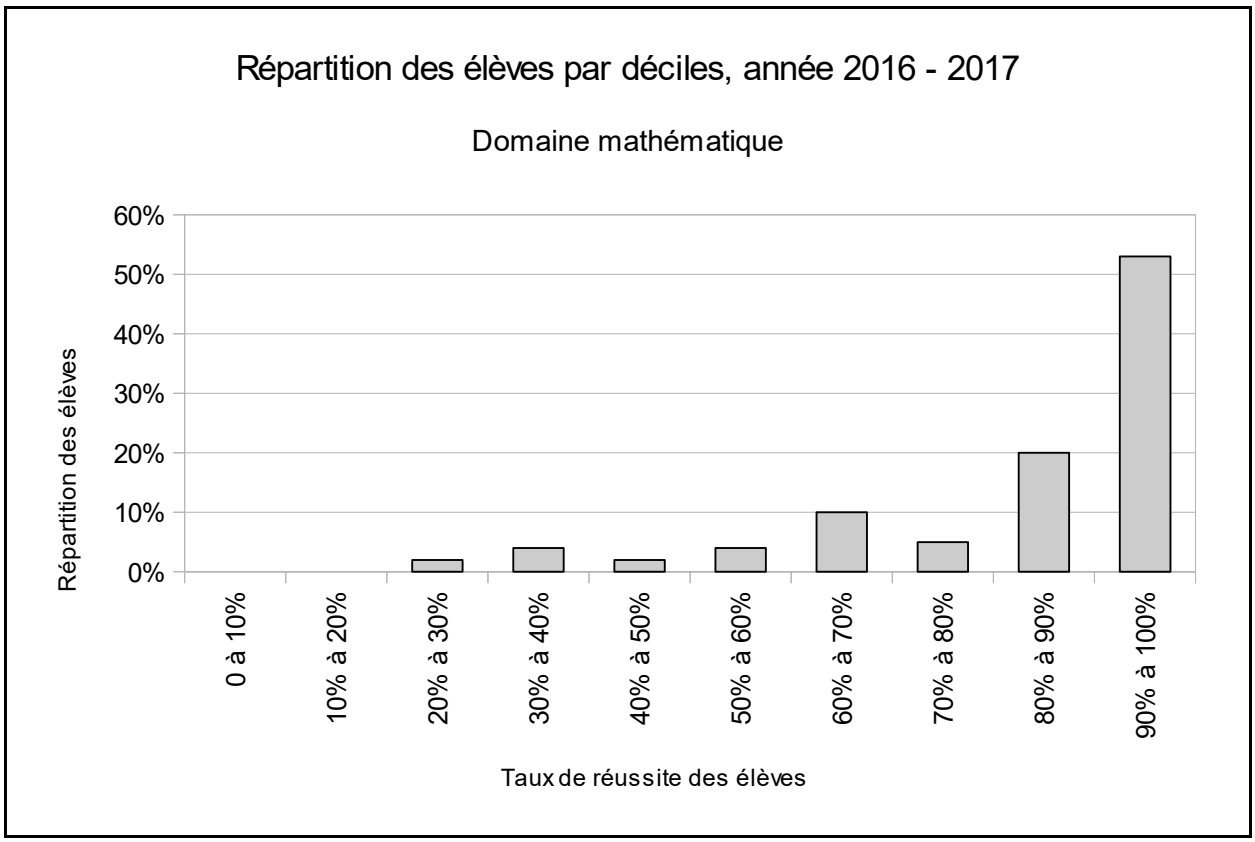
Nous présentons ensuite les répartitions des élèves par tranche de 10% de réussite, afin de voir l'évolution des cohortes au fil des années. Nous pouvons ainsi voir progressivement si les pratiques des enseignants dans les classes ont des impacts sur les scores des élèves. Et s'il y a impact, celui-ci est-il immédiat ? Ou faut-il un temps de latence pour voir les effets ?

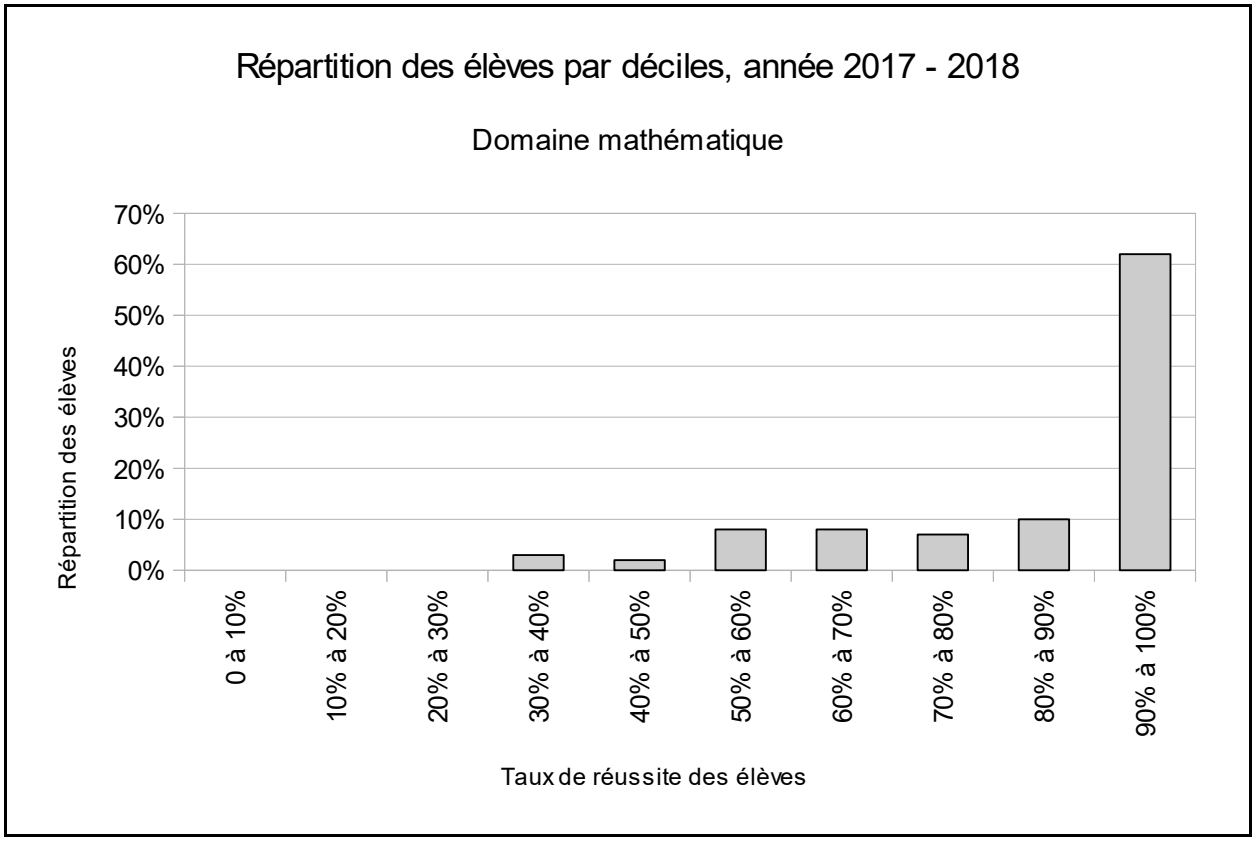

Répartition des élèves par déciles, année 2012 - 2013
Domaine mathématique
25%
20%
15%
10%
5%
0%
Répartition des élèves
0 à 10%
10% à 20%
20% à 30%
30% à 40%
40% à 50%
50% à 60%
60% à 70%
70% à 80%
80% à 90%
90% à 100%
Taux de réussite des élèves


Répartition des élèves par déciles, année 2013 - 2014
Domaine mathématique
25%
20%
15%
10%
5%
0%
Répartition des élèves
0 à 10%
10% à 20%
20% à 30%
30% à 40%
40% à 50%
50% à 60%
60% à 70%
70% à 80%
80% à 90%
90% à 100%
Taux de réussite des élèves


Répartition des élèves par déciles, année 2014 - 2015
Domaine mathématique
Répartition des élèves
20%
18%
16%
14%
12%
10%
8%
6%
4%
2%
0%
0 à 10%
10% à 20%
20% à 30%
30% à 40%
40% à 50%
50% à 60%
60% à 70%
70% à 80%
80% à 90%
90% à 100%
Taux de réussite des élèves


Répartition des élèves par déciles, année 2015 - 2016
Domaine mathématique
Répartition des élèves
30%
25%
20%
15%
10%
5%
0%
0 à 10%
10% à 20%
20% à 30%
30% à 40%
40% à 50%
50% à 60%
60% à 70%
70% à 80%
80% à 90%
90% à 100%
Taux de réussite des élèves


Répartition des élèves par déciles, année 2016 - 2017
Domaine mathématique
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
Répartition des élèves
0 à 10%
10% à 20%
20% à 30%
30% à 40%
40% à 50%
50% à 60%
60% à 70%
70% à 80%
80% à 90%
90% à 100%
Taux de réussite des élèves


Répartition des élèves par déciles, année 2017 - 2018
Domaine mathématique
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
Répartition des élèves
0 à 10%
10% à 20%
20% à 30%
30% à 40%
40% à 50%
50% à 60%
60% à 70%
70% à 80%
80% à 90%
90% à 100%
Taux de réussite des élèves

Durant l'année scolaire 2018/2019, les élèves de CP ont été évalués dans divers domaines des mathématiques lors des évaluations nationales. Nos élèves ont participé à ces évaluations mais avant de présenter le détail des résultats, revenons sur le contexte scolaire :

– Avant 2018/2019 : Les classes de CP sont toujours occupées par des enseignants expérimentés. Ils sont expérimentés sur le niveau de classe ou expérimentés du point de vue de l'ancienneté (ou les deux). Un maître supplémentaire est présent sur l'école et particulièrement en CP. Un poste E intervient également.

– 2018/2019 : Les classes de CP sont dédoublées. Il y a un total de 10 classes (administrativement) groupées en 5 classes (géographiquement).

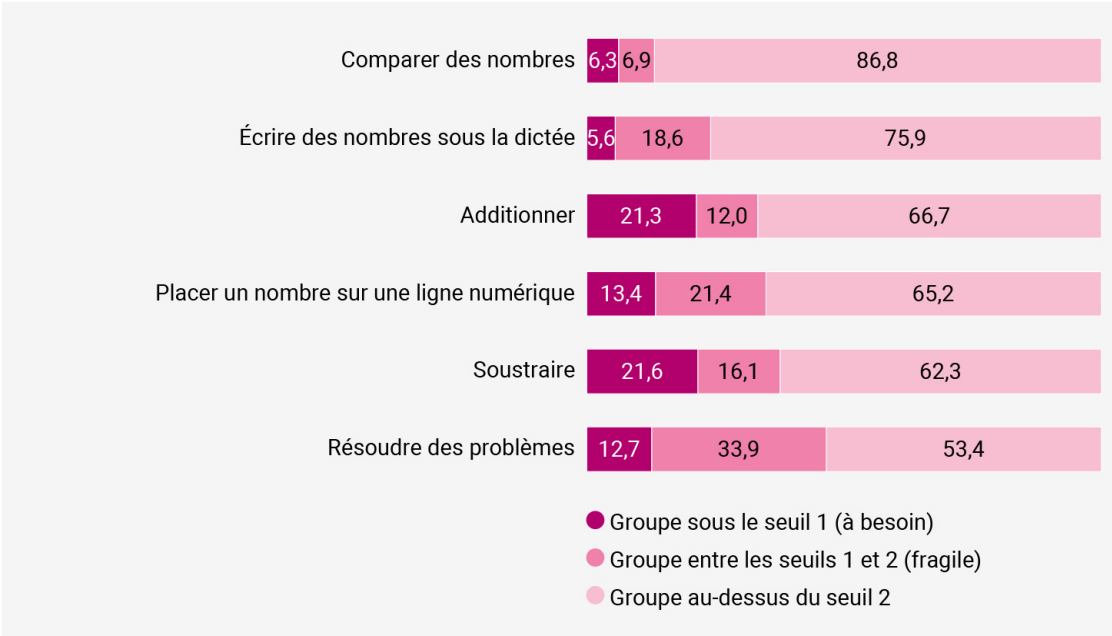
2 classes avec des enseignants expérimentés (soit 4 enseignants) sur le niveau de classe dont l'ancien PDM.

3 classes avec des enseignants novices (soit 6 enseignants) sur le niveau **et** dans la carrière (pas plus de 3 ans) et donc arrivant dans un contexte d'école particulier.

Il n'y a plus de PDM. Le poste E n'intervient plus dans ce dispositif.

Résultats nationaux :

▶ 2 Répartition des élèves dans les groupes selon le domaine évalué en mathématiques à mi-CP (en %)

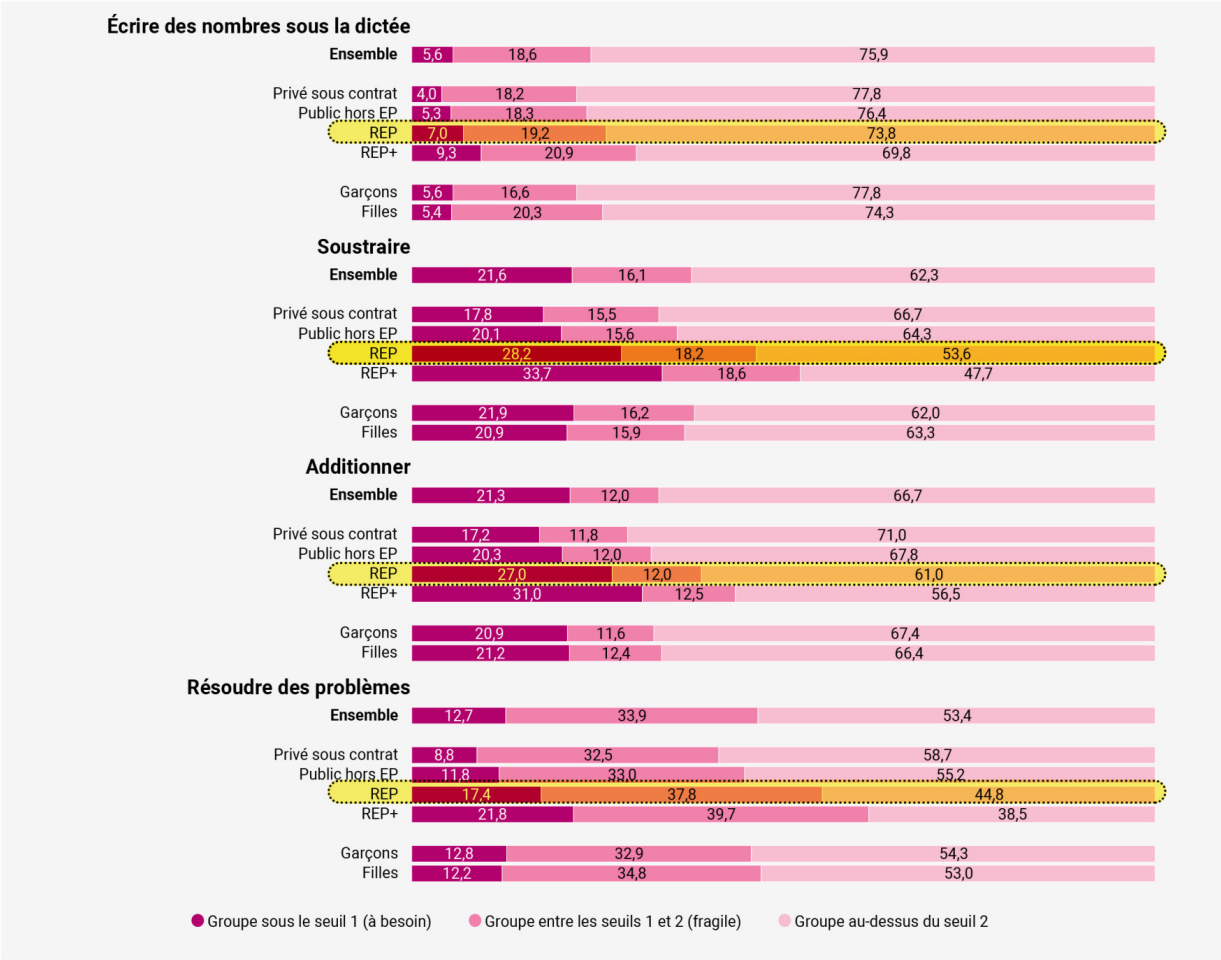


Lecture : à mi-CP, 6,9 % des élèves présentent des acquis fragiles dans le domaine « Comparer des nombres ».
Champ : France métropolitaine + DOM, Polynésie française et Saint-Pierre-et-Miquelon, public + privé sous contrat.
Source : MENJ-DEPP, Point d'étape CP.

Réf. : *Note d'Information,* n° 19.15. © DEPP

Nous nous intéressons plus particulièrement aux résultats des élèves dans un contexte similaire, l'éducation prioritaire :

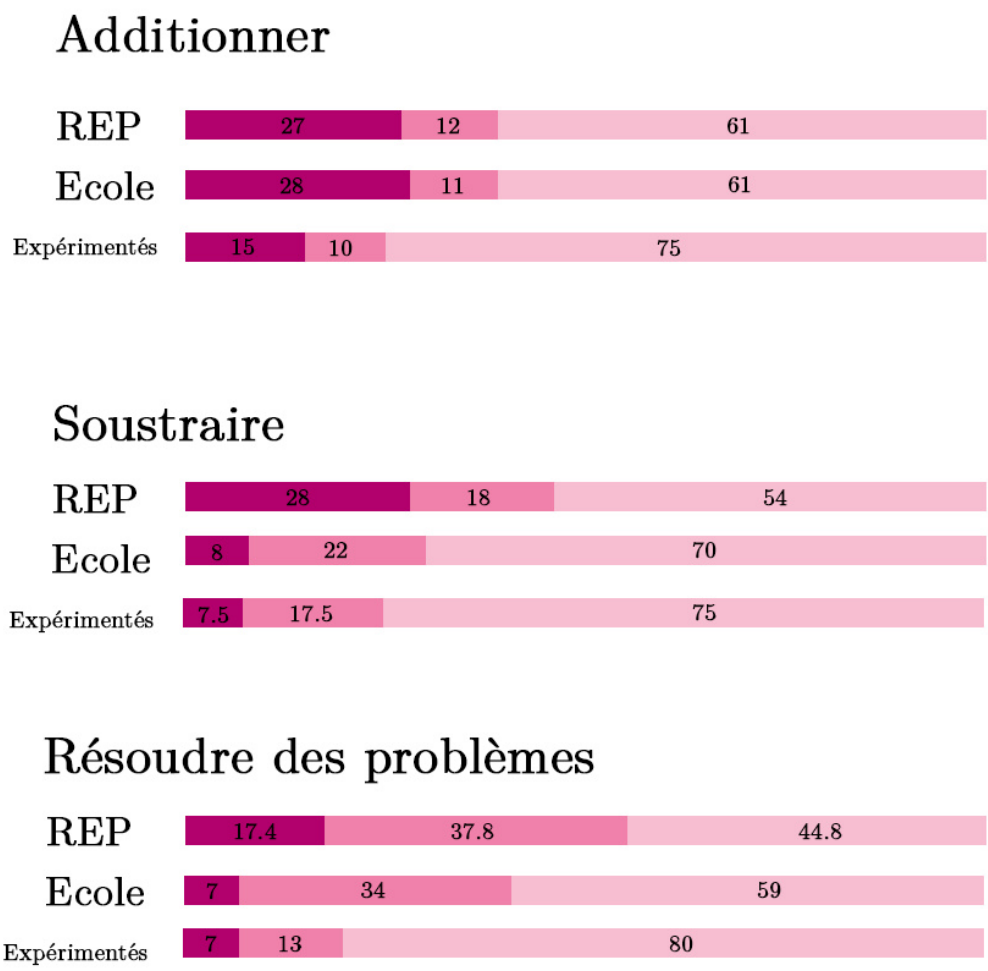
4 Répartition des élèves dans les groupes dans quatre domaines évalués en mathématiques à mi-CP selon le sexe de l'élève et le secteur (en %)



Lecture : à mi-CP, 39,7 % des élèves de REP+ présentent des acquis fragiles dans le domaine « Résoudre des problèmes ».
Champ : France métropolitaine + DOM, Polynésie française et Saint-Pierre-et-Miquelon, public + privé sous contrat.
Source : MENJ-DEPP, Point d'étape CP.

Nous ne nous attarderons pas sur l'écriture des nombres sous la dictée et nous nous focaliserons sur les domaines « addition », « soustraction » et « résoudre des problèmes » car ils sont très liés. Comme indiqué plus avant, le contexte actuel de l'école est nouveau cette année avec un changement d'organisation des classes de CP avec les dédoublements, la disparition du PDM, l'arrivée de nouveaux collègues. Les plus anciens sont dans la continuité du projet alors que les nouveaux arrivants sont dans la découverte et l'appropriation d'un fonctionnement et de ses outils.

Comparatif pour l'année 2018/2019 pour 3 domaines en mathématiques :



Pour le domaine « addition », l'école est très représentative des écoles de REP avec une répartition des élèves similaire. Néanmoins, sans le détail des scores, il est difficile de détailler avec plus de précision. Par exemple au niveau de la répartition dans les groupes, les élèves sont-ils « limite » ? Ainsi, un élève est-il proche du seuil suivant ou est-il au milieu du groupe ? Parmi les performants, combien ont un score parfait ? Dans les élèves à besoin, ont-ils répondu ou non ?

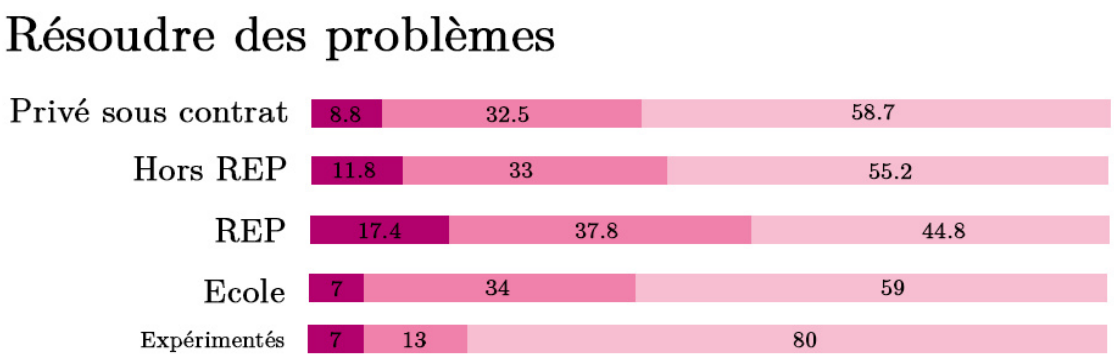
On remarque également que les enseignants plus expérimentés sont bien au-delà des scores moyens en REP et Hors-REP.

Pour le domaine « soustraction », les scores de l'école sont bien supérieurs aux scores moyens en REP et Hors-REP. Dans l'école la soustraction est enseignée et travaillée en parallèle de l'addition depuis le premier jour de classe, ce qui n'est pas le cas dans de nombreuses écoles. Les résultats semblent donc cohérents avec les pratiques de classe. Les enseignants plus expérimentés ont également des scores bien au-delà des scores moyens en REP et Hors-REP.

Enfin, pour le domaine « Résoudre des problèmes », qui fait l'objet d'une attention particulière de notre part, les scores de l'école sont de plus de 15 points supérieurs aux scores moyens en REP et sont supérieurs aux scores des écoles Hors-REP. Les scores de l'école sont globalement équivalents aux scores des écoles privées sous contrat mais avec des contextes locaux et sociaux totalement différents.

Remarquons également le faible taux d'élèves « à besoin » par rapport aux écoles de REP. Il y a toujours des élèves avec des difficultés, et il y en aura toujours, mais ils sont peu nombreux.

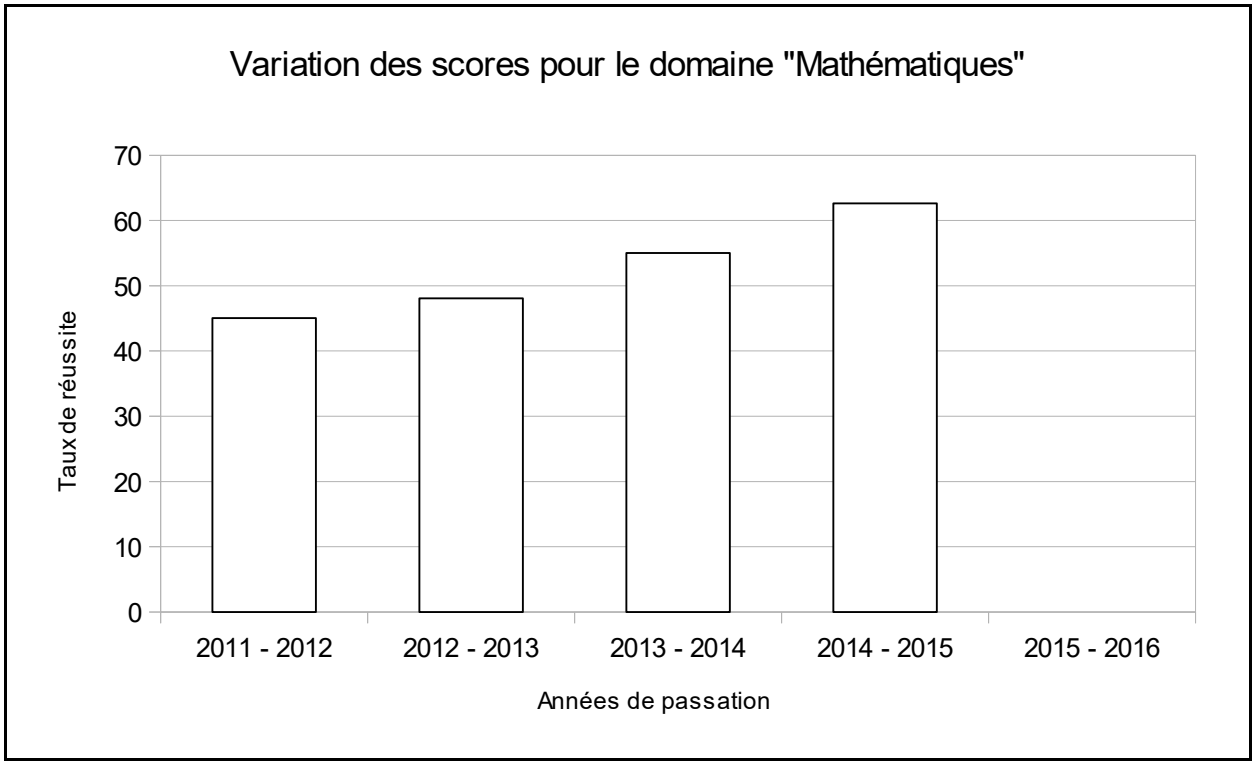
Concernant les enseignants expérimentés (dans le niveau et **surtout** dans notre approche de la résolution de problèmes), les scores de leurs élèves sont très largement supérieurs à toutes les catégories d'écoles (REP, Hors-REP, Privé sous contrat). 80% des élèves sont dans le groupe au-dessus du seuil 2. Ces résultats tendent à valider notre approche pour faire réussir nos élèves dans ce domaine. Ajoutons néanmoins que ce travail en résolution de problèmes nécessite du temps de formation (initiale et continue) et il est donc normal que les collègues débutants, énormément sollicités dans tous les domaines, aient besoin de plus d'expérience d'enseignement pour se rapprocher de la maîtrise des plus aguerris.

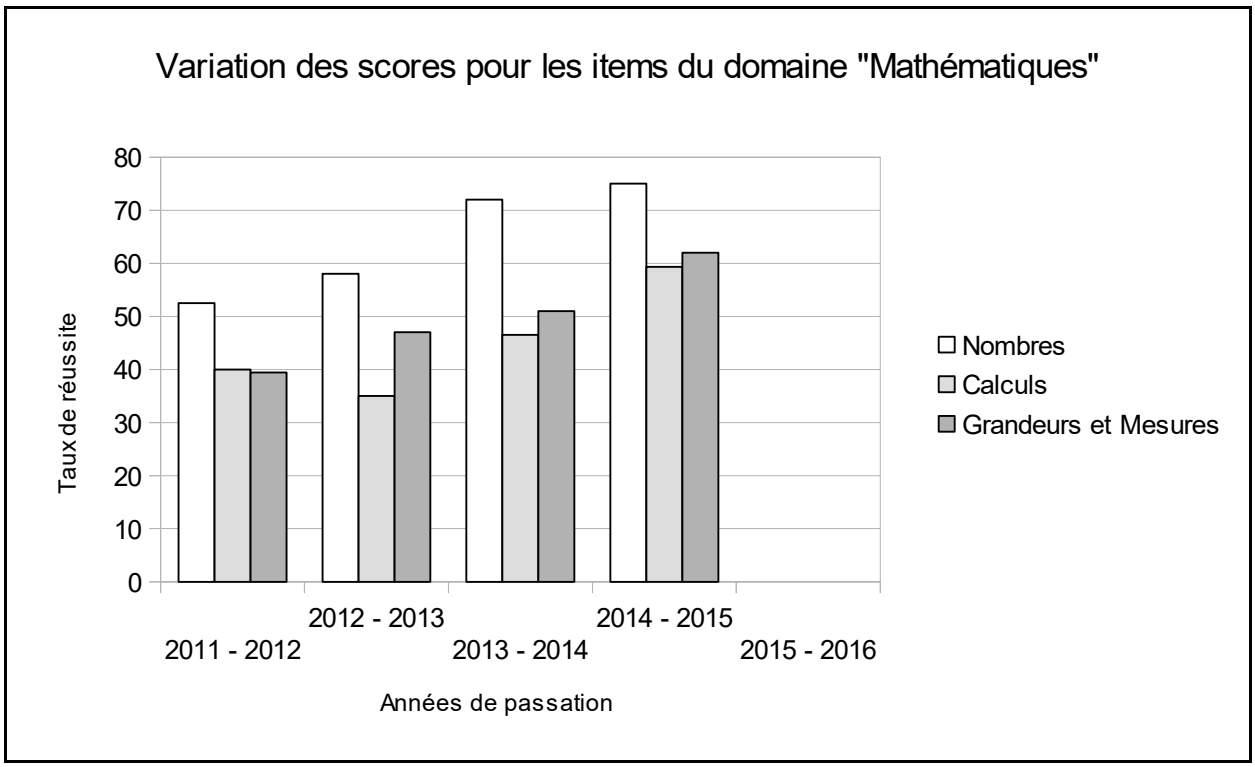


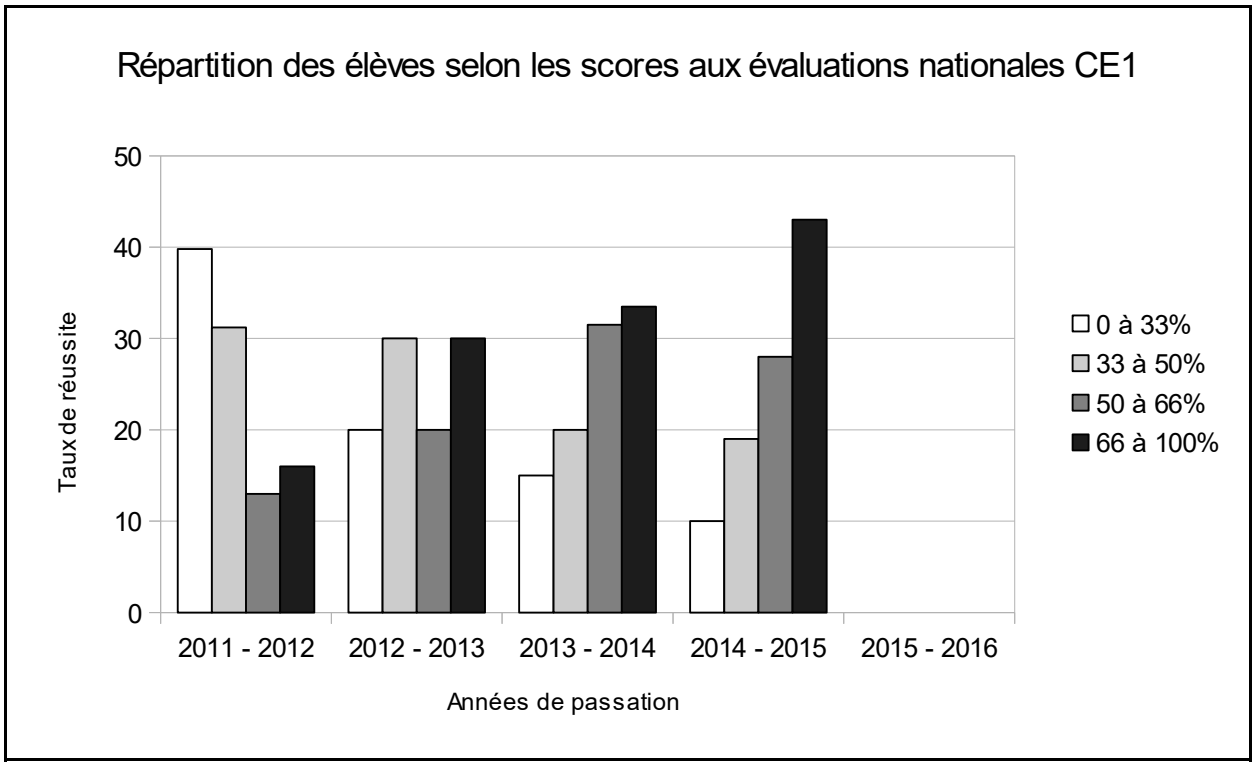
10 -2 Résultats des élèves aux évaluations nationales CE1

Le CE1 a été durant de nombreuses années le niveau le plus instable de l'école, l'équipe se renouvelant fortement chaque année. Ainsi, chaque enseignant arrivant est confronté à un projet d'école particulier qui nécessite du temps de formation et d'appropriation. De plus, l'expérience sur un niveau se construit sur un temps long et il n'est pas toujours possible d'avoir ces conditions. Néanmoins, les évaluations ont montré des changements dans la part des élèves en difficulté et dans les taux de réussite qui sont cohérents avec les résultats des CP.

Évaluations CE 1 :







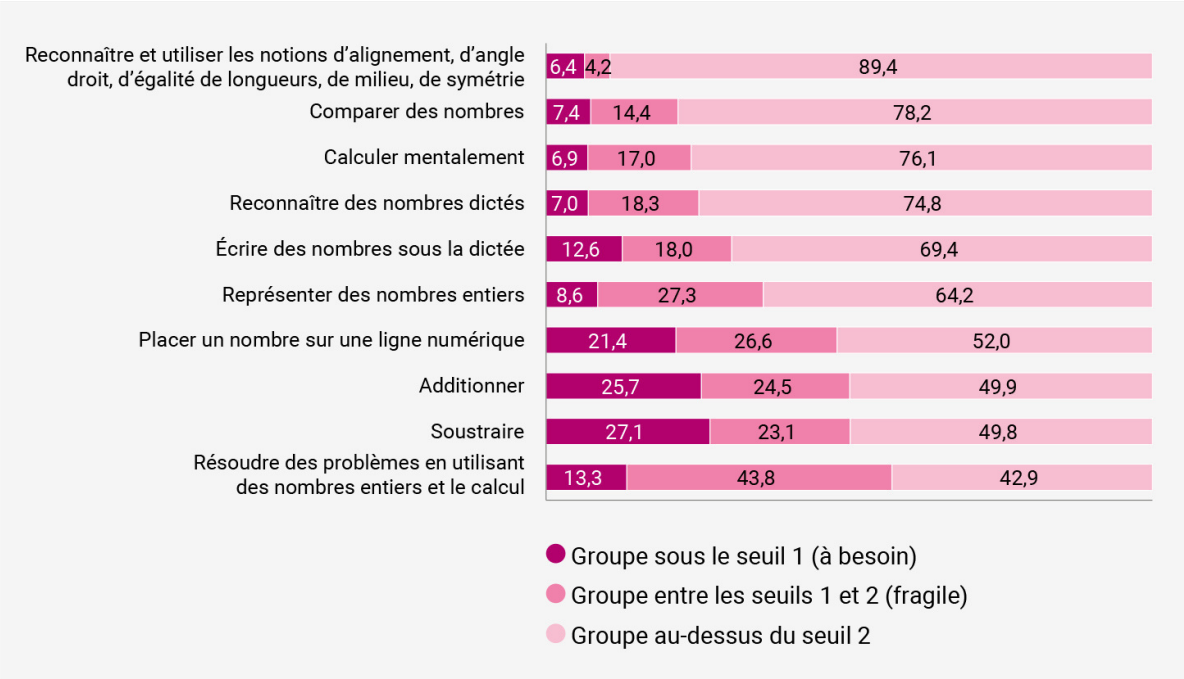
On remarque le renversement de la part des élèves dans la grande difficulté et ceux en réussite.

Durant l'année scolaire 2018/2019, les élèves de CE1 ont été évalués dans divers domaines des mathématiques lors des évaluations nationales. Nos élèves ont participé à ces évaluations mais avant de présenter le détail des résultats, revenons sur le contexte scolaire :

– 2018/2019 : Les classes de CE1 ne sont pas dédoublées. Il n'y a plus de PDM. Le poste E n'intervient pas dans ce dispositif.

Résultats nationaux :

▶ 2 Répartition des élèves dans les groupes selon le domaine évalué en mathématiques en début de CE1 (en %)

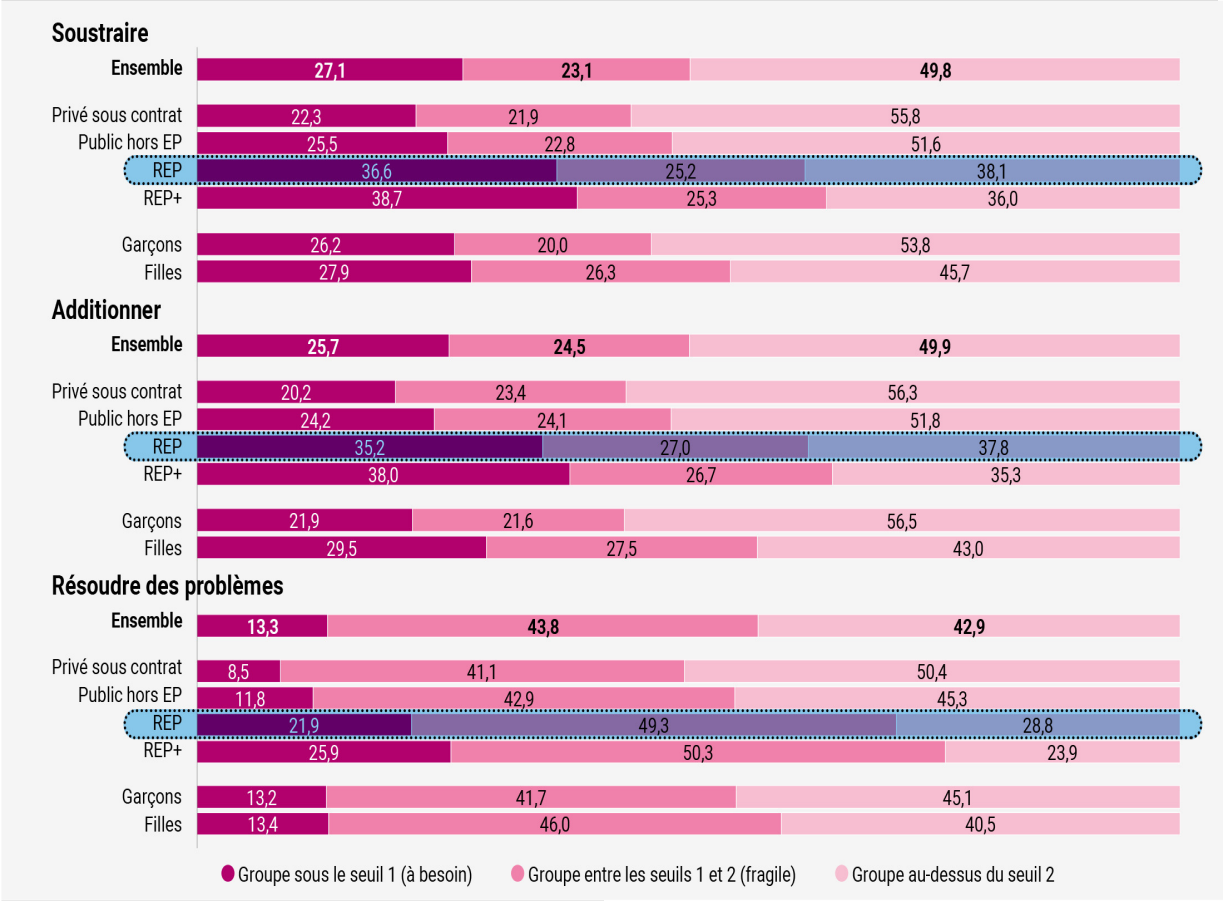


Par le jeu des arrondis, les totaux peuvent être légèrement différents de 100.
Lecture : en début de CE1, 14,4 % des élèves présentent des acquis fragiles dans le domaine « comparer des nombres ».
Champ : France métropolitaine + DOM, Polynésie Française et Saint-Pierre-et-Miquelon, public + privé sous contrat.
Source : MENJ-DEPP, Repères CE1.

Réf. : *Note d'Information*, n° 19.14. © DEPP

Nous nous intéressons plus particulièrement aux résultats des élèves dans un contexte similaire, l'éducation prioritaire :

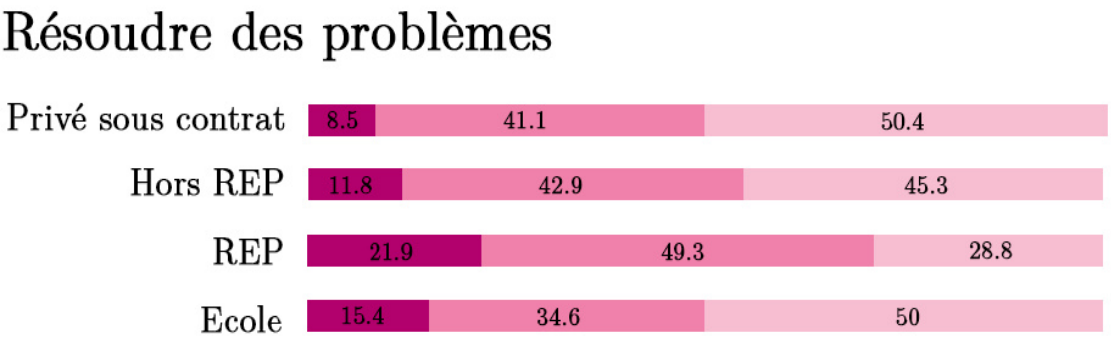
4 Répartition des élèves dans les groupes dans trois domaines évalués en mathématiques en début de CE1 selon le sexe de l'élève et le secteur (en %)



Par le jeu des arrondis, les totaux peuvent être légèrement différents de 100.
Lecture : en début de CE1, 50,3 % des élèves de REP+ présentent des acquis fragiles dans le domaine « résoudre des problèmes ».
Champ : France métropolitaine + DOM, Polynésie Française et Saint-Pierre-et-Miquelon, public + privé sous contrat.
Source : MENJ-DEPP, Repères CE1.

Réf. : *Note d'Information*, n° 19.14. © DEPP

Nous nous focaliserons, pour le moment, sur « résoudre des problèmes ». Les élèves de CE1 ont profité du dispositif particulier de l'école pour la résolution de problèmes lorsqu'ils étaient en classe de CP. Ils ont pratiqué régulièrement en classe avec deux enseignants comme expliqué dans cet ouvrage. Les enseignants en poste au CE1 sont également expérimentés sur ce dispositif.



Intéressons-nous tout d'abord à la part d'élèves « à besoins ». Cette part de 15,4% d'élèves ayant des difficultés fortes est faible à l'entrée du CE1 dans le contexte des écoles REP. Il y a presque 7 points d'écart entre les deux. Ce taux est néanmoins légèrement supérieur à celui des écoles Hors-REP. On peut raisonnablement penser que le travail effectué au CP est porteur pour les élèves de REP mais ne suffit pas encore pour rattraper les résultats Hors-REP. Malgré tout, les taux tendent à se rapprocher.

34,6% des élèves sont considérés fragiles. Cette part d'élèves est inférieur de 15 points aux scores des écoles REP et de 8 points pour les écoles Hors-REP. Ainsi, il semble apparaître encore une fois que notre démarche se traduit concrètement par l'émergence d'une part plus faible d'élèves « avec difficultés », lorsque le contexte est semblable.

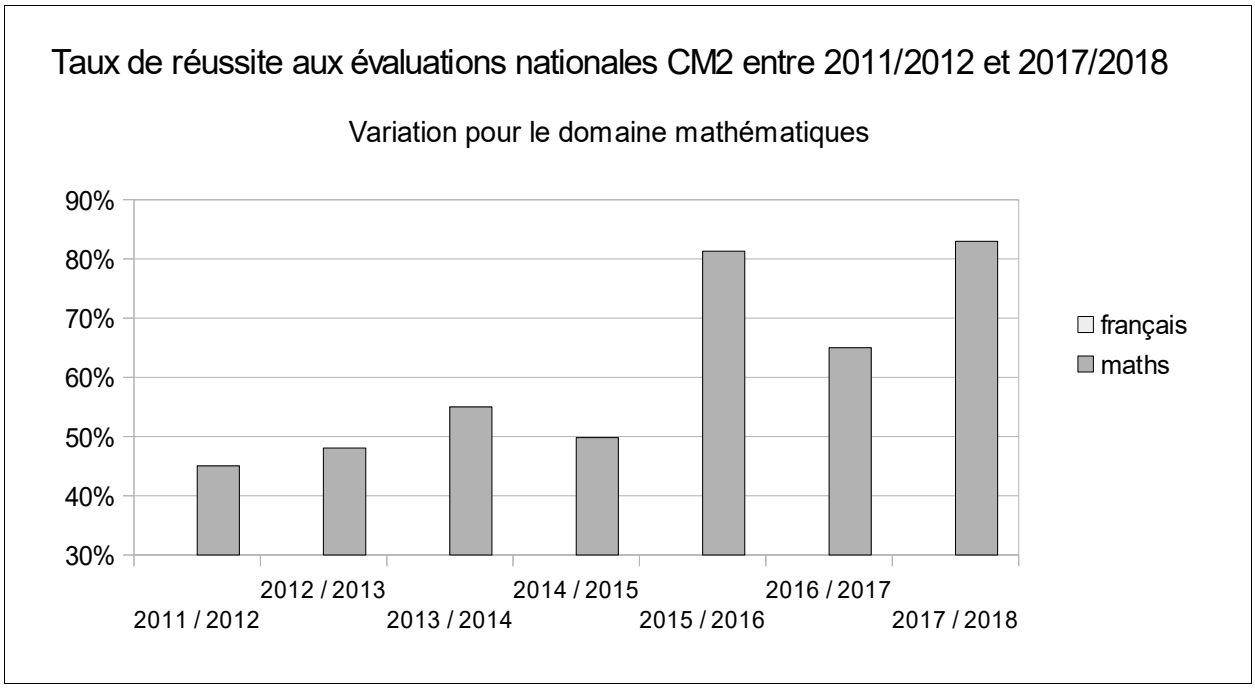
Enfin, 50% des élèves de l'école sont au-dessus du seuil 2. Par rapport à la moyenne des élèves de REP, c'est 20 points de mieux, ce qui est non négligeable. Ce score est très encourageant même s'il est tout à fait envisageable de faire encore progresser nos élèves en baissant la part d'élèves ayant les difficultés les plus fortes.

Ajoutons également qu'il nous apparaît alors qu'amener le plus grand nombre d'élèves à un fort taux de réussite est tout à fait possible et nous l'avons fait dans une certaine mesure. C'est ce que nous essayons de faire individuellement et collectivement et les résultats sont encourageants années après années.

Indépendamment de l'environnement scolaire (dans son aspect social, économique, culturel), il apparaît que la proposition d'un enseignement explicite, progressif et structuré est hautement bénéfique pour nos élèves.

10 -3 Résultats des élèves aux évaluations nationales CM2

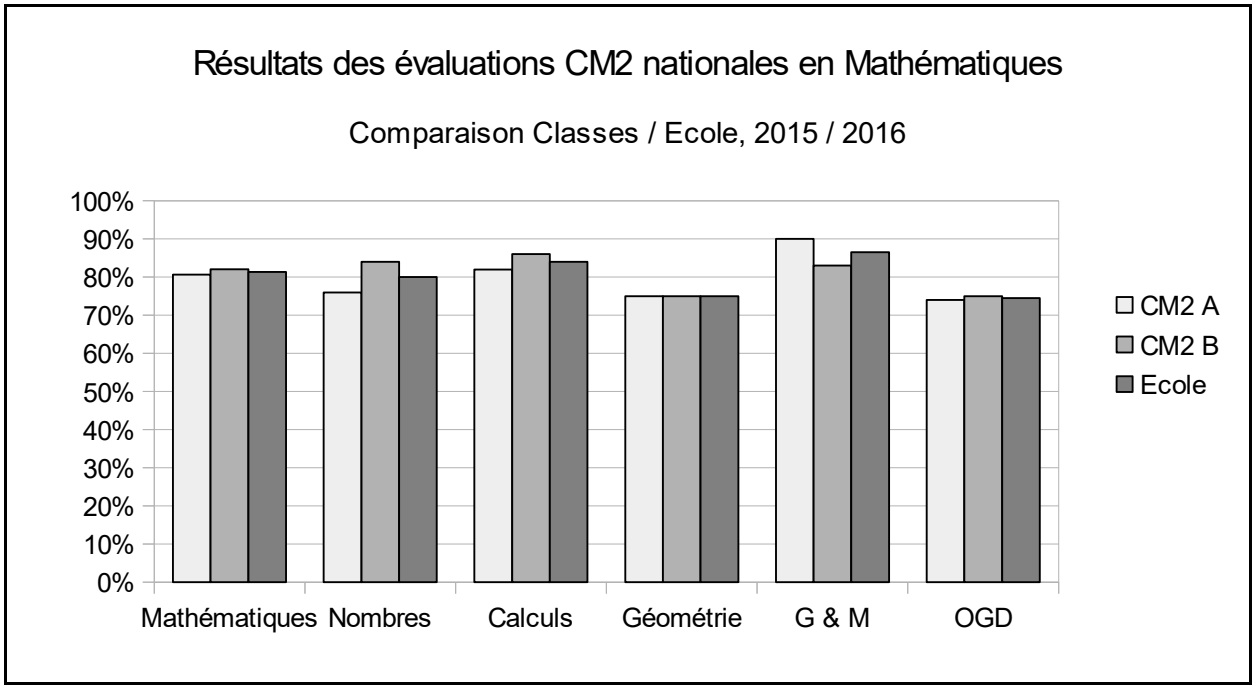
Évaluations CM 2 :



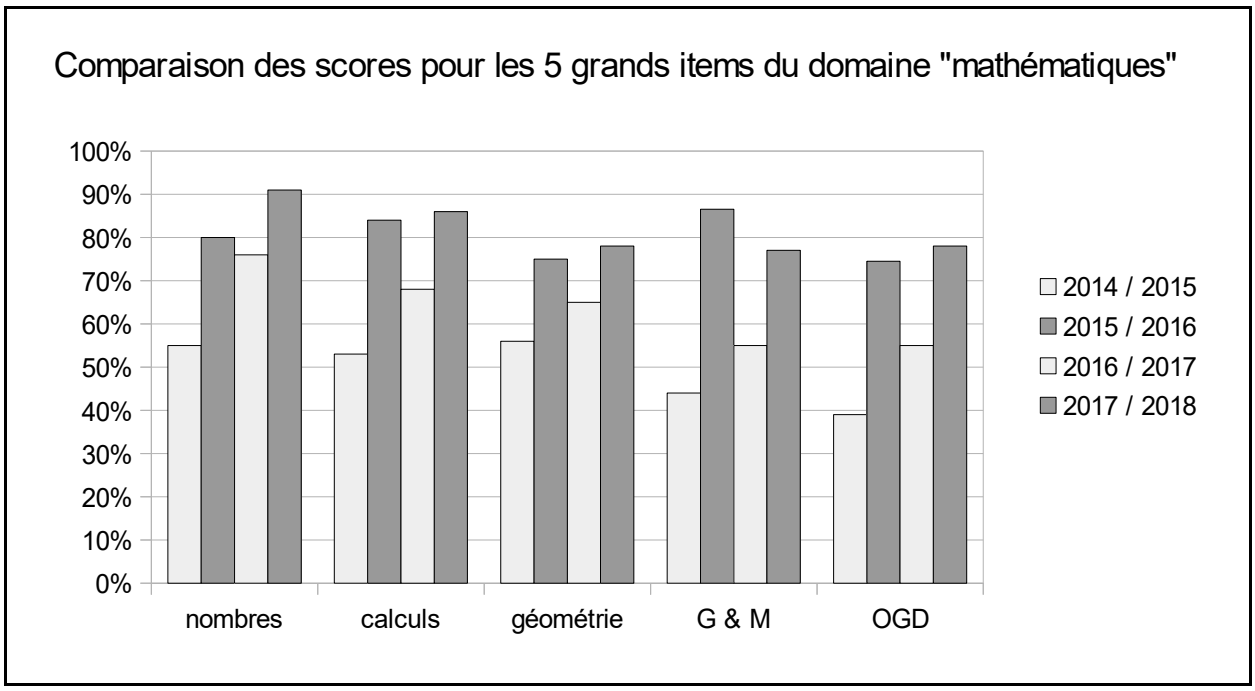
Les enseignants de CM2 alternent chaque année. Ils suivent régulièrement leurs élèves durant deux années (cm1 – cm2). Les mêmes enseignants avaient auparavant des résultats stables (entre 45 % et 55 % pour le domaine « mathématiques ».

Les élèves 2015/2016 ont débuté le projet au CE2 et les enseignants ont modifié leur approche pédagogique des mathématiques durant l'année pour une plus grande cohérence avec le travail en résolution de problèmes. Les élèves 2014/2015 ont débuté le projet au CM2. Un écart de 30 points entre 2 cohortes d'élèves là ou la variance des scores n'excédait pas 5 % d'une année à l'autre. Les résultats des années à venir permettront d'analyser plus précisément les mécanismes qui garantissent la réussite.

Comparaison des scores des 2 classes en 2015 / 2016 : homogénéité

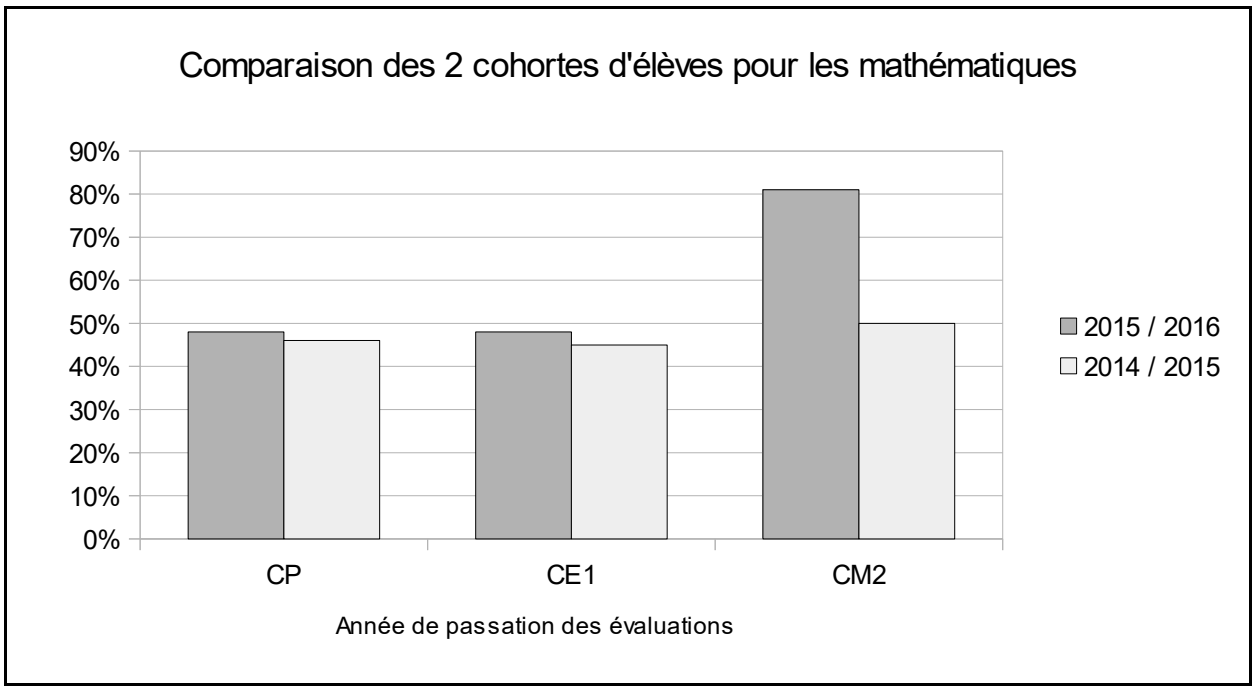


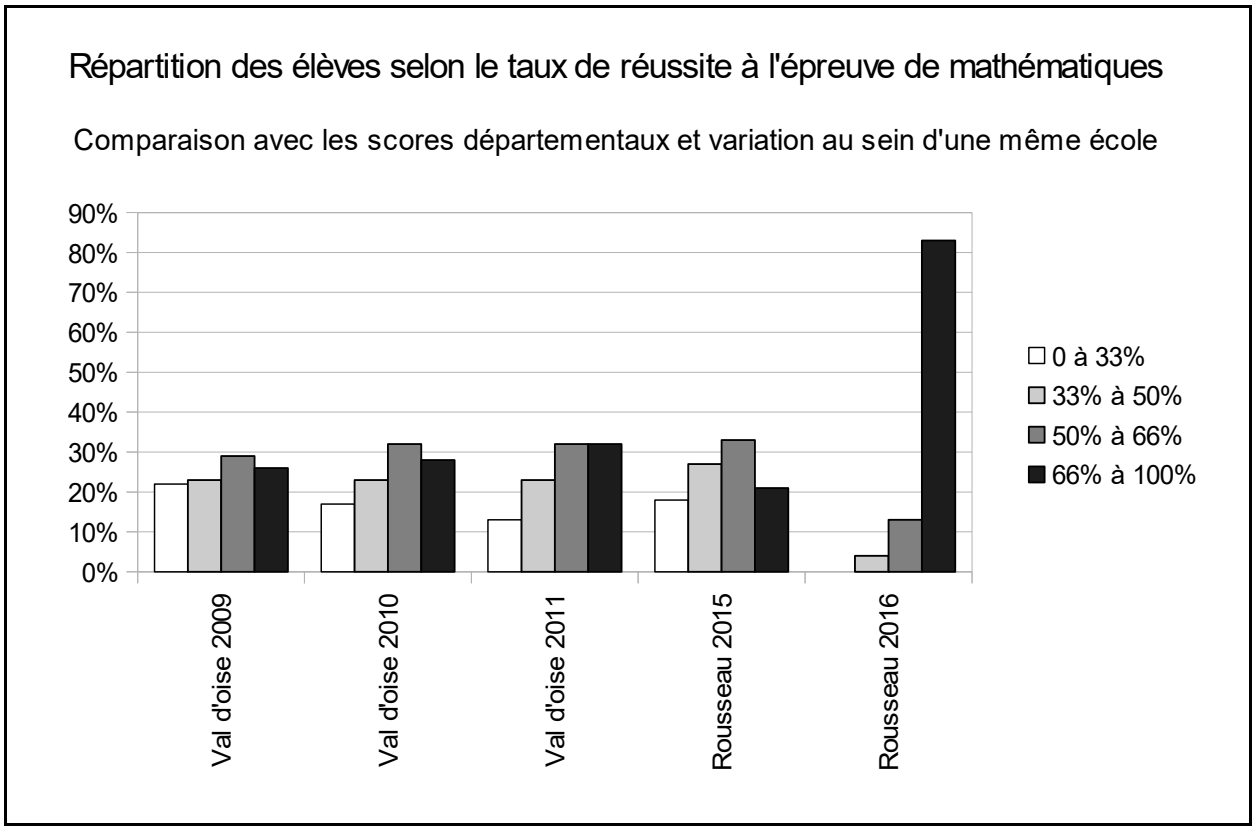
Ces deux enseignants travaillent ensemble : Ils préparent ensemble et analysent ensemble ce qu'ils font (séance, exercices, évaluations). La séance de l'un bénéficie à l'autre pour ajuster si nécessaire. Le maître supplémentaire participe également à ces discussions pédagogiques fréquentes pour rechercher ce qu'il est possible d'améliorer au quotidien (aborder une notion, gérer l'évaluation, les supports, etc.) pour les élèves et ce qui pourrait être exigé d'eux selon ce qu'ils produisent (jusqu'où aller, quelles exigences ? Quelles remédiations ?). Les regards et analyses des enseignants se croisent pour tenter de faire émerger ce qu'il y a de plus efficace pour eux.



Le comparatif se fait sur les années 2014 – 2015 et 2017 – 2018. Nous n'avons pas le détail des scores des années précédentes. Les mêmes couleurs pour les mêmes enseignants selon les années. Nous lisons donc que le même enseignant a eu les élèves de CM2 en 2014 / 2015 et en 2016 / 2017. Les pratiques des enseignants diffèrent mais tous font progresser les élèves.

Nous pouvons comparer l'évolution de ces cohortes entre le CP et le CM2. Les résultats sont homogènes et stables d'une cohorte à l'autre et ils sont faibles. Les élèves ont reçu les mêmes enseignements sauf la cohorte 2015 – 2016 qui a débuté le projet au CE2 et ce, jusqu'au CM2. La cohorte 2014 – 2015 n'a débuté qu'au CM2. La cohorte 2015 – 2016 a donc reçu un enseignement des mathématiques différent qui se traduit par des scores supérieurs dans le comparatif ci-dessous :

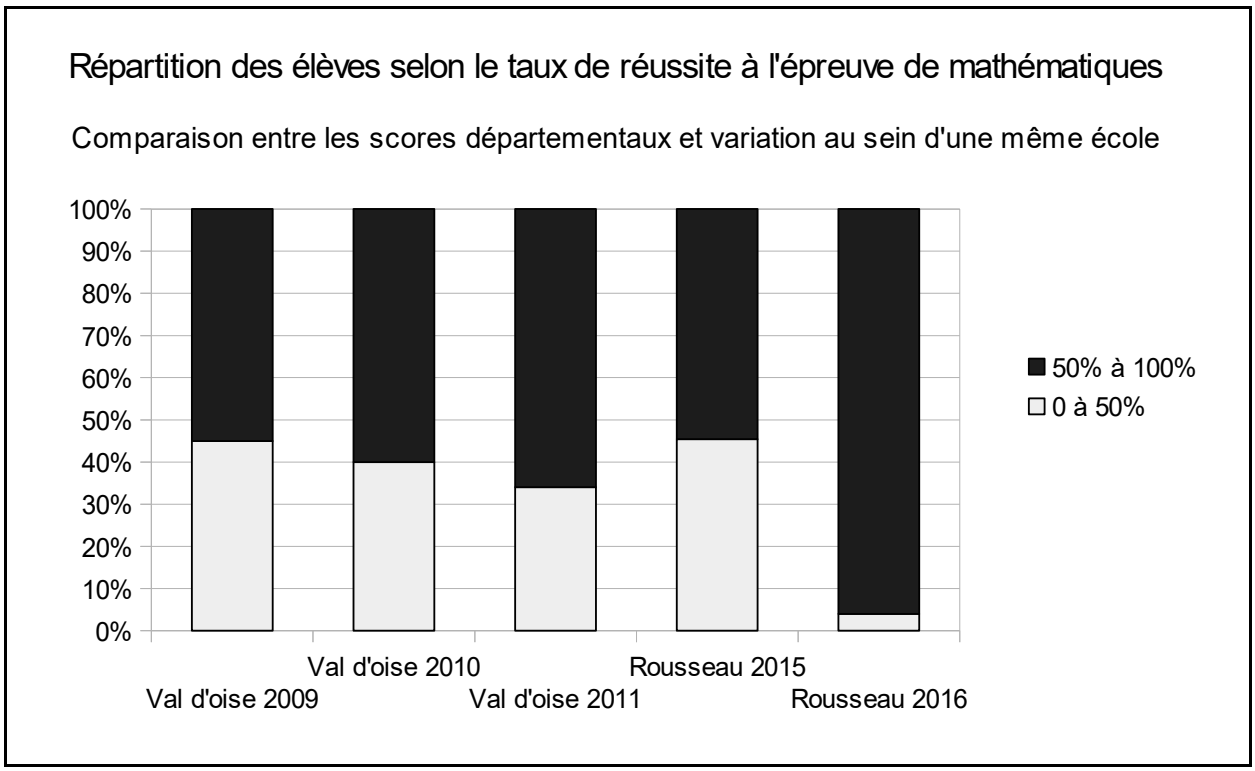


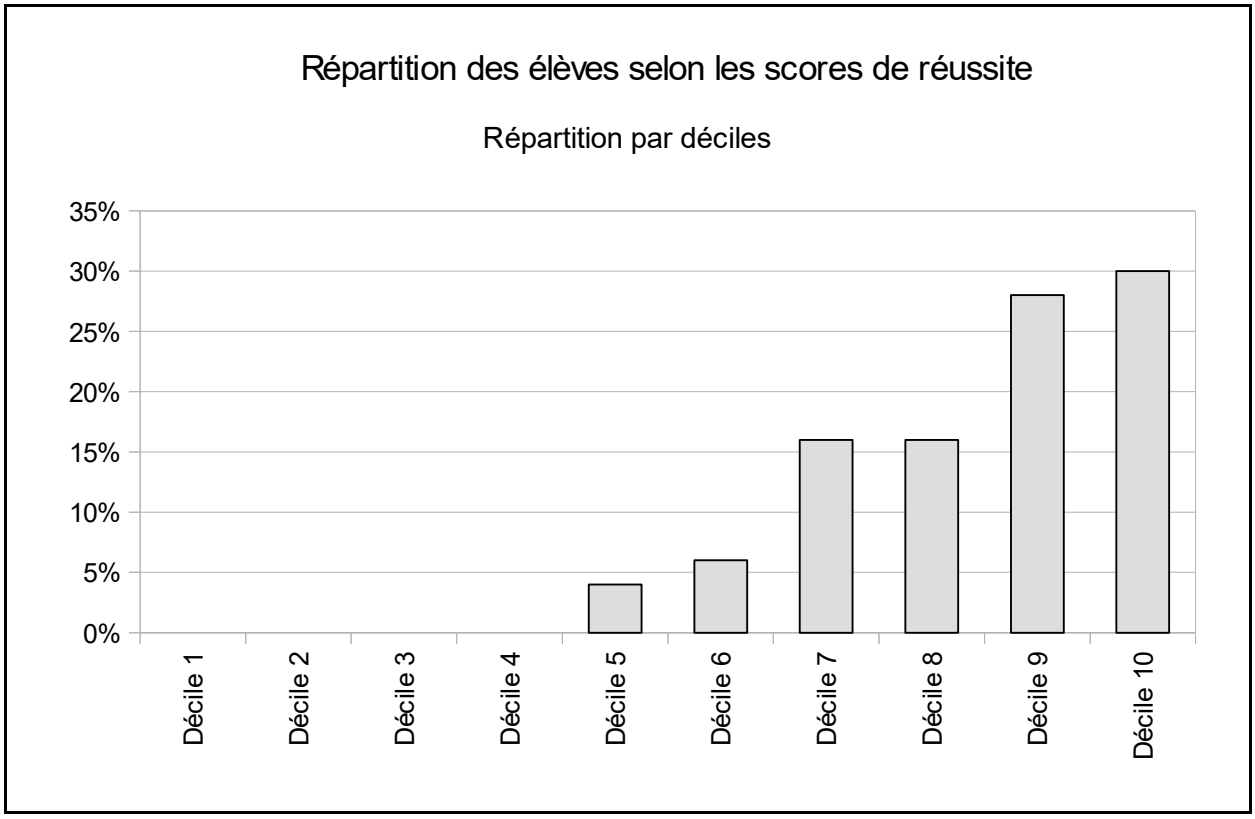


1 élève non-francophone non évalué.

2 élèves non-francophone arrivés en début CM2 et évalués (67 % et 71 % en maths)

1 élève orienté SEGPA non évalué (évaluations SEGPA)


Répartition des élèves selon le taux de réussite à l'épreuve de mathématiques
Comparaison entre les scores départementaux et variation au sein d'une même école
100%
90%
80%
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
Val d'oise 2009
Val d'oise 2010
Val d'oise 2011
Rousseau 2015
Rousseau 2016
50% à 100%
0 à 50%


Répartition des élèves selon les scores de réussite
Répartition par déciles
35%
30%
25%
20%
15%
10%
5%
0%
Décile 1
Décile 2
Décile 3
Décile 4
Décile 5
Décile 6
Décile 7
Décile 8
Décile 9
Décile 10

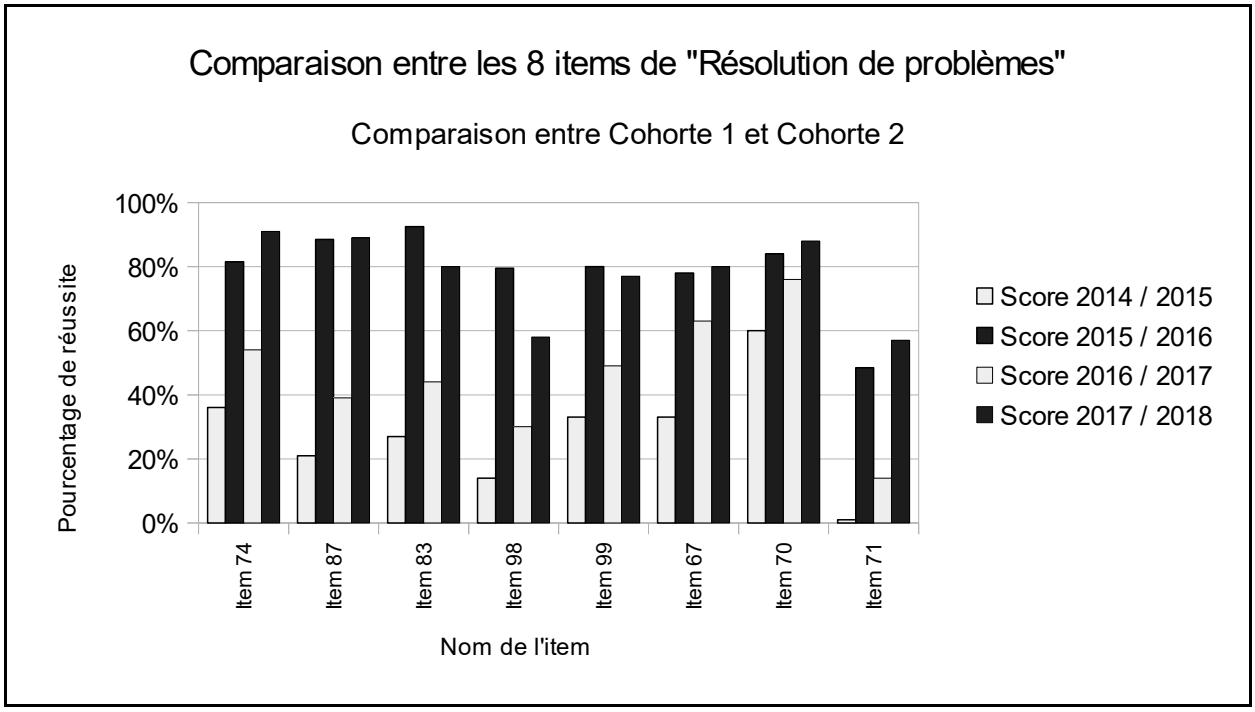
La répartition sous la forme « décile » permet de faire apparaître la répartition des élèves par tranche de 10 %. Nous pouvons observer que 30 % des élèves sont au-delà de 90 % de réussite, et que plus de 50 % des élèves sont au-delà de 80 % de réussite.

Attention, ces résultats ne concernent qu'une école et donc quelques classes et quelques élèves. Ces résultats n'ont donc pas vocation à servir de preuve définitive d'une supériorité d'une approche sur l'autre, car la validité statistique reste faible. Peut-être est-ce le cas ? Il faudrait le vérifier sur la durée et avec un nombre conséquent d'élèves (jusqu'à présent, la durée nous donne raison). Ce que nous pouvons affirmer, c'est que dans ce contexte local, l'approche choisie par les enseignants est gagnante à tous les niveaux.

Il y a donc, selon nous, plusieurs facteurs de réussite.

– Le travail régulier avec une exigence forte en résolution de problème sur plusieurs années conduit au progrès de tous les élèves dans ce domaine. Il y a toujours des élèves qui ont des difficultés, mais ils sont moins nombreux et les difficultés sont moins fortes.
– Un changement des pratiques en mathématiques s'est traduit par une amélioration notable des connaissances et compétences des élèves.
– Ces changements au niveau des pratiques se sont traduits par un travail différent concernant le calcul mental au quotidien (fréquence et intensité), par une exigence plus élevée, par un changement de conception de l'évaluation au quotidien et par une plus grande prise en compte de l'importance du travail sur la mémorisation à long terme de faits mathématiques.

Impact de l'étude **explicite** des stratégies de résolution de problèmes sur les résultats des élèves.



Calcul	Résoudre des problèmes relevant des quatre opérations, engageant une démarche à une ou plusieurs étapes	Item 74
		Item 87
Grandeurs et mesures	Résoudre des problèmes dont la résolution implique des conversions et des unités différentes de mesure	Item 83
		Item 98
		Item 99
Organisation et gestion de données	Résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité.	Item 67
		Item 70
		Item 71

L'item 71 correspond au calcul de la masse des ingrédients d'une recette selon le nombre de personnes. C'est une situation de proportionnalité typique de la règle de 3. Le score passe de 1 % de réussite à 50 % mais reste encore en deçà des attentes.

Sur le dernier graphique, les mêmes couleurs pour les mêmes enseignants. Nous voyons ainsi les effets sur plusieurs années quand des enseignants débutent un projet, changent une pratique de classe et doivent appréhender différemment un domaine d'étude. Il y a eu un effet immédiat sur les résultats (hausse) par rapport à ce qui se faisait autrefois mais l'expérience et la maîtrise de la nouvelle approche apporte encore un gain les années suivantes. Nous remarquons donc que plus l'enseignant maîtrise ce nouveau contenu, plus il va faire progresser ses élèves. Ajoutons également que les pratiques de classe sont différentes, pour l'approche pédagogique, et cela peut se traduire par une réussite plus ou moins forte. Tous les enseignants ont pu faire progresser les élèves de manière visible. L'objectif est alors d'aller voir de plus prêt en classe, avec les enseignants, les pratiques qui ont la plus grande plus-value pour les élèves.

11 Questions/Réponses

Les réponses apportées ici ne sont basées que sur l'expérience et les comparatifs auprès des élèves de tous les niveaux. Les réponses apportées sont donc très empiriques et propres au contexte dans lequel ces observations ont eu lieu.

Quel format pour une séance de découverte ?

Plusieurs solutions existent. Un enseignant peut choisir de mettre en place une situation-problème qui permettra à l'élève de découvrir un concept et de faire émerger la notion avant de l'institutionnaliser avec le groupe. Un enseignant peut aussi faire le choix d'enseigner directement les stratégies et savoirs essentiels en montrant explicitement le comment et le pourquoi avant de proposer aux élèves d'utiliser ces stratégies en pratique guidée.

La première solution est très efficace avec les meilleurs élèves qui ont déjà un bon bagage notionnel, cela l'est beaucoup moins avec les élèves les plus fragiles. D'expérience, ce n'est pas le meilleur point de départ pour découvrir une notion ou concept. Par contre, c'est une finalité très intéressante.

La seconde solution est à nos yeux la plus efficace en résultats obtenus et en temps passé pour tous les élèves. Elle rassure l'élève sur l'objet « savoir » qu'il manipule en lui offrant des modèles solides et explicite tout en offrant un étayage qui s'efface progressivement. Il nous semble que cette approche est à privilégier pour aborder les nouveaux concepts.

Est-ce que les élèves peuvent coopérer ? Doivent-ils être en autonomie ?

Les élèves peuvent coopérer, et c'est une approche qui nous semble très pertinente, si la situation n'est pas factice. La coopération doit être une possibilité offerte aux élèves selon la situation et pas un format obligatoire contraignant. Ainsi, disposer des élèves en groupe systématiquement pour résoudre un problème n'est pas de la coopération. Forcer la coopération quand un élève peut effectuer le travail seul n'est pas souhaitable et contre-productif. Il faut par contre qu'il puisse, si la situation s'y prête, coopérer avec un autre élève si cela est nécessaire pour résoudre.

En simplifiant : Si je peux résoudre seul, je résous seul. Si je ne peux résoudre seul je peux coopérer avec mes camarades. L'enseignant peut alors proposer des situations qui peuvent nécessiter de la coopération sans la forcer mais en l'induisant. Il faut toujours

veiller à donner aux élèves les outils (savoirs, stratégies) pour coopérer efficacement si cela est nécessaire.

Les élèves sont réellement autonomes quand ils maîtrisent les concepts et stratégies. Ainsi, cette autonomie se construit très progressivement par un outillage notionnel des élèves afin qu'ils puissent aborder seuls les situations indépendamment de l'aide de l'enseignant. L'autonomie n'est pas le fait de laisser un élève faire seul en pensant que cela est suffisant. L'autonomie se construit par la maîtrise progressive du sujet étudié.

Mais quand un élève arrive dans l'école ? La classe ?

Quand un élève arrive et qu'il n'a pas les habitudes des autres élèves de la classe, le même vécu, les connaissances et stratégies, il faut lui enseigner tout ce qui lui sera nécessaire. Cet enseignement, déjà mené avec les autres élèves, devra être proposé afin qu'il puisse s'intégrer dans la démarche.

Il s'agira de prendre du temps avec lui durant les séances afin qu'il intègre les stratégies et connaissances qui font défaut. L'enseignant utilisera la disposition qui lui semble la plus cohérente avec cet objectif. Un petit groupe d'aide ? Un tutorat ? Selon le profil de l'élève et les besoins, l'enseignant fera selon ses possibilités.

Concernant le support proposé à l'élève, il est plus simple d'utiliser un fichier destiné à des débutants. L'acquisition des stratégies sera plus simple et permettra à l'élève d'avancer rapidement, tout en suivant la progression, avant de se confronter à un niveau plus adapté. Il ne s'agit pas de donner un fichier Niveau 1 à un CM1, mais de proposer quelques chapitres des niveaux inférieurs afin de mettre en place les stratégies efficaces. L'enseignant soumettra à l'élève le support qui lui semble alors le plus adapté pour progresser.

Est-ce qu'on fait des maths en dehors des problèmes ?

Oui, dans le cadre fixé par les programmes et la résolution de problèmes est intégrée dans ce cadre. La résolution de problèmes et les « situations problème » ne sont pas le point de départ de l'étude de notions. Nous avons déjà abordé le sujet de « Problem-Based Learning » et « Problem-Solving Teaching » en privilégiant l'étude directe, explicite et structurée des stratégies de résolution des problèmes arithmétiques. Nous apprenons d'abord à résoudre puis l'expertise permettra d'apprendre en résolvant. Néanmoins, avec des élèves déjà très avancés, qui utilisent un fichier en avance sur la progression de la classe ou même du cycle, nous pouvons mettre à profit la séance de résolution de problèmes pour aborder une notion nouvelle. La situation problème est alors, dans ce cas particulier, le point de départ de l'étude de cette notion. Un temps de découverte autonome pourra être donné à l'élève afin qu'il cherche et expérimente, mais il se verra proposer (rapidement) un étayage structurant et des exemples de résolution nombreux.

Et avec mes élèves ? Comment puis-je gérer une séance avec 28 élèves ?

Cette question a été posée de nombreuses fois, pour un ensemble de classes allant de 12 élèves (CP 100% réussite) à 32 élèves. Plus les effectifs sont importants plus il est difficile de donner à chacun le temps nécessaire pour expliciter et étayer. Ainsi, malgré l'expérience de l'enseignant et toute ses qualités, le nombre élevé d'élèves dans les classes sera toujours un élément qui réduit la possibilité de donner à chacun efficacement et de gérer au mieux l'hétérogénéité. Il n'y a donc pas, dans les propositions suivantes, de solutions qui contrebalancent « l'effet nombre » mais des propositions pour faire « au mieux » dans les conditions qui sont les nôtres. De plus, si tous les élèves travaillent sur des problèmes différents, cela complique la tâche de correction pour l'enseignant. Quelques éléments de réponse :

– Avec 12 élèves en CP, il est a priori plus aisé de gérer seul le groupe. Néanmoins, il est aussi très intéressant de travailler avec des groupes de 4 élèves dans un « atelier » mené par l'enseignant. C'est très confortable pour expliciter, structurer et donner de nombreux exemples résolus avec un temps « enseignant/élève » très important. Les autres élèves sont alors autonomes sur un travail différent (Lecture, marchande, calcul, illustration, etc).

– Avec des CP dédoublés et donc deux enseignants dans une classe de 24 élèves, il y a la possibilité de mener les séances à deux avec le groupe complet. Il est également possible de fonctionner avec les ateliers du CP à 12. Il est aussi envisageable d'avoir 2 ateliers, chacun avec un enseignant, le reste du groupe est alors autonome.

– Avec le maître supplémentaire, s'il est présent, la gestion de la séance à 2 est envisageable selon les modalités choisies par les enseignants. Il est possible de créer des groupes de travail selon l'avancement des élèves (ceintures) pour faciliter l'étayage et la correction.

– Seul dans ma classe multi-niveaux : Un niveau avec l'enseignant en résolution de problème quand l'autre niveau travail sur d'autres supports ou alors toute la classe en résolution de problèmes, car les fichiers couvrent tous les cycles. La difficulté résidera dans le temps enseignant/élève et la correction. Néanmoins, avant de laisser les élèves travailler en autonomie, il y aura forcément un temps d'apprentissage des stratégies de résolution avec le groupe complet. Les élèves peuvent pratiquer en autonomie s'ils ont bénéficié d'une solide pratique guidée avec de nombreux exemples travaillés avec le groupe au complet. L'autonomie venant progressivement, l'enseignant peut progressivement aménager la séance pour que chacun puisse apprendre dans les meilleurs conditions (même si elle ne sont pas optimales selon les contextes).

– Seul avec toute ma classe : Tous les élèves utilisent leurs fichiers et ont donc des problèmes différents mais, fondamentalement, ils travaillent les mêmes stratégies de résolution. Ainsi, si l'enseignant se focalise sur l'apparence du problème, dans l'aide qu'il veut apporter, il sera débordé, car il y aura autant de problèmes que d'élèves. Si l'aide apportée au groupe est axée sur les stratégies, cela limite les sources de débordement.

Seul avec une classe chargée et hétérogène, il est extrêmement difficile de mener une séance seul, car le coût est très important. La résolution de problème nécessite de montrer, d'expliciter, de modéliser, de travailler la compréhension, le calcul et la manipulation de concepts très différents. La modalité choisie devra donc être la moins pénalisante et ne sera peut-être pas optimale. Il serait, à notre avis, plus aisé, pour gérer les apprentissages, de proposer plusieurs petites séances ritualisées avec des exemples travaillés en commun, une phase de pratique guidée en coopération puis la phase d'autonomie. La routine permet une mise en place plus rapide des élèves et une gestion plus simple pour l'enseignant.

La correction individuelle de chaque problème avec l'enseignant peut engendrer une queue d'élèves si ceux-ci se déplacent jusqu'à son bureau. Ces élèves attendent, peut-être même longtemps, et ne sont donc pas au travail. Le temps effectif de travail est donc limité et ce n'est pas positif pour l'élève. Si l'enseignant se déplace entre les élèves, c'est lui qui est sur-sollicité et qui va s'épuiser, surtout avec une classe nombreuse.

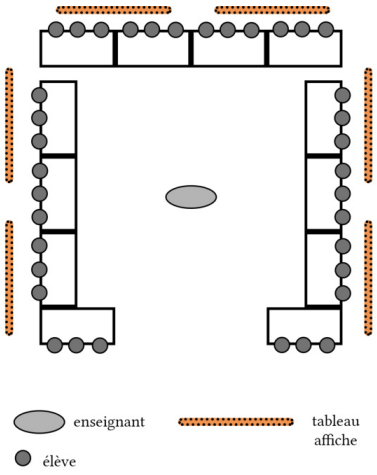
Il faut réguler le flux d'élèves en hiérarchisant les corrections et en ajustant la fréquence en fonction de la réussite. Plus l'élève est en réussite autonome, plus il peut résoudre de problèmes et viendra donc moins souvent valider sa production.

Exemple : Un élève dont le problème est validé directement viendra ensuite faire corriger 2 problèmes, puis 3. Si des corrections sont nécessaires suite à des erreurs, il recommence le processus avec 1 problème, puis 2, etc. Nous pouvons ensuite limiter à 4 problèmes pour chaque bilan enseignant/élève.

Il est très pratique également de convenir d'un codage de la correction pour aiguiller l'élève sur les points nécessitant plus de vigilance. Il faut donc des outils d'aide à la correction utilisables et utilisés par les élèves. (répertoire orthographique, grammaire etc) Mais également des habitudes pour se relire et se corriger stratégiquement.

Exemple : On peut juste signifier oralement à l'élève « grammaire », ou juste « les accords » pour aiguiller celui-ci vers la source d'erreur. L'objectif est de ne pas trop en dire pour ne pas corriger à la place de l'élève mais en aiguillant suffisamment pour mettre en place une routine de questionnement orthographique. Selon le niveau de classe le questionnement variera en fonction des connaissances des élèves.

Ci-dessous, un agencement possible d'une salle de classe pour la séance de résolution de problèmes (et pour d'autres matières également)



L'enseignant est en position centrale afin de pouvoir aller rapidement vers les groupes d'élèves (chaise à roulettes). Ceux-ci peuvent travailler à deux ou 3 mais aussi individuellement. Derrière chaque groupe est placé un tableau blanc ou une affiche afin qu'ils puissent réaliser leur travail ou leur démarche.

L'enseignant peut donc observer le travail de tous les groupes rapidement et se déplacer si besoin. Il peut aller vers 1 ou plusieurs élèves. Il peut surveiller les groupes, intervenir, guider, étayer, expliciter.

Le tableau blanc permet aux élèves de prendre un peu du recul sur leur travail et d'organiser celui-ci avant le passage au fichier. Il permet au groupe d'intervenir si nécessaire. Un élève seul peut donc également sollicité l'enseignant ou ses camarades.

Pour l'avoir expérimentée, cette disposition de classe est très efficace et agréable avec des CM dans notre contexte.

Et les bons élèves ? Et les faibles ?

L'outil a été pensé pour permettre aux meilleurs éléments d'aller aussi loin que possible en dépassant même les attendus des programmes tout en maintenant une exigence élevée pour les élèves qui ont de plus grandes difficultés. Ainsi, la progression proposée permet de travailler de manière intense les différentes structures plusieurs fois même pour les élèves plus lents. Tous les élèves sont donc au travail, aucun d'eux n'a quelque chose de « trop facile » ou de « trop résistant ».

Dois-je faire des séances pour apprendre les schémas ?

Les schémas s'utilisent et servent de support pour l'enseignant et l'élève. Ils peuvent servir d'aide structurelle sur une affiche de la classe avec des exemples résolus qui montrent la structure et les liens entre les données. Est-ce alors nécessaire de faire des séances pour les apprendre ? Non, ce n'est pas un but en soi. La connaissance « par cœur » des schémas est le produit dérivé de leur utilisation. Ils sont un élément structurant transitoire que les élèves « connaissent » car ils les utilisent chaque semaine pendant des années et qu'ils oublieront sûrement bien plus tard, car ils auront mentalisé des schémas d'organisation des données des problèmes de manière inconsciente.

Ce qu'il faut connaître vraiment, ce qui est essentiel pour réussir, ce sont la grammaire et les stratégies de résolution.

Qu'est-ce que j'affiche dans la classe ?

Tout affichage qui respecte la règle des 3U. Est-il utile ? Est-il utilisable ? Est-il utilisé ? Un affichage utile servira de référence méthodologique pour résoudre en montrant les étapes essentielles. Cet affichage montrera des exemples résolus typiques. Cet affichage sera mis à profit régulièrement pour résoudre en suivant la méthodologie. Il sera possible d'y ajouter des éléments pour l'enrichir. L'enseignant qui montre et explique durant un moment de la séance, utilisera aussi cet affichage. L'affichage sera évoqué en début et fin de séance régulièrement tant qu'il sera utile.

Et les problèmes pour chercher ? Est-ce que les élèves en font ?

Oui. Nos élèves se confrontent aussi à des problèmes de logique et à des problèmes pour chercher en complément d'un travail progressif sur les stratégies de résolution des problèmes arithmétiques. Il n'y a pas d'exclusion.

Les élèves se voient-ils proposer des problèmes complexes ?

Dans une approche structurée par petits pas, du simple au complexe, les problèmes complexes sont un aboutissement. Ils font donc partie du continuum d'apprentissage et sont un des objectifs visés. D'expérience, les placer comme point de départ surcharge cognitivement les élèves qui n'ont pas les connaissances nécessaires pour traiter les informations. L'apprentissage réel, en situation, sera très faible et peu accessible pour les plus fragiles. La mise en échec sera trop forte avec un risque trop grand de placer l'élève dans une situation de retrait. Il nous semble primordial de « préparer le terrain » afin que les élèves puissent s'y confronter. Si ces problèmes sont donc amenés progressivement, sur plusieurs années en travaillant toutes les structures et en rédigeant les démarches, en modélisant les étapes, les élèves de cycle 3 pourront en aborder beaucoup plus qu'au cycle 2. Il faut clairement envisager cette approche au-delà de l'année en cours. Ce qui est travaillé et préparé l'année n, portera ses fruits l'année $n+1$, $n+2$ ou même $n+3$. La part des problèmes complexes ira croissante, car les élèves pourront s'appuyer de plus en plus sur le travail préparatoire effectué depuis le début de leur scolarité.

Est-ce que modéliser un problème est vraiment utile pour comprendre ? Les élèves comprennent-ils mieux si je modélise pour expliquer ?

Cette question a été posée régulièrement, car le fait de modéliser un problème arithmétique, sous forme de schéma ou de modèle en barre, n'était pas une démarche habituelle pour beaucoup d'enseignants ou de formateurs. C'est moins le cas aujourd'hui, mais cette question revient régulièrement.

Sans la modélisation, l'explicitation des stratégies de résolution est souvent limitée à une explicitation orale, à un dessin figuratif de la situation voir un proto-schéma. Il peut y avoir recours à de multiples exemples afin de faire comprendre par la répétition. Le problème sous-jacent dans cette situation, pour les élèves, est qu'en l'absence de démarche structurée, construite sur des stratégies solides, toutes les approches se valent (il n'y a pas de notion d'efficacité ni d'expertise) et il devient très difficile de hiérarchiser les solutions. Ainsi, il sera beaucoup plus complexe de signifier qu'une démarche est fausse, et expliquer pourquoi clairement, si la force de la preuve est faible. Cela se traduit par une difficulté des élèves à dépasser leurs démarches et à accepter l'erreur.

En résumant, pourquoi devrais-je suivre le modèle de résolution du camarade si celui-ci ne peut expliquer pourquoi sa solution est clairement juste ? Pourquoi devrais-je utiliser la méthode de l'enseignant si la démonstration se résume à « c'est comme ça qu'il faut faire » ?

Il ne faut jamais négliger le poids de la démonstration rigoureuse pour prouver qu'une solution est plus simple ou efficace. Cette démonstration doit alors s'appuyer sur des éléments clairs, visuels et structurés afin de montrer sans aucune ambiguïté qu'elle est la plus valide.

À ce titre, voici une expérience proposée à des adultes et élèves. Un problème arithmétique a été proposé à des adultes et une version simplifié de celui-ci à des élèves. Ceux-ci ont confronter leurs réponses, Ils ont justifier s'ils le pouvaient, ils ont également pu changer leurs réponses par la suite. La version adulte de ce problème a été soumise par Denis BUTLEN lors d'une formation *« mathématiques en éducation prioritaire »* au Centre Alain Savary (Lyon) en mars 2019. Ce problème a donc par la suite été reproposé par l'auteur à des collègues et élèves pour une petite expérience.

« La Vache et le Paysan » : Un paysan se rend au marché. Il achète une vache 500 €. Il décide de la revendre 600 €. Il change encore d'avis et il la rachète 700 €. Finalement, il la revend 800 €.
A-t-il gagné de l'argent et, dans ce cas, combien ?
A-t-il perdu de l'argent et, dans ce cas, combien ?
Ou n'a-t-il rien gagné ou rien perdu ?

Plusieurs réponses ont été proposées par les participants (et certaines sont

volontairement erronées pour explorer le cheminement) :

- Perte de 300 €
- Perte de 200 €
- Gain/perte de 0 €
- Gain de 100 €
- Gain de 200 €

Voici, grosso-modo, une répartition des résultats obtenus :

Perte 300 €	Perte 200 €	Gain /Perte 0 €	Gain 100 €	Gain 200 €
5%	5%	20%	30%	40%

De prime abord, nous pouvons être étonnés par la variété des réponses. Celles-ci sont les réponses les plus données. Chacun a eu l'occasion d'expliquer sa démarche de résolution et dans la majorité des cas, cette explication a été orale. Il n'y a eu ni validation ni invalidation des propositions. Les participants ont donc eu par la suite la possibilité de changer leur choix.

Voici la répartition des résultats obtenus après changement :

Perte 300 €	Perte 200 €	Gain /Perte 0 €	Gain 100 €	Gain 200 €
0%	0%	20%	20%	60%

Il y a bien eu des variations et un abandon des solutions mais la bonne réponse « 200€ » ne remporte pas les 100% d'adhésion. Les réponses qui restent « plausibles » de prime abord, malgré les justifications, ont encore des adhérents.

Plusieurs analyses possibles :

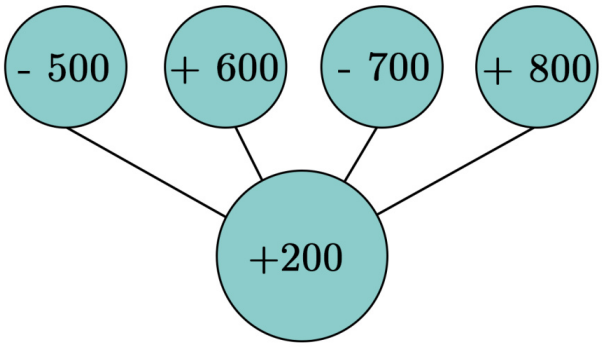
- Renoncer à sa réponse est difficile, même avec des arguments rationnels. Reconnaître son erreur est difficile pour les adultes et les élèves.
- Renoncer à sa procédure est difficile, même pour des adultes qui ne sont pas des débutants. Imaginons le cas avec des élèves. Comment montrer que certaines procédures sont clairement fausses et inefficaces ?
- Une explicitation orale permet de faire bouger les réponses mais reste encore insuffisante. Est-ce alors un problème de persuasion ? Plus que de raisonnement ? La « qualité » donnée à celui qui justifie (adulte référent, « bon » élève, etc.) influence alors le choix des participants ?
- Ce type de problème est très peu enseigné (composition de transformations) et

donc très peu maîtrisé structurellement. Il n'est donc pas « reconnu » comme tel, ce qui complique la mise en place de stratégies pour résoudre ou pour expliciter la démarche. Il est très ardu d'expliciter de manière très structurée et progressive ce que l'on ne connaît pas bien.

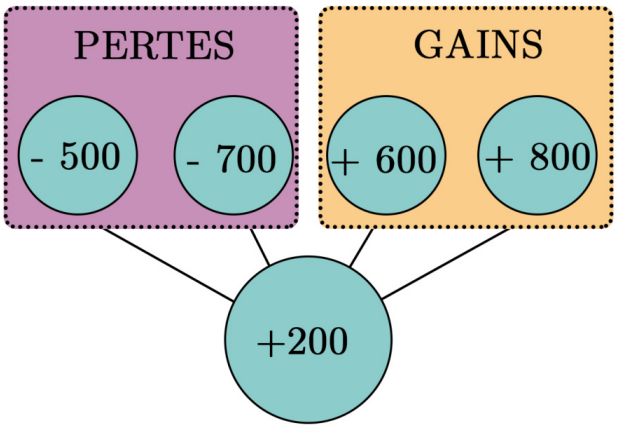
Ce même problème a été donné par la suite à d'autres adultes et la gamme de réponses était sensiblement la même :

Perte 300 €	Perte 200 €	Gain /Perte 0 €	Gain 100 €	Gain 200 €
5%	10%	20%	30%	35%

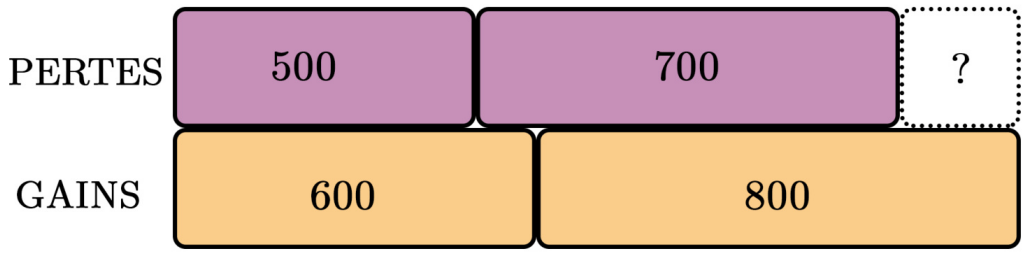
Néanmoins, lors de l'explicitation des stratégies, la justification par modélisation a été proposée aux participants :



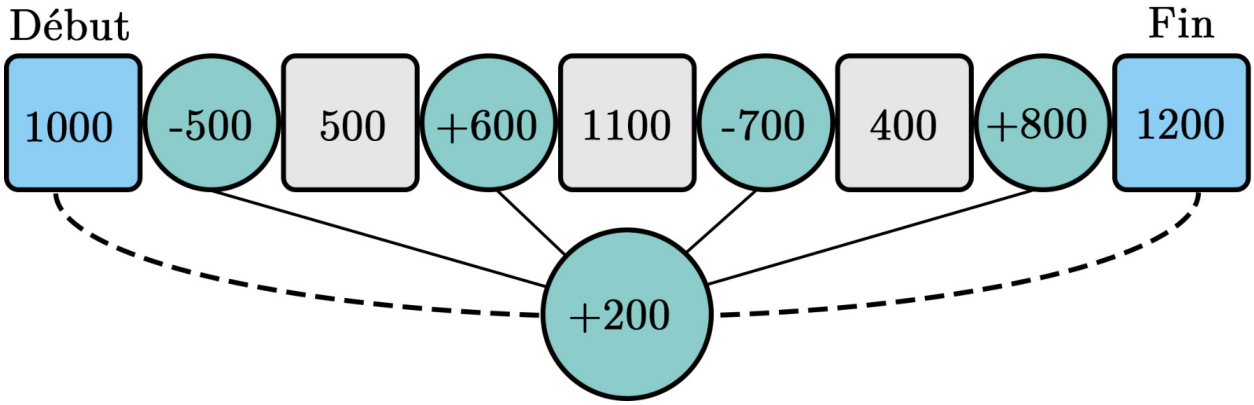
Le codage est le même que dans les fichiers des élèves. On peut voir les transformations successives avec les pertes et les gains ainsi que la transformation globale. Un groupement des transformations est proposé pour accroître la visibilité des éléments.



Une modélisation en barre est également envisageable de manière à bien montrer les relations entre les quantités et expliquer comment aboutir à la solution :



Enfin, il est également possible d'ajouter des états initiaux et finaux aux transformations successives pour faciliter encore plus la compréhension de la situation :



Ces explicitations structurées et progressives accompagnent la justification orale d'une démarche de résolution. Elles montrent les relations de façon claire, simple et abordable pour tous. Elles permettent de faire voir l'implicite de la situation en évacuant la difficulté liée à la surface du problème pour ne travailler que la structure interne. Suite à cela, les participants ont pu modifier leurs choix :

Perte 300 €	Perte 200 €	Gain /Perte 0 €	Gain 100 €	Gain 200 €
0%	0%	0%	0%	100%

Plusieurs analyses possibles :

- Celui qui explicite est très convaincant.
- La démonstration est structurée, explicite et donc convaincante.
- La modélisation, très visuelle, rend abordable des concepts et permet de faire voir la structure cachée.
- La modélisation permet donc aux participants de voir leurs possibles erreurs et mauvaises interprétations et de comprendre pourquoi.
- Changer de solution et accepter son erreur est plus acceptable si la charge de la preuve est très forte.

Il y aurait d'autres analyses à tirer de cette petite expérience comme le fait de confronter les solutions des élèves pour faire émerger la « bonne solution » alors qu'ils sont encore des débutants et qu'ils n'ont pas la possibilité de justifier de manière aussi structurée et rationnel. Même avec un public d'adulte, plus expert pourtant, c'est très difficile. Il faut donc un garant (enseignant ou élève expert par exemple) de l'exactitude, capable de faire parler les implicites, capable de montrer les structures pour appuyer les raisonnements et stratégies de résolution.

12 Bibliographie, webographie

Note de l'auteur : Cette bibliographie n'est pas encore finalisée même si elle donne à lire un panel très large d'ouvrages, recherches et articles. Il en va de même avec la webographie.

ARCHER A. L., HUGHES C. A., Explicit Instruction: Effective and Efficient Teaching 2011 The Guilford Press.

BISSONNETTE S., RICHARD M., GAUTHIER C., BOUCHARD C.,Quelles sont les stratégies d'enseignement efficaces favorisant les apprentissages fondamentaux auprès des élèves en difficulté de niveau élémentaire ? Résultat d'une méga-analyse. Revue de Recherche Appliquée sur l'Apprentissage Vol. 3, article 1, 2010

BISSONNETTE S., RICHARD M., GAUTHIER C., "Interventions pédagogiques efficaces et réussite scolaire des élèves provenant de milieux défavorisés", Steve Bissonnette, Mario Richard et Clermont Gauthier, *Revue française de pédagogie,* n° 1 5 0 , janvier-mars 2005.

BISSONNETTE S., RICHARD M., GAUTHIER C., Enseignement Explicite et réussite des élèves. La gestion des apprentissages. De Boeck, 2015

BISSONNETTE S., RICHARD M., GAUTHIER C., Echec scolaire et réforme éducative, Les presses de l'Université Laval. 2005

BRISSIAUD R. (1998), Le progrès en arithmétique : continuités et ruptures avec l'expérience quotidienne. L'articulation entre le calcul et la résolution de problèmes : quatre attitudes pédagogiques. Livre du maître du manuel scolaire " j'apprends les maths " CM1, pp4-27. Ed. Retz. Paris.

BROUSSEAU G. (1989), RDM 9/3, La pensée sauvage éditions, p.327. Grenoble.

BROUSSEAU G. (1998), Théorie des situations didactiques. p 73. La pensée sauvage, éditions, Grenoble

BUTLEN D., PEZARD M. (2000) Calcul mental et résolution de problèmes numériques au début du collège, Revue Repères Inter-IREM, Paris, pp.5-24.

CHANQUOY L, TRICOT A, SWELLER J., *La charge cognitive, théorie et applications.* Armand colin

CHEVALLARD Y., BOSCH M., 2000-2001, *Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I : Une Atlantide oubliée*, Petit x n°55, pp. 5-32, IREM de Grenoble

CRAHAY M. (2000). – L'école peut-elle être juste et efficace ? Bruxelles : De Boeck Université.

DUPAIS A., Thèse Apprentissage en résolution de problèmes : influence du mode

d'instruction, Université de Franche-Comté, 2011. Français

DUPRIEZ V., DRAELANTS H., Classes homogènes versus classes hétérogènes : les apports de la recherche à l'analyse de la problématique. Revue Française de Pédagogie, n° 148, juillet-août-septembre 2004

DUVERT R., Faut-il mettre les unités dans les calculs ?APMEP no 436

ENGELMANN S., CARNINE D., Theory of Instruction: Principles and applications, Nifdi Press 1991

FARENG R. L'apprentissage du calcul avec les enfants de 4 à 7 ans (1966) Nathan

GAUTHIER C., Pour une théorie de la pédagogie. Recherches contemporaines sur le savoir des enseignants. Les presses de l'Université Laval. 1997

GAUTHIER C.,"Qu'est-ce qu'un bon prof ?", Clermont Gauthier, *Sciences Humaines,* hors-série spécial. n° 5, 2006.

GICK M. L., HOLYOAK K. J., (1980) Analogical problem solving, *Cognitive Psychology, 12*, 306-355

GICK M. L., HOLYOAK K. J., (1983) Schema induction and analogical transfer, *Cognitive Psychology, 15*, 1-38

GRAFF O., WOZNIAK B. Situations multiplicatives, problèmes de multiplication et de division. Ed SCEREN.

HATTIE J., Visible Learning for teachers, Routledge, 2012

HATTIE J., L'apprentissage visible pour les enseignants, Presses de l'Université du Québec, 2017

HOUDEMENT C. Catégorisation des problèmes additifs, difficultés liées à la place de la question *Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques – Cahors 1991*

JULO J. (1995), Représentation des problèmes et réussite en mathématiques, éditions PUR

KIRSCHNER P. A., SWELLER J., CLARK R. E., Putting students on the path to learn, the case for fully guided instruction. American Educator, Printemps 2012

KIRSCHNER P. A., SWELLER J., CLARK R. E., (2006) Why Minimal Guidance During Instruction Does Not Work: An Analysis of the Failure of Constructivist, Discovery, Problem-Based, Experiential, and Inquiry-Based Teaching, Educational Psychologist, 41:2, 75-86, DOI: 10.1207/s15326985ep4102_1

LEVAIN J. P., LE BORGNE P., SIMARD A., « Apprentissage de schémas et résolution de problèmes en SEGPA », *Revue française de pédagogie* [En ligne], 155 | avril-juin 2006, mis en ligne le 25 novembre 2010, consulté le 01 février 2017. http://rfp.revues.org/252 ; DOI : 10.4000/rfp.252

NOGRY S., DIDIERJEAN A., Les erreurs commises lors de la résolution du problème

source favorisent-elles le transfert…, Psychologie française (2007), doi: 10.1016/j.psfr.2006.12.006.

ROSENSHINE B., Principles of Instruction. Research-Based stratégies that all teachers should know. American Educator Spring 2012

SLAVIN, R.E., & Lake, C. (2007). Effective programs in elementary math: A best evidence synthesis. Baltimore, MD: Johns Hopkins University, Center for Data-Driven Reform in Education. Available : http://www.bestevidence.org/word/elem_math_Feb_9_2007.pdf

SLAVIN, R. E. (2010). Apprentissage coopératif : pourquoi ça marche? In H. Dumont, D. Istance, & F. Benavides (Eds.), Comment apprend-on? La recherche au service de la pratique (pp. 171-189). Paris, France: Éditions OCDE

SWELLER J., Cognitive Load During Problem Solving: Effects on Learning COGNITIVE SCIENCE 12, 257-285 (1988)

VEENMAN S., Cognitive and Noncognitive Effects of Multigrade and Multi-Age Classes: A Best-Evidence Synthesis. Review of Educational Research Winter 1995, Vol. 65, No. 4, pp. 319-

VERGNAUD G. (1991), La théorie des champs conceptuels, RDM 10.2.3. La pensée sauvage, éditions, Grenoble

WILLINGHAM D. *why don't students like school ? « Pourquoi les enfants n'aiment pas l'école »* 2010 Librairie des écoles.

WILLINGHAM D. How Educational Theories Can Use Neuroscientifi c Data 2007 MIND, BRAIN, AND EDUCATION, 1, 140-149

http://histoiredechiffres.free.fr/tests%20de%20logique/9%20double%20prop.htm

http://www.ac-grenoble.fr/ien.g3/IMG/pdf_Complexe_dernier.pdf

http://www.education.auckland.ac.nz/en/about/staff/j.hattie.html

https://visible-learning.org/nvd3/visualize/hattie-ranking-interactive-2009-2011-2015.html

http://visible-learning.org/

http://www.education.gouv.fr/pid25535/bulletin_officiel.html?cid_bo=80467

http://cache.media.education.gouv.fr/file/MEN_SPE_11/67/3/2015_programmes_cycles234_4_12_ok_508673.pdf

http://cache.media.education.gouv.fr/file/MEN_SPE_11/67/3/2015_programmes_cycles234_4_12_ok_508673.pdf

http://www.keepeek.com/Digital-Asset-Management/oecd/education/resultats-du-pisa-2015-volume-ii_9789264267558-fr#.WnXzyKjiaUk

http://www.cafepedagogique.net/lexpresso/Pages/2017/03/28032017Article636262836215283914.aspx

https://en.wikipedia.org/wiki/Robert_J._Marzano

https://www.aft.org/sites/default/files/periodicals/Rosenshine.pdf

https://en.wikipedia.org/wiki/Siegfried_Engelmann

https://www.nifdi.org/what-is-di/project-follow-through

https://teacherhead.com/2018/06/10/exploring-barak-rosenshines-seminal-principles-of-instruction-why-it-is-themust-read-for-all-teachers/

https://www.researchgate.net/publication/232547229_Bahrick_HP_Hall_LK_Lifetime_maintenance_of_high_school_mathematics_content

https://educationendowmentfoundation.org.uk/tools/guidance-reports/metacognition-and-self-regulated-learning/

https://www.lalibrairiedesecoles.com/methode-singapour/

https://www.mathplayground.com/thinkingblocks.html

https://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=128735

https://www.lalibrairiedesecoles.com/methode-singapour/

http://centre-alain-savary.ens-lyon.fr/CAS/mathematiques-en-education-prioritaire/reportage-argenteuil

https://buildingmathematicians.wordpress.com/2017/09/28/co-teaching-in-math-class/

http://ia89.ac-dijon.fr/docs/refondation/pmqc_resolution_problemes_gresilles.pdf

http://ia89.ac-dijon.fr/docs/refondation/pmqc_progression_problemes.pdf

http://www.ac-grenoble.fr/ien.bonneville/IMG/pdf/Vergnaud_champ_additif.pdf

http://mathematiques21.ac-dijon.fr/sites/mathematiques21.ac-dijon.fr/IMG/pdf/Problemes_multiplicatifs_cycle3.pdf