

La vache et le paysan

Hervé Péault

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques- Cahors 1991.

Cet article présente un compte rendu d'activité menée en formation initiale et continue.

A partir de la résolution d'un problème, les participants sont invités à se convaincre mutuellement de la justesse de leurs solutions. L'activité et le débat qui suit permettent d'aborder les thèmes de la résolution de problèmes, de la démonstration, de l'analyse des erreurs, ainsi éventuellement que celui des situations additives.

Contexte

J'ai utilisé 5 ou 6 fois cette activité, en formation initiale et en formation continue, sur une durée de 2 h ou 3h.

Elle me semble être une bonne activité introductive dans le cadre d'une formation. Elle permet de soulever divers points de didactique, notamment les problèmes de formulation d'une argumentation, de validation par la démonstration, d'analyse et de compréhension des erreurs ... Ce peut en outre être un support intéressant pour l'étude d'une typologie des situations additives.

Particularité

Le problème de départ a ceci de particulier qu'il paraît très simple mais qu'il est fréquent que les gens trouvent des solutions erronées sans qu'il soit pour autant toujours facile d'en montrer la fausseté.

Le Problème

"Un paysan se rend au marché. Il achète une vache 5000 F. Il la revend 6000 F. Se ravisant, il la rachète 7000 F. Il la revend de nouveau 8000 F.

A-t-il gagné de l'argent, et dans ce cas combien ? A-t-il perdu de l'argent, et dans ce cas combien ? Ou n'a-t-il rien gagné ni perdu ?"

Déroulement

Les lignes générales de ce déroulement sont annoncées avant l'énoncé du problème.

- 1) Chacun cherche seul pendant 5 à 10 minutes.

Démarches de formation

- 2) Chacun, tour à tour, indique sa conclusion. Les différentes solutions sont notées au tableau, sans commentaires avec le nombre de personnes les ayant retenues.
- 3) Un représentant de chacune des solutions expose son argumentation (plusieurs si d'autres estiment avoir procédé différemment), de préférence en notant sur le tableau. Les autres peuvent poser des questions, mais uniquement pour chercher à comprendre l'argumentation, en évitant d'opposer des objections.
- 4) Sondage : pour chacune des solutions, on demande combien sont convaincus de sa justesse.
- 5) Pour chacune des solutions qui ont été proposées, la parole est à ceux qui veulent contre-argumenter.
- 6) Nouveau sondage sur les convictions quant aux solutions proposées.
- 7) Les échanges continuent, jusqu'à ce que tous s'estiment convaincus de la justesse de l'une des solutions mais aussi de la fausseté des autres (ou jusqu'à une heure fixée si cette condition n'est pas remplie...)
- 8) Débat didactique sur l'activité elle-même.

Remarques

a) J'annonce dès le départ que je n'interviendrai à aucun moment sur la validité des argumentations, que ce n'est pas moi mais les autres qu'il faut convaincre et que je ne fais que diriger le débat pour permettre à chacun de s'exprimer.

L'engouement des participants est en général assez fort et il est quelquefois difficile de canaliser le flot des argumentations et contre-argumentations.

b) L'activité "tombe" si tout le monde trouve d'emblée la solution correcte. Cela ne m'est jamais arrivé (j'avais prévu, dans cette éventualité, de semer le doute en présentant moi-même une solution erronée), mais ce n'est sans doute pas à exclure.

(Pour n participants dans un groupe, le nombre de solutions correctes trouvées du premier coup a varié entre $n/4$ et... $n-1$; dans ce dernier cas, la personne isolée s'est défendue avec acharnement...)

Exemple de propositions

Le tableau ci-dessous donne, à titre d'exemple, l'évolution des convictions (le plus large éventail que j'ai obtenu) à l'intérieur d'un groupe de 17 instituteurs, particulièrement animé.

colonne A : propositions après recherche individuelle.

colonne B : convictions après exposé des premières argumentations.

colonne C : convictions après exposé des premières contre-argumentations.

	A	B	C
Ni gain ni perte	5	3	1
Gain de 1000 F	6	1	1
Gain de 2000 F	5	5	11
Gain de 3000 F	1	0	0
Ne sait pas	0	8	4

Dans un autre groupe est apparue aussi au départ l'affirmation "*ça dépend de la somme initiale dans son portefeuille*". Cette affirmation revient d'ailleurs souvent dans les autres groupes, au cours des argumentations.

Exemples d'argumentations

Voici un résumé simplifié des argumentations les plus fréquemment apparues :

"Ni gain ni perte"

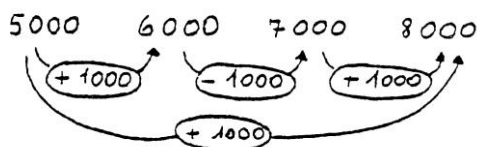
- "gain de 1000 F entre premier achat et première vente, gain de 1000 F entre deuxième achat et deuxième vente, perte de 2000 F entre le premier et le second achat, donc solde nul. Les bénéfices de 1000 F sont annulés par l'augmentation de 2000 F d'un achat à l'autre. "

- "8000 F - 6000 F = 7000 F - 5000 F. Même différence entre les prix d'achat et de vente, donc ni gain ni perte."

"Gain de 1000 F"

- "entre premier achat et première vente, gain de 1000 F; entre première vente et second achat, perte de 1000 F ; entre second achat et seconde vente, gain de 1000 F ; bilan : gain de 1000 F".

- même raisonnement s'appuyant sur un schéma du type :



Démarches de formation

"Gain de 3000 F"

- Il y a un état initial et un état final comparables (il arrive sans vache, il repart sans vache). Peu important donc les étapes intermédiaires. Il achète 5000F au départ et vend 8000 F à la fin. D'où un bénéfice de $8000\text{ F} - 5000\text{ F} = 3000\text{ F}$.

"Perte de 3000 F"

- "Argent engagé : 5000 F. Première transaction : gain de 1000 F. Deuxième transaction : gain de 1000 F. Solde : $1000 + 1000 - 5000 = -3000$ "

"Gain de 2000 F "

- gain de 1000 F à la première vente, gain de 1000 F à la deuxième vente, donc gain total de 2000 F

- il a dépensé $5000\text{ F} + 7000\text{ F} = 12000\text{ F}$; il a encaissé $6000\text{ F} + 8000\text{ F} = 14000\text{ F}$; gain de 2000 F

- supposons qu'il ait 7000 F en poche. Il achète 5000 F, il lui reste 2000 F ; il vend 6000 F, il a donc 8000 F ; etc..

- comme la précédente avec présentation sous forme d'un cahier de comptabilité avec les rubriques "report caisse", "recettes", "dépenses", "caisse".

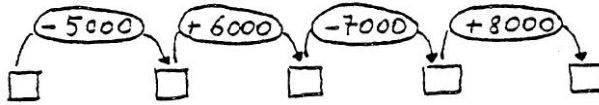
Remarques sur les argumentations

Les suppositions sur l'argent initial en poche ont entraîné une discussion sur la légitimité d'une telle supposition. C'est souvent à l'occasion de ce débat que des participants proposent de simuler la situation (il y en a toujours un prêt à jouer le rôle de la vache...) avec de la monnaie de papier ou aussi avec un carnet de chèques pour montrer l'indépendance par rapport à l'avoir initial. Jusqu'à ce que quelqu'un propose d'appeler "x" cet avoir initial et effectue un calcul littéral.

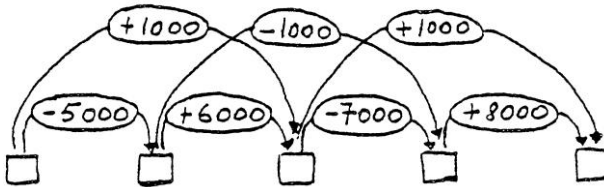
Le plus souvent, les participants sont assez vite persuadés que la solution "gain de 2000 F est la bonne, mais en avouant qu'ils ne voient pas ce qui cloche dans l'exposé de la solution "gain de 1000 F" ; et l'essentiel du débat d'argumentation vise à montrer que les argumentations voulant prouver un gain de 1000 F sont fausses. Ceux qui pensent l'avoir compris essaient de convaincre les autres mais en revenant le plus souvent à une autre argumentation montrant la justesse de la solution "gain de 2000 F" et la question est sans cesse reposée : *"Ça, on voit bien, mais on ne voit toujours pas ce qui ne va pas dans l'argumentation pour le gain de 1000 F"*.

Une contre-argumentation a eu un effet sur une partie du public, mais sans convaincre tout le monde : *" il suffit de considérer que la première fois il a acheté une première vache, et que la seconde fois c'est une autre vache ; ça ne change rien au problème, mais ça montre qu'il n'est pas légitime de prendre en compte une perte de 1000 F entre la première vente et le second achat"*.

Les difficultés à rejeter la solution "gain de 1000 F viennent essentiellement d'une confusion entre "états" et "transformations". Une seule fois quelqu'un a emporté la conviction de tous en proposant un schéma du type



et en interprétant la solution « gain de 1000 F » comme une composition erronée de transformations :



Prolongement didactique

- Lorsqu'on décide d'arrêter pour ne pas dépasser l'heure fixée (je prévois en général 1 heure avec une tolérance d'une petite demi-heure supplémentaire, "jusqu'à la pause" pour les séances de 3 h) et que des participants doutent encore, ils me demandent toujours de prendre position. J'ai choisi dans ce cas de présenter la classification des situations additives de G. VERGNAUD¹, à charge pour eux, s'ils le jugent utile, de reprendre le problème en le resituant dans cette typologie. Il me semble que ce problème pourrait être un bon support pour une étude plus détaillée des situations additives.

J'essaie de mener un débat à partir des questions :

"que pensez-vous de cette activité ?"

"comment analysez-vous l'évolution de vos convictions ?"

"était-il nécessaire que je ne prenne pas position sur le fond ?"

"plus généralement comment concevez-vous l'activité de résolution de problème dans la classe ?"

¹ Vergnaud et al., « Le moniteur de mathématiques – Résolution de problèmes », Livre du maître, Nathan, 1997.

Démarches de formation

... et de celles qui sont posées par les participants, comme celle-ci qui arrive chaque fois :

"que doit-on exiger comme rédaction de la part des enfants ?"...

C'est l'occasion d'exprimer voire de développer des idées telles que :

- faire des mathématiques c'est d'abord résoudre des problèmes
- le rôle du conflit socio-cognitif
- la non linéarité de l'apprentissage et l'existence de phases de régression
- la démonstration est au cœur de l'activité mathématique
- dire à quelqu'un qu'il se trompe et lui indiquer une bonne solution est inopérant si on ne l'aide pas à prendre conscience de ses erreurs.

Ce dernier point, avec les instituteurs en FC, fait en général surgir des exemples et des questions : *"J'ai tel élève, j'ai beau lui expliquer, il ne comprend pas telle chose et fait toujours les mêmes erreurs..."*. Nous n'apportons pas en général de réponses simples à ces questions, mais le lien avec l'expérience vécue sur le problème précédent aide à accrédiiter l'idée que les erreurs ne sont pas forcément des marques de paresse ou d'inintelligence et que leur traitement passe par leur analyse et leur compréhension.