Les nombres : ordinal et cardinal

samedi, 31 mars 2012 / **André Gramain, IUFM de Lyon**

En grammaire, on nous enseigne qu'il y a les numéraux cardinaux (les trois mousquetaires) et les numéraux ordinaux (le troisième homme).

1. Le dictionnaire

Cherchons dans le dictionnaire (Le petit Robert, 2003) :
- ORDINAL : Qui marque l'ordre, le rang. Nombre ordinal, qui désigne le rang d'un nombre cardinal. […] GRAMM se dit d'un adjectif numéral qui exprime le rang d'un élément dans un ensemble […]

Cherchons donc « cardinal ». Après les princes de l'église et les vertus cardinales, on trouve les nombres :
- CARDINAL : […] Nombres cardinaux (opposé à nombres ordinaux) : nombres désignés successivement par 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 en numération décimale. — N.m. extension de la notion de nombre aux éléments d'un ensemble fini. *Les cardinaux finis forment l'ensemble* N *des entiers naturels. Le cardinal d'un ensemble fini est le nombre de ses éléments.* […]

Ça ne nous éclaire guère et ça donne envie de chercher la définition de « salade ».

Cherchons plutôt l'article « nombre » ; il y en a toute une colonne ; voici comment ça commence :
- NOMBRE : Concept de base des mathématiques, une des notions fondamentales de l'entendement que l'on peut rapporter à d'autres idées (de pluralité, d'ensemble, de correspondance), mais non définir […]

Là, voilà des idées à retenir : c'est un concept fondamental de l'entendement et ça ne se définit pas. C'est bien un concept fondamental et on sait s'en servir sans avoir à le définir.

C'est un peu comme le poids d'un objet : on sait comparer des poids, ajouter des poids, mais c'est un concept difficile à définir. Pour les nombres, on sait les comparer, on s'en sert pour évaluer des grandeurs, et on peut aussi calculer avec les nombres (ce sont les opérations, on y reviendra).

2. Les mathématiciens

Un physicien étudie la trajectoire d'un projectile en tenant compte de sa masse et des forces auxquelles il est soumis ; c'est un *modèle* de la réalité sensible : on n'a jamais vu avec yeux de masses ni de forces. De même, les mathématiciens travaillent sur des constructions théoriques ou axiomatiques.

Avant le XIX-ème siècle, les mathématiciens se souciaient peu de l'axiomatique, sauf en Géométrie où il est bien apparent que l'on travaille sur des modèles. On se contentait de l'approche plus ou moins intuitive des nombres par Euclide (300 av. notre ère) pour qui :
- *L'unité est ce selon quoi chacune des choses existantes et dite une.*
- *Un nombre est un assemblage composé d'unités.*

Le XIX-ème siècle a été celui des législateurs des mathématiques. On s'est interrogé sur la légitimité de l'axiomatique de la Géométrie léguée par Euclide. Puis Cauchy, Dedekind, Weierstrass ont voulu axiomatiser l'Analyse. Les deux derniers se sont attaqués à la définition des nombres réels (rationnels, algébriques ou transcendants) [1]

Les nombres entiers restaient comme des données de base, intuitives, jusqu'à ce qu'on formalise un modèle, ou plutôt deux modèles, des nombres entiers. Et, rien d'étonnant à ce qu'il y ait deux modèles, l'un est celui des nombres ordinaux et l'autre celui des nombres cardinaux.

3. Le modèle de Peano

Giuseppe Peano (1858-1932) publie en 1889 l'ouvrage *Arithmetices principia, nova methodo exposita*, où il donne les axiomes définissant l'ensemble des nombres entiers.

1. L'élément appelé zéro [2] et noté 0, est un nombre entier.
2. Tout nombre entier a un unique successeur.
3. Aucun nombre entier n'a 0 pour successeur.
4. Deux nombres entiers ayant même successeur sont égaux.
5. Si un ensemble de nombres entiers contient 0 et contient le successeur de chacun de ses éléments, alors c'est l'ensemble de tous les nombres entiers.

On reconnaît bien que c'est une description des nombres que nous connaissons. Ce sont bien les nombres ordinaux. On part de zéro (axiome 1) qui est le premier (axiome 3) et on avance (axiome 2). On peut revenir en arrière (axiome 4) sauf évidemment de zéro, et on obtient tous les nombres (axiome 5). Cet axiome 5 qui nous parait très clair est le support des « démonstrations par récurrence » qui présentent tant de difficultés pour les lycéens.

Mais ce n'est pas une simple description qu'a voulu écrire Giuseppe Peano. Il démontre que deux systèmes ayant ces 5 propriétés sont isomorphes. Autrement dit, les 5 axiomes définissent un unique système de nombres ordinaux. Mais cela ne dit pas si un tel système existe. C'est là que le nombre cardinal vient à notre secours.

4. Les ensembles

On se souvient de l'incursion du vocabulaire de la théorie des ensembles dans l'enseignement primaire et secondaire français entre 1970 et 1985, sous le nom de « mathématiques modernes ». Pas si modernes que cela puisque la théorie était centenaire.

Pour étudier finement l'analyse des nombres réels, Georg Cantor (1845-1918) et d'autres ont été amenés à construire l'abstraction de la théorie des ensembles et ont été confrontés aux paradoxes de la théorie ainsi construite.

L'intérêt pour nous, c'est la *correspondance terme à terme*. On dit que deux ensembles ont le même cardinal (comprendre : le même nombre d'éléments) s'il existe une correspondance terme à terme entre les éléments de l'un et les éléments de l'autre. On se restreint aux ensembles finis [3]. Le nombre est alors ce qu'il y a en commun à tous les ensembles qui ont même cardinal.

L'intérêt du nombre cardinal, c'est que les opérations se définissent facilement. Par exemple la somme de deux nombres cardinaux, c'est le cardinal de la réunion de deux ensembles disjoints. On peut alors démontrer que l'ensemble des nombres cardinaux satisfait bien aux cinq axiomes de Peano : le successeur du nombre n est le nombre $n+1$. C'est la rencontre, au plus haut niveau, du nombre ordinal et du nombre cardinal.

A-t-on maintenant une construction solide ? Eh bien non ! En 1931, le logicien Kurt Gödel (1906-1978) démontre qu'on ne peut pas démontrer, dans le système de l'arithmétique, que l'arithmétique est cohérente. Cela signifie, en gros, qu'on ne peut pas affirmer qu'il y a un modèle des nombres cardinaux, pas plus que des nombres ordinaux. Cela n'a pas trop inquiété les mathématiciens qui faisaient depuis des siècles des mathématiques sans se soucier des fondements, et qui continuent à le faire.

Ne nous inquiétons pas non plus. Retenons seulement que les mathématiciens du XIX-ème siècle ont construit deux modèles et que ces deux modèles se rencontrent.

5. Jean Piaget et Rochel Gelman

Les travaux de ces deux psychologues, Jean Piaget (1896-1980) et Rochel Gelman (1942-), ont fait progresser la connaissance des processus des apprentissages numériques des enfant de 3 à 6 ans.

Jean Piaget [4], sans doute influencé par l'actualité structuraliste et sa lecture de l'ouvrage de Russel et Whitehead sur les fondements logiques des mathématiques, privilégie le nombre cardinal. Il juge primordiale l'acquisition de *la conservation des grandeurs*, favorisée par des opérations logiques prénumériques sur les collections comme la correspondance terme à terme. Il affirme que la connaissance de la suite numérique (c'est-à-dire du nombre ordinal) est un leurre.

Rochel Gelman [5], au contraire analyse une rencontre précoce du nombre ordinal et du nombre cardinal : dénombrer les objets d'une collection en les comptant un à un. Elle discerne cinq aptitudes mises en jeu dans cette opération. Cette description semble définitivement admise par tous pour décrire le dénombrement par comptage. Là où il y a débat, c'est pour savoir si ces aptitudes sont innées ou acquises. Le point de vue de Rochel Gelman et de Charles Gallistel est qu'elles sont innées, mais peu nous importe. Voici ces aptitudes que l'usage est d'appeler les cinq principes de Rochel Gelman :

1. **L'adéquation unique** : c'est la mise en correspondance de chaque objet décompté avec une seule « étiquette verbale » (dès 2 ans et demi).
2. **L'ordre stable** : la suite des étiquettes verbales (un, deux, trois, ...) est fixe et immuable (apparaît à 3 ans).
3. **Le principe cardinal** : la dernière étiquette formulée énonce le cardinal de la collection (vers 4 ans).
4. **L'abstraction** : l'hétérogénéité ou l'homogénéité des objets composant la collection n'a pas d'incidence sur le dénombrement (dès l'apparition du langage).
5. **La non pertinence de l'ordre** : l'amorce du décompte à un point ou à un autre de la collection n'a pas d'incidence sur les résultats (vers 4 ans).

6. Rémi Brissiaud

Dans son petit livre [6], ainsi que dans divers articles au ton assez vif, Rémi Brissiaud critique la pratique précoce du dénombrement par comptage de Rochel Gelman. Il craint que les mots de la suite numérique, apprise par cœur, perdent leur signification de nombre, et ne soient finalement que des *numéros*.

Il recommande de donner un « sens arithmétique » aux nombres le plus précocement possible. Qu'est-ce que c'est qu'un sens arithmétique ? C'est que les nombres se décomposent : deux, c'est un et un ; trois, c'est un et deux, ou bien un et un et un. Le manuel de CP de cet auteur [7], comme son livre à calculer pour la GS, privilégient la décomposition des nombres. Il recommande, en PS, de ne pas aborder les nombres au-delà de trois, avant que le concept de nombre (ordinal, cardinal, décomposable [8]) soit consolidé sur les trois premiers nombres.

[1] Les nombres rationnels sont les nombres entiers ou fractionnaires comme 3 ou 2/3 ; les nombres algébriques sont les solutions d'équations algébriques à coefficients entiers comme $\sqrt{2}$ ou comme le nombre d'or, les nombres transcendants sont les autres comme π ou e.

[2] On voit que, pour Peano, le premier nombre est zéro, alors que, pour Euclide, c'est deux. Raisonnablement, pour un enfant, on commence par un. Le nombre zéro ne sera nécessaire que dans les soustractions posées, où lesnombres perdent leur signification concrète. Il me semble illusoire de vouloir donner un sens à « 8 bonbons plus ou moins 0 bonbon » .

[3] Il faut bien définir ce qu'est un ensemble fini avant d'avoir défini le nombre. On peut dire qu'un ensemble est fini si son cardinal change quand on lui adjoint un élément supplémentaire.

[4] PIAGET (Jean) et SZEMINSKA (Alina), *La genèse du nombre chez l'enfant*, Paris, PUF, 1941

[5] GELMAN (Rochel) & GALLISTEL (Charles R), *The Child's understanding of number*, Cambridge, Oxford university press, 1978

[6] BRISSIAUD (Rémi), Premiers pas vers les maths, Retz, Paris, 2007, 95 pp

[7] BRISSIAUD (Rémi), OUZOULIAS (André), CLERC (Pierre), J'apprends les maths avec Picbille, Retz, Paris, 2002

[8] c'est moi qui précise et qui rappelle ces trois aspects ; en réalité Brissiaud travaille surtout les propriétés arithmétiques du nombre cardinal

En visitant notre site Internet, vous pourrez télécharger ces documents :
• Télécharger l'article au format PDF, (PDF - 85 ko)