Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée

R. Duval

Abstract. That mathematical knowledge can be represented under different semiotic forms is very often pointed. But very few studies focus on the operation of changing the semiotic form through a knowledge is represented. However, it is a basic cognitive operation. Irreductible to any processing pattern, it seems strongly related to the understanding processes and to the difficulties of conceptual learning. It causes obstacles that only the coordination of various registers of semiotic forms helps to overcom.
The aim of this paper is to show the central place of the ability to change the register of any semiotic representation in the learning of mathematics. For that we shall tackle three topics. First, many of the difficulties encountered by students at diffent levels of their curriculum can be decribed and explained as a lack of ccordination of register of representation. Secondly, conceptual knwolegde is like the invariant of manifold semiotic representations. Thirdly, by taking into account different registers of representation we can define independent variables specific to cognitive contents, and so organize didactical sequences in order to develop the coordination of registers of representation.

Il y a un mot à la fois important et marginal en mathématiques, c'est le mot "représentation". Il est le plus souvent employé sous sa forme verbale, "représenter". Une écriture, une notation, un symbole représentent un objet mathématique: un nombre, une fonction, un vecteur, ... De même les tracés et les figures représentent des objets mathématiques: un segment, un point, un cercle,... Cela veut dire que les objets mathématiques ne doivent jamais être confondus avec la représentation qui en est faite. En effet, toute confusion entraîne, à plus ou moins long terme, une perte de compréhension et les connaissances acquises deviennent vite inutilisables hors de leur contexte d'apprentissage: soit par non-rappel soit parce qu'elles restent des représentations "inertes" ne suggérant aucun traitement. La distinction entre un objet et sa représentation est donc un point stratégique pour la compréhension des mathématiques. Et ce point est si impor-

© Annales de Didactique et de Sciences Cognitives
5 (1993) (p.37-65) - IREM de Strasbourg

tant qu' un des auteurs les plus sérieux de manuel n'a pas hésité à faire de cette distinction le thème récurrent de son ouvrage pour les élèves de quatrième: c'est l'objet représenté qui importe et non pas ses diverses représentations sémiotiques possibles (Deledicq & Lassave1979).

Néanmoins, les diverses représentations sémiotiques d'un objet mathématique sont absolument nécessaires. En effet, les objets mathématiques ne sont pas directement accessibles dans la perception, ou dans une expérience intuitive immédiate, comme le sont les objets communément dit "réels" ou "physiques"! Il faut donc pouvoir en donner des représentants. Et, en outre, la possibilité d'effectuer des traitements sur les objets mathématiques dépend directement du système de représentation sémiotique utilisé. Il suffit de considérer le cas du calcul numérique pour s'en convaincre: les procédures, et leur coût, dépendent du système d'écriture choisi. Les représentations sémiotiques jouent un rôle fondamental dans l'activité mathématique.
Nous sommes donc en présence de ce qu'on pourrait appeler le paradoxe cognitif de la pensée mathématique: d'une part, l'appréhension des objets mathématiques ne peut être qu'une appréhension conceptuelle et, d'autre part, c'est seulement par le moyen de représentations sémiotiques qu'une activité sur des objets mathématiques est possible. Ce paradoxe peut constituer un véritable cercle pour l'apprentissage. Comment des sujets en phase d'apprentissage pourraient-ils ne pas confondre les objets mathématiques avec leurs représentations sémiotiques s'ils ne peuvent avoir affaire qu'aux seules représentations sémiotiques? L'impossibilité d'un accès direct aux objets mathématiques, en dehors de toute représentation sémiotique rend la confusion presqu'inévitable. Et, à l'inverse, comment peuvent-ils acquérir la maîtrise des traitements mathématiques nécessairement liés aux représentations sémiotiques s'ils n'ont pas déjà une appréhension conceptuelle des objets représentés? Ce paradoxe est d'autant plus fort que l'on identifie activité mathématique et activité conceptuelle et que l'on considère les représentations sémiotiques comme secondaires ou extrinsèques.

On ne prête guère d'attention à ce paradoxe cognitif de la pensée mathématique dans l'enseignement, tout simplement parce qu'on accorde beaucoup plus d'importance aux représentations mentales qu'aux représentations sémiotiques. Les représentations **mentales** recouvrent l'ensemble des images et, plus globalement, des conceptions qu'un individu peut avoir sur un objet, sur une situation, et sur ce qui leur est associé. Les représentations **sémiotiques** sont des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système de représentation qui a ses contraintes propres de signifiance et de fonctionnement. Une figure géométrique, un énoncé en langue naturelle, une formule algébrique, un graphe sont des représentations sémiotiques qui relèvent de systèmes sémiotiques différents. On considère généralement les représentations sémiotiques comme un simple moyen d' extériorisation des représentations mentales pour des fins de communication, c'est à dire pour les rendre visibles ou accessibles à autrui. Or ce point de vue est trompeur. Les représentations ne sont pas seulement nécessaires pour des fins de communication, elles sont également essentielles pour l'activité cognitive de la pensée. En effet, elles jouent un rôle primordial dans:

— le développement des représentations mentales: celui-ci dépend d'une intériorisation des représentations sémiotiques, au même titre que les images mentales sont une intériorisation des percepts (Vygotsky 1962, Piaget 1968),

— l'accomplissement de différentes fonctions cognitives: la fonction d'objectivation (expression privée) qui est indépendante de celle de communication (expression pour autrui), et la fonction de traitement qui ne peut pas être remplie par les représentations mentales (certaines activités de traitement sont directement liées à l'utilisation de systèmes sémiotiques, par exemple le calcul) ,

— la production des connaissances: les représentations sémiotiques permettent des représentations radicalement différentes d'un même objet dans la mesure où elles peuvent relever de systèmes sémiotiques totalement différents (Benveniste 1974, Bresson 1987). Ainsi le développement des sciences est lié à une développement de systèmes sémiotiques de plus en plus spécifiques et indépendants du langage naturel (Granger 1979).

On ne peut donc pas faire comme si les représentations sémiotiques étaient simplement subordonnées aux représentations mentales, puisque que le développement des secondes dépend d'une intériorisation des premières et que seules les représentations sémiotiques permettent de remplir certaines fonctions cognitives essentielles, comme celle de traitement. Le fonctionnement cognitif de la pensée humaine se révèle inséparable de l'existence d'une diversité de registres sémiotiques de représentation. Si on appelle **sémiosis**[1] l'appréhension, ou la production, d'une représentation sémiotique, et **noésis**[2] l'appréhension conceptuelle

---

[1] σημειον: signe, marque distinctive. σημειωσις: action de marquer d'un signe. Kristeva emploie ce terme pour désigner les production liées à des pratiques signifiantes (art. Sémiologie dans l'Encyclopédia Universalis). De même U. Eco dans Sémiologie et Philosophie du langage (1988).

[2] νοησις: intellection. Platon emploie ce terme pour évoquer les choses qui sont propres à éveiller *l'acte de*

d'un objet, il faut affirmer que la *noésis* est inséparable de la *sémiosis*.

Le paradoxe cognitif de la pensée mathématique et les difficultés qui en résultent pour son apprentissage tiennent au fait qu'**il n'y a pas de *noésis* sans *sémiosis*** alors qu'on veut enseigner les mathématiques comme si la *sémiosis* était une opération négligeable par rapport à la *noésis*. Pourtant il est essentiel, dans l'activité mathématique, soit de pouvoir mobiliser plusieurs registres de représentation sémiotique(figures, graphes, écriture symbolique, langue naturelle, etc....) au cours d'une même démarche, soit de pouvoir choisir un registre plutôt que l'autre. Et, indépendamment de toute commodité de traitement, *ce recours à plusieurs registres semble même une condition nécessaire pour que les objets mathématiques ne soient pas confondus avec leurs représentations et qu'ils puissent aussi être reconnus dans chacune de leurs représentations.* La coordination de plusieurs registres de représentation sémiotique apparaît fondamentale pour une appréhension conceptuelle des objets: il faut que l'objet ne soit pas confondu avec ses représentations et qu'il soit reconnu dans chacune de ses représentations possibles. C'est à ces deux conditions qu'une représentation fonctionne véritablement comme représentation c'est-à-dire qu'elle donne accès à l'objet représenté.

C'est cette liaison forte entre *sémiosis* et *noésis* dans le fonctionnement cognitif de la pensée que nous allons tenter de mettre en évidence. L'apprentissage des mathématiques en constitue un champ privilégié d'étude.
Pour cela, nous examinerons successivement : les différentes activités cognitives constitutives de la *sémiosis*, les raisons pour lesquelles l'appréhension conceptuelle implique la coordination de plusieurs registres de représentation et, enfin, les conditions requises pour favoriser cette coordination et pour organiser un enseignement qui prenne en compte cette liaison forte entre *sémiosis* et *noésis*.

---

concevoir par la pensée. Il ne doit pas être confondu avec διανοια, traduit par "pensée" (République, VII 524 d5, 523d9-e9, 523b1). Aristote l'emploie également pour désigner l'acte de compréhension conceptuelle (Περι ψυχηςIII, 427b17, 430a26: "l'intellection des indivisibles (des notions simples et premières) se rapporte à tout ce qui exclut le risque d'erreur". Il a été transcrit en "noèse" par Husserl pour désigner les pensées et les vécus intentionnels (Idées directrices pour une Phénoménologie)
Nous évitons ici à dessein le termes de "compréhension" parce qu'il peut recouvrir soit l'une ou l'autre des deux formes d'appréhension (*σημειωσις,νοησις)* soit leur fusion Nous éviterons aussi celui d' "abstraction", parce toute sémiosis peut être considérée comme une abstraction au même titre que la noésis. Par certains aspects celui de "conceptualisation" pourrait être accepté. Mais son acception dominante est davantage liée la formation et à l'acquisation d'un concept qu'à sa mobilisation active dans une démarche de pensée.

I. Sémiosis et registres de représentation.

Pour qu'un système sémiotique puisse être un registre de représentation, il doit permettre les **trois activités cognitives fondamentales liées à la sémiosis.**

1. **La formation d'une représentation identifiable** comme une représentation d'un registre donné: énonciation d'une phrase (compréhensible dans une langue naturelle donnée), composition d'un texte, dessin d'un figure géométrique, élaboration d'un schéma, écriture d'une formule....
Cette formation implique une *sélection* de traits et de données dans le contenu à représenter. Cette sélection se fait en fonction des unités et des règles de formation qui sont propres au registre sémiotique dans lequel la représentation est produite. A ce titre la formation d'une représentation pourrait être comparée à l'accomplissement d'une tâche de description.
Cette formation doit respecter des règles (grammaire pour les langues naturelles, règles de formation dans un système formel, contraintes de construction pour les figures ...)[1]. La fonction de ces règles est d'assurer, en premier lieu, les conditions d'identification et de reconnaissance de la représentation et, en second lieu, la possibilité de leur utilisation pour des traitements. *Ce sont des règles de conformité, ce ne sont pas des règles de production effective par un sujet.* Cela veut dire que la connaissance des règles de conformité n'implique pas la compétence pour former des représentations, mais seulement celle pour les reconnaître.

2. **Le traitement** d'une représentation est la **transformation** de cette représentation **dans le registre même où elle a été formée.** Le traitement est une transformation interne à un registre.
La *paraphrase* et l'*inférence* sont des formes de traitement en langue naturelle. Le *calcul* est une forme de traitement propre aux écritures symboliques (calcul numérique, calcul algébrique, calcul propositionnel...). La *reconfiguration* est un type de traitement particulier pour les figures géométriques : c'est l'une des nombreuse opérations qui donne au registre des figures son rôle heuristique. L'*anamorphose* est une forme de traitement qui s'applique à toute

[1] Les réponses requises par les questionnaires Q.C.M. ne requièrent pas d'activité de formation de représentation hormis celle du pointage d'un choix binaire. (faire une croix, écrire "oui" ou "non", mettre un "1" ou un "0").

représentation figurale...
Il y a naturellement des règles de traitement propres à chaque registre. Leur nature et leur nombre varie considérablement d'un registre à l'autre : règles de dérivation, règles de cohérence thématique, règles associatives de contiguïté et de similitude... Dans le registre de la langue naturelle, il y a paradoxalement un nombre élevé de règles de conformité et peu de règles de traitement pour l'expansion discursive d'un énoncé complet.

3. **La conversion** d'une représentation est la **transformation** de cette représentation en une représentation d'**un autre registre** en conservant la totalité ou une partie seulement du contenu de la représentation initiale. La conversion est une transformation externe au registre de départ(le registre de la représentation à convertir). L'*illustration* est la conversion d'une représentation linguistique en une représentation figurale. La *traduction* est la conversion d'une représentation linguistique dans une langue donnée en un représentation linguistique d'une autre langue ou d'un autre type de langage. La *description* est la conversion d'une représentation non verbale (schéma, figure, graphe) en une représentation linguistique. (Il importe à ce propos de ne pas confondre cette situation avec la description d'un objet ou d'une situation qui ne sont pas encore sémiotiquement représentés : la sélection des traits n'y obéit pas aux mêmes contraintes).

La conversion est une activité cognitive différente et indépendante de celle de traitement. Cela peut facilement être observé sur une situation très simple: le calcul numérique. Des élèves peuvent très bien effectuer l'addition de deux nombres avec leur écriture décimale et avec leur écriture fractionnaire, et ne pas du tout penser à convertir, si cela s'avère nécessaire l'écriture décimale d'un nombre en son écriture fractionnaire (et réciproquement), ou même échouer pour cette conversion. C'est très souvent ce type d'exemple qui est avancé, pour expliquer que des élèves arrivent en seconde et ne savent pas calculer ! C'est oublier que l'écriture décimale, l'écriture fractionnaire et l'écriture avec exposant constituent trois registres différents de représentation des nombres. La conversion requiert que l'on ait perçu la différence entre ce que Frege appelait le sens et la référence des symboles ou des signes. Pour l'écriture d'un nombre il faut, en effet, distinguer **la signification opératoire attaché au signifiant** en vertu des règles du système d'écriture (cette signification opératoire n'est pas la même pour 0, 25 pour 1/4, et pour 25.10^{-2} car *ce ne sont pas les mêmes traitements qui doivent être mis en oeuvre pour effectuer les additions* $0,25 + 0,25 = 0,5$ $1/4 + 1/4 = 1/2$ et $25.10^{-2} + 25.10^{-2} = 50.10^{-2}$) **et le nombre représenté qui n'est ni le signifiant 0, 25 ni le**

signifiant 1/4 ni le signifiant 25 x10^{-2}. Chacune de ces trois écritures a une signification opératoire différente mais elle représente le même nombre.

La conversion ne doit pas être confondue avec deux activités qui en sont cependant proches : le codage et l' interprétation.
Ce qu'on appelle généralement "*interprétation* " requiert un changement de cadre théorique, ou un changement de contexte. Ce changement n'implique pas de changement de registre, mais il mobilise souvent des analogies.
Le "*codage*" est la "transcription" d'une représentation dans un autre système sémiotique que celui où elle est donnée. Cette transcription est effectuée "au moyen d'une série de substitutions" en appliquant des règles de correspondance ou en utilisant des listes de subsitutions préalablement établies (Eco 1988, p.249-252). Ces substitutions sont effectuées directement sur les signifiants composant la représentation, sans prendre en compte l'organisation de la représentation ni ce qu'elle représente.
Bien que l'activité cognitive de conversion d'une représentation puisse souvent paraître être étroitement liée à une interprétation ou à un codage, elle leur est irréductible, parce que d'une part elle ne se fonde sur aucune analogie comme dans le cas de l'interprétation et que, d'autre part, la conversion ne peut être obtenue par l'application de règles de codage. Il n'existe et il ne peut exister de règles de conversion comme il existe des règles de conformité et des règles de traitement.
Pour illustrer ce point prenons un exemple de conversion de représentation qui peut ressembler à un codage : celui entre l'écriture algébrique d'une relation (colonne II de la fig.1 ci-dessous) et sa représentation graphique cartésienne (colonne III de la fig. 1)

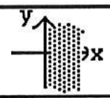
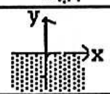
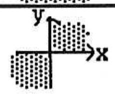
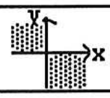
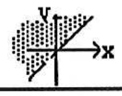
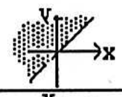
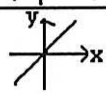
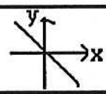
I	II	III	I → III : *hachurer*	III→ II : *choisir l'expression*
1...l'ensemble des points qui ont une abscisse positive	x > 0		67%	51%
2.............................qui ont une ordonnée négative	y < 0		67%	61%
3..................dont l'abscisse et et l'ordonnée sont de même signe	xy ≥ 0		56%	25%
4.	xy ≤ 0			.23 %
5.............dont l'ordonnée est supérieure à l'abscisse (*la droite y=x étant déjà tracée sur le graphique*)	y > x		38%	38%
6.............dont l'ordonnée est supérieure à l'abscisse (*la droite y=x n'étant pas déjà tracée sur le graphiqu*	y > x		19%	25%
7................dont l'ordonnée est égale à l'abscisse	y =x		60%	75%
8...............dont l'ordonnée est l'opposée de l'abscisse	y = - x		34%	58%

Fig.1. Résultats obtenus avec 105 élèves de seconde (Duval 1988c, p. 247-249). Pour la converion III → II , il y avait seulement à choisir parmi plusieurs expressions celle qui corrrespondait au graphique hachuré : y=x, y>x, x>0, y=-x, xy≤ 0,... Pour une enquête faite à l'échelle de tous les élèves de seconde d'un établissement voit Lefort & alii 1990.

Cet exemple est intéressant parce que le système sémiotique de représentation graphique permet de définir une règle de codage : à un point correspond un couple de nombres. Donc n'importe quel couple de nombres code un point du plan ainsi repéré.

Or cette règle de codage n'est pas suffisante pour changer de registre, pour passer, par exemple, de l'écriture algébrique d'une relation ($y = x$, $y = x^2$) à la représentation graphique correspondante. Elle permet de marquer autant de points que l'on veut mais non pas de tracer le **trait continu** d'une droite ou d'une parabole[1]. Pour cela il faut interpoler et accepter la pertinence de la loi gestaltiste de contiguïté.

L'irréductibilité devient flagrante dans la conversion inverse, celle de la représentation graphique vers l'écriture algébrique (hormis le cas de la simple lecture de points du graphique). Cette conversion exige que les unités signifiantes propres à chaque registre soient bien discriminées. En d'autres termes, il faut bien identifier, dans le registre graphique, les variables visuelles pertinentes avec leurs différentes valeurs et, dans l'écriture algébrique d'une relation, les différentes oppositions paradigmatiques qui donnent une signification, et pas seulement un objet, aux symboles utilisés (les tableaux de la fig. 2 ci-dessous).

La règle de codage ne permet donc que deux choses : soit la lecture d'un couple de nombres sur le graphique à partir d'un point désigné, soit la désignation d'un point à partir d'un couple de nombres. La répétition de ces deux opérations élémentaires n'est pas suffisante pour la conversion des représentations entre les deux registres. Les résultats enregistrés en seconde même après un enseignement des fonctions affines et un travail sur différents registres sont impressionnants : moins des deux tiers des élèves réussissent à reconnaître $y=x$ et $y=-x$ dans les deux représentations graphiques correspondantes et moins d'un tiers à reconnaître $y=2x$ et $y=x+2$ (Duval, 1988, ; Lefort & alii,1990)

[1] Il existe des élèves qui appliquent parfaitement la règle de codage mais qui refusent de relier tous les points obtenus par un trait continu pour faire apparaître une droite ou une parabole.

Variables visuelles	**Valeurs de la var. visuelle**	**Unités symboliques**	**correspondantes**
implantation de la tache	**zone** (dimension2) **trait** (dimension1)	(symbole de la **relation**)	<, >,.... =
forme de la tache en dimension 1	trait **courbe** *trait droit*	(**exposant** de la variable)	>1, <1 =1

Variables visuelles	**Valeurs**	**Unités symboliques**	**correspondantes**
sens d'inclinaison *pour trait droit* (ancrage : sens linéaire d'écriture)	*montant* *descendant*	(coefficient de la variable)	> 0 < 0 (symb. —)
angle avec les axes (ancrage : axe hori.)	partage symétrique angle plus petit angle plus grand	coeffic de var. =1 coeffi. <1 coeffi >1	pas de val. num. val. numé. valeur numé.
position sur l'axe y (ancrage : origine)	coupe au dessus coupe au dessous coupe à l' origine	on ajoute une const. on soustr. une const pas de correction ad.	signe + signe — pas de symb.

sens d'inclinaison	**angle avec les axes**	**position sur l'axe y**	**exemple d'écriture**
trait montant	partage symétrique	coupe à l'origine coupe au dessus coupe au dessous	y = x (y = +1 x) y = x +1 y = x -1
	angle plus grand	coupe à l'origine coupe au dessus coupe au dessous	y = 2 x y = 2 x + 1 y = 2 x - 1
	angle plus petit	coupe à l'origine coupe au dessus coupe au dessous	y = 1/2 x y = 1/2 x + 1 y = 1/2 x - 1
trait descendant	....	....	y = - ....

Fig. 2. Le deuxième tableau présente les variations pour un des cas de figure du premier tableau: celui du trait droit. Le troisième tableau explicite les cas de figures correspondant aux variations décrites dans le second uniquement pour le trait droit montant. On voit que pour les droites non parallèles aux axes il y a seulement 18

représentations graphiques qui soient visuellement différentes de façon significative. Dans le cas de parallélisme à l'un des deux axes, il y a disparition de la variable référant à cet axe.

Des trois activités cognitives liées à la sémiosis, seules les deux premières, celle de formation et celle de traitement, sont prises en compte dans l'enseignement, qu'il s'agisse de l'organisation de séquences d'apprentissage ou de la construction de questionnaires d'évaluation.

On considère généralement que

— la conversion des représentations irait de soi dès que l'on est capable de former des représentations dans des registres différents et d'effectuer des traitements sur les représentations, par exemple construire un graphique ou écrire une équation et y substituer des valeurs numériques aux variables.

— que la conversion n'a aucune importance réelle pour la compréhension des objets ou des contenus conceptuels représentés, puisque son résultat se limite à un changement de registre.

Ce point de vue est justifié dès qu'une certaine "autonomie" est atteinte en ce qui concerne l'activité mathématique. Mais il conduit à masquer le caractère fondamental de cette activité pour la noésis, et d'une façon plus générale pour la compréhension. Et, surtout, il néglige le fait qu'en phase d'apprentissage, la conversion joue un rôle essentiel dans la conceptualisation. Pour mieux le percevoir, examinons ce que recouvre la diversité des registres de représentation.

II. Noésis et coordination des registres de représentation

A quoi correspond l'existence de plusieurs registres de représentations et quel est l'intérêt de leur coordination pour le fonctionnement de la pensée humaine ?

Avant d'examiner les différentes réponses possibles à cette question, il n'est pas inutile de rappeler deux données qui montrent le caractère fondamental de la liaison *noésis /sémiosis.*
1. L'utilisation de plusieurs registres de représentation semble caractéristique de la pensée humaine si on la compare à l'intelligence animale, d'une part, et à l'intelligence artificielle, d'autre part.
Ce qui caractérise le fonctionnement de la pensée humaine par rapport à l'intelligence animale n'est pas tant le recours à un système sémiotique pour communiquer (un langage) que le recours à plusieurs systèmes de représentation : langage et image graphique (dessin, peinture, pictogramme..). Et en ce qui concerne l'intelligence artificielle on a souligné qu'une de ses limites est la difficulté "à dépasser la rigidité fonctionnelle qu'entraîne la spécialisation du mode de représentation" (Leiser, 1987, p.1869). La spécialisation du mode de représentation recouvre la réduction à un seul système sémiotique, celui de l'écriture booléenne.
2. Le progrès des connaissances s'accompagne toujours de la création et du développement de systèmes sémiotiques nouveaux et spécifiques, qui coexistent plus ou moins avec le premier d'entre eux, celui de la langue naturelle (Granger 1979).

Deux réponses sont généralement proposées pour expliquer cette nécessité de fait d'une diversité de registres dans le fonctionnement de la pensée humaine. Elles sont centrées sur les coûts de traitement et sur les limitations représentatives spécifiques à chaque registre. Nous en proposerons une troisième centrée sur la condition nécessaire d'une différentiation entre représentant et représenté.
Il va de soi que ces réponses ne s'excluent pas. *Mais il est important de voir qu'elles se situent à des niveaux de description différents de l'activité cognitive.* La première réponse, centrée sur les coûts de traitement, s'en tient à une description de surface. Elle se réfère au fonctionnement de chaque registre tel qu'il est consciemment vécu dans le traitement des représentations. La seconde réponse, plus sémiotique, suppose une comparaison de différents modes de représentation d'un même objet. Cette comparaison requiert une analyse des aspects qui sont pris en compte et de ceux qui ne le sont pas dans chaque registre. La troisième réponse est moins immédiatement accessible. Elle suppose une approche développementale de

l'activité cognitive dans les disciplines où le recours à une pluralité de registres est fondamental. Elle suppose en outre que l'on substitue, dans l'étude des acquisitions, des critères de "maturité" (rapidité de traitement, spontanéité des conversions, puissance des transferts) à de simples critères de "réussite" (obtention de la "bonne" réponse).

*Première réponse : **l'économie de traitement***

L'existence de plusieurs registres permet de changer de registre, et ce changement de registre a pour but de permettre d'effectuer des traitements d'une façon plus économique et plus puissante. Il semble que cette réponse ait été explicitement exposée pour la première fois par Condillac dans *Le Langage des Calculs* à propos de l'écriture des nombres et des notations algébriques. Elle montre, en termes de coût en mémoire, les limites très vite atteintes dans le registre de la langue naturelle pour les traitements de type calcul. Une telle réponse peut évidemment être étendue à d'autres traitements : les relations entre des objets peuvent être représentés de façon plus rapide, et plus simple à comprendre, par des formules littérales que par des phrases, comme c'est le cas par exemple pour les énoncés du livre V des *Elements* sur les proportions (Euclide). On en trouvera une illustration plus récente dans un manuel de renom proposé à des élèves de quatrième. Un tableau y expose de façon synoptique trois présentations différentes d'une même égalité: une phrase, une écriture littérale et un schéma. Ce tableau est assorti du commentaire suivant: "Avec un peu d'habitude (et tu commences à en avoir), il est plus facile de "comprendre" une écriture littérale qu'une phrase décrivant un calcul en français. Souvent un schéma décrivant un calcul est intéressant, mais d'autre part il prend plus de place qu'une écriture littérale et d'autre part il ne se "transforme" pas facilement. quel langage préfères-tu?" (Deledicq & Lassave1979, p.80). D'une façon plus générale, en mathématique, l'économie de traitement (perceptif ou algorithmique) est généralement avancée à l'encontre de la langue naturelle. La méfiance latente à l'égard de la langue naturelle en mathématique trouve là son origine véritable.

*Deuxième réponse: **la complémentarité des registres***

Cette réponse qui est davantage centrée sur les possibilités propres à chaque système sémiotique a été avancée plus récemment (Bresson, 1987) On peut la formuler ainsi : la nature du registre sémiotique qui est choisi pour représenter un contenu (objet, concept ou situation) impose une sélection des éléments significatifs ou informationnels du contenu que l'on représente. Cette sélection se fait en fonction des possibilités et des contraintes sémiotiques du registre choisi. Un langage n'offre pas les mêmes possibilités de représentation qu'une figure ou qu'un diagramme. Cela veut dire que *toute représentation est cognitivement*

partielle par rapport à ce qu'elle représente et que d'un registre à un autre ce ne sont pas les mêmes aspects du contenu d'une situation qui sont représentés.
Ainsi, les figures, et de façon plus générale toutes les représentations analogiques, ne peuvent représenter que des états, des configurations, ou des produits d'opérations ; elles ne peuvent pas représenter des actions ou des transformations (Bresson, *ibid.* p.943). Pour représenter des opérations il faut un registre qui ait les propriétés d'un langage: langue naturelle ou algèbre (Bresson, *ibid.* p.939). En revanche les figures permettent de représenter la totalité des relations entre les éléments constituant un objet ou une situation (Larkin & Simon, 1987).

Troisième réponse: la conceptualisation implique une coordination de registres de représentation.

Il y a une idée qui est généralement admise. On peut la formuler de la façon suivante :
Hypothèse 1: si le registre de représentation est bien choisi, les représentations de ce registre sont suffisantes pour permettre la compréhension du contenu conceptuel représenté.
Cette hypothèse semble d'ailleurs justifiée par la structure même de la représentation telle qu'on la présente habituellement en fonction de la structure de la signifiance des signes (Fig.3 ci-dessous).

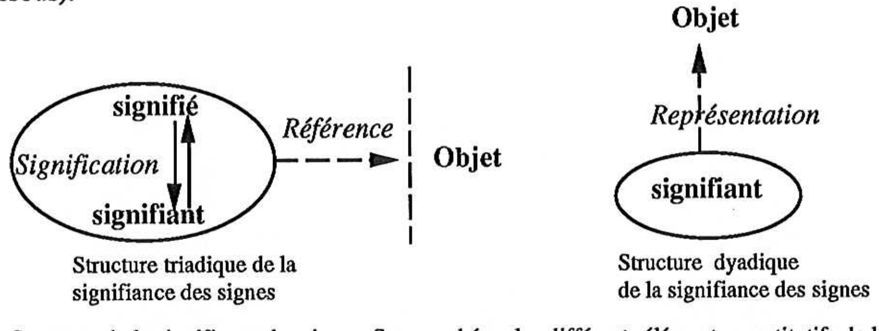


Fig.3. Structure de la signifiance des signes. Sur ce schéma les différents éléments constitutifs de la signifiance des signes sont en caractères gras, et les relations entre ces éléments sont en italiques.
On peut y voir l' opposition entre deux types de signes. Ceux de structure triadique, comme les signes linguistiques ou même les figures. Pour ce type de signe, la relation de référence présente deux caractéristiques. D'une part la relation à un objet dépend d'une relation de signification, cette dernière étant déterminée par le système de la langue (Saussure 1973, p.159,163) ou par les lois de la perception visuelle. D'autre part la relation à l'objet *est une possibilité qui n'est assurée qu'au plan du discours* (Benveniste 1966, p.129-131; 1974, p.64-66) ou plan de l'interprétation pour les figures. Les signes de structure dyadique, telles certaines notations mathématiques (notations de fonctions, de vecteurs, d'opérateurs..), n'ont pas de signification et sont constitués par une relation instituée à un objet. Généralement ces deux structures de la signifiance ne sont pas distinguées.

Mais qu'on les distingue ou non, *on ne doute pas que l'emploi de signes ou de représentations d'un seul registre soit suffisant pour que leur signifiance fonctionne cognitivement chez les sujets en situation d'apprentissage.* Autrement dit la signifiance est postulée comme étant d'emblée trans-registre. D'où les opérations de conversion de représentation d'un registre à un autre semblent évidentes et négligeables par rapport aux opérations de formation ou traitement des représentations.

L'opinion selon laquelle l'activité de conversion ne peut pas soulever de difficultés majeures découle directement de cette hypothèse 1 et de la conception que l'on se fait de la structure de la représentation..

Cette hypothèse semble suffisante si l'on se réfère à des sujets ayant une bonne maîtrise de l'activité mathématique (les chercheurs en mathématiques ou les enseignants, par exemple). Elle n'est plus suffisante si l'on se réfère à des sujets en cours d'apprentissage (les élèves de collège ou de Lycée). Elle ne permet pas d'imaginer que la conversion des représentations d'un registre à un autre puisse être une source importante de difficultés ou d'échecs. Dans le cadre d'une telle hypothèse, souvent admise comme une évidence, les difficultés et les échecs observés ne peuvent relever que de la *noésis* et non de la *sémiosis.*

<u>Hypothèse2</u>: La compréhension (intégrative) d'un contenu conceptuel repose sur la coordination d'au moins deux registres de représentation, et cette coordination se manifeste par la rapidité et la spontanéité de l'activité cognitive de conversion.

Cette hypothèse appelle une autre description de la structure des représentations sémiotiques et de leur fonctionnement (Fig.5, ci-dessous).

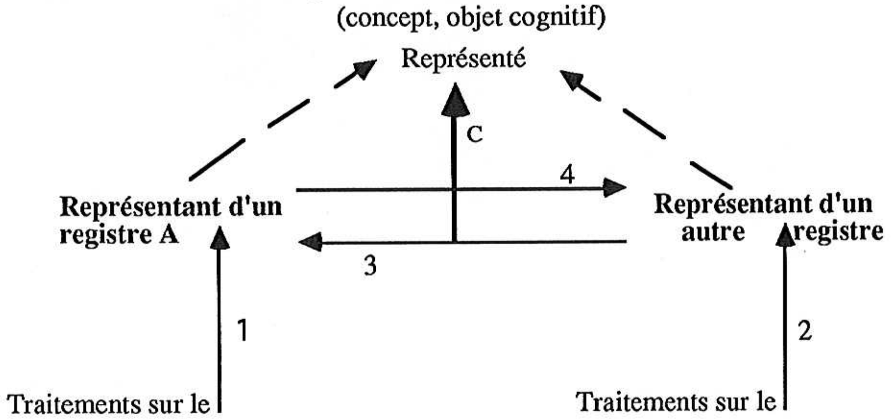


Fig.4. Structure de la Représentation en fonction de conceptualisation. Les flèches 1 et 2 correspondent aux transformations internes à un registre. Les flèches 3 et 4 correspondent aux transformations externes, c'est-à-dire à des conversions par changement de registre. La flèche C correspond à ce que nous appellerons la

compréhension intégrative d'une représentation : elle suppose une coordination des deux registres. Les flèches en pointillé correspondent à la distinction classique entre représentant et représenté. Naturellement ce schéma envisage le cas le plus simple de la coordination entre deux registres: dans certains domaines, comme l'algèbre linéaire, une coordination entre trois registres au moins peut être requise. *On peut voir également une des possibilités importantes de la structure de la représentation* : **le représentant d'un registre peut être considéré comme le représenté d'un autre registre,** comme c'est le cas dans la relation entre texte et image. Enfin il n'y a pas de flèches entre les traitements propres à chaque registre. Cela n'exclut pas les cas de congruence ou d' "équivalence computationnelle", mais l'intérêt des changements de registre tient au fait que chaque registre a des traitements qui lui sont propres.

Cette coordination est loin d'être naturelle. Et elle ne semble pas pouvoir se réaliser dans le cadre d'un enseignement principalement déterminé par les contenus conceptuels. On peut observer à tous les niveaux un **cloisonnement des registres de représentation** chez la très grande majorité des élèves. Ceux-ci ne reconnaissent pas le même objet à travers des représentations qui en sont donnés dans des systèmes sémiotiques différents: l'écriture algébrique d'une relation et sa représentation graphique (voir par exemple plus haut p. Fig.1), l'écriture numérique d'un rapport et sa représentation géométrique sur une droite ou dans le plan (Lémonidis, 1990), l'énoncé d'une formule en français et l'écriture de cette formule sous forme littérale, la description d'une situation et sa mise en équation,.... Ce cloisonnement subsiste même après un enseignement sur des contenus mathématiques ayant largement utilisé ces différents registres.
Naturellement, l'absence de coordination n'empêche pas toute compréhension. Mais cette compréhension, limitée au contexte sémiotique d'un seul registre, ne favorise guère les transferts et les apprentissages ultérieurs : elle rend les connaissances acquises peu ou pas mobilisables dans toutes les situations où elles devraient réellement être utilisées. En définitive, cette compréhension mono-registre conduit à un travail à l'aveugle, sans possibilité de contrôle du "sens" de ce qui est fait.
La coordination des images (mentales) et du langage naturel dans son emploi courant, qui a été étudiée par certains psychologues (Paivo,1986) n'est pas davantage suffisante pour assurer la coordination des multiples registres sémiotiques de représentation mobilisés en mathématiques comme dans d'autres disciplines.

Plusieurs raisons peuvent expliquer l'ampleur et la profondeur de ce phénomène de cloisonnement des registres de représentation. Nous n'en mentionnerons qu'une, celle qui est inhérente à la variété hétérogène des registres: la **non-congruence**. Lorsqu'il y a congruence[1] entre la représentation de départ et la représentation d'arrivée, la conversion est triviale et pourrait presque être considérée, intuitivement, comme un simple codage. Mais lorsqu'il n'y a pas congruence non seulement la conversion devient coûteuse en temps de traitement mais elle peut créer un problème devant lequel le sujet sent désarmé. Alors, la possibilité d'une conversion ne vient même plus à l'esprit.

Il n'y a aucune règle qui puisse déterminer a priori tous les cas de non-congruence entre les représentations de deux registres déterminés. Les obstacles liés au phénomène de non congruence ne sont pas des difficultés conceptuelles.

La coordination de plusieurs registres (Hypothèse 2 et Fig.5) est donc une condition absolument nécessaire pour que le schéma dyadique de la représentation habituellement admis (fig.4 et hypothèse 1) corresponde à un fonctionnement cognitif effectif chez un sujet, et pour que, en surface, le recours à un seul registre de représentation apparaisse suffisant. Or de nombreuses observations, aux différents niveaux de la scolarité, montrent qu'elle ne se s'effectue pas spontanément chez la plupart des sujets et qu'on ne peut espérer en favoriser la mise en place par un enseignement qui méconnaît la liaison forte existant entre *noésis* et *sémiosis*.

---

[1] Les trois critères de congruence sont:
— la possibilité d'une correspondance "sémantique" des éléments signifiants : à chaque unité signifiante simple de l'une des représentations, on peut associer une unité signifiante élémentaire.
— l'univocité "sémantique" terminale: à chaque unité signifiante élémentaire de la représentation de départ, il ne correspond qu'une seule unité signifiante élémentaire dans le registre de la représentation d'arrivée.
— l'organisation des unités signifiantes : les organisations respectives des unités signifiantes des deux représentations comparées conduit à y appréhender les unités en correspondance sémantique selon le même ordre dans les deux représentations. Ce critère de correspondance dans l'ordre dans l'arrangement des unités qui composent chacune des deux représentations n'est pertinent que lorsque celles-ci présentent le même nombre de dimension.
Ces trois critères permettent de déterminer le caractère congruent ou non congruent de la conversion à effectuer entre deux représentations qui sont sémiotiquement différentes et qui représentent au moins partiellement le même contenu. Ils permettent également de déterminer un degré de non congruence. (Duval, 1993)

III. Les conditions d'un apprentissage prenant en compte la sémiosis

Si la conceptualisation implique une coordination de registres de représentation, le principal enjeu des apprentissages de base en mathématique ne peut pas seulement être l'automatisation de certains traitements ou la compréhension de notions mais il doit aussi être la coordination des différents registres de représentation nécessairement mobilisés pour ces traitements ou pour cette compréhension. La coordination des registres apparaît comme la condition fondamentale pour tous les apprentissages de base, du moins dans les domaines où les seules données sont des représentations sémiotiques : les mathématiques et le français.

En fait, l'enseignement des mathématiques est généralement organisé comme si la coordination des différents registres de représentations introduits ou utilisés s'effectuait rapidement et spontanément, comme si les problèmes et les coûts liés à la non-congruence n'existaient pas. Car ce qui, en définitive, semble important ce n'est pas le changement de registre à effectuer, mais les traitements qui pourront être effectués sur la représentation obtenue après changement de registre ! La coordination des registres de représentation ne semble donc pas devoir s'imposer comme l'un des objectifs principaux de l'enseignement, de 6ème jusqu'en seconde. Il suffit de regarder comment sont introduits de nouveaux registres: représentations graphiques, figures géométriques, écriture symbolique du calcul des prédicats (quantificateurs) pour constater l'absence d'un tel objectif. On s'en tient à quelques correspondances locales, le plus souvent pour des cas de congruence, et à des règles d'emploi ou de conformité.

Il est évident que cette absence de prise en compte de la coordination des registres n'est pas un hasard ou une négligence. La quasi absence de règles pouvant favoriser l'activité cognitive de conversion pourrait suffire à l'expliquer. En outre, il n'est pas certain que proposer des exercices locaux de conversion permette de favoriser cette coordination, laquelle semble liée à une prise de conscience et à une objectivation plus globales que ce que permet le travail sur chaque représentation particulière. Un apprentissage prenant en compte le lien étroit qui existe entre la noésis et la sémiosis doit donc placer les élèves dans des conditions qui permettent cette prise de conscience plus globale, et pour cela leur présenter des tâches spécifiques.
Dans cette perspective, trois types de tâches extrêmement différents semblent s'imposer. Nous

nous contenterons ici d'une caractérisation très brève. Le premier type concerne l'appréhension des représentations sémiotiques, le second l'apprentissage des traitements propres à une certaine catégorie de registres, le troisième le mode de production des représentations complexes

A) Des tâches de variations comparatives relatives à la signifiance des représentations

L'appréhension des représentations sémiotiques suppose la **discrimination des unités signifiantes** dans le registre même où la représentation est produite. Le seul moyen de faire discriminer les unités signifiantes d'une représentation est de faire réaliser l'**observation,** d'une part, de **variations de représentation, systématiquement effectuées dans un registre** et, d'autre part, des **variations concomitantes de représentation dans un autre registre.** Cela veut dire que la discrimination des unités signifiantes constituant une représentation dans un registre est étroitement liée à l'activité cognitive de conversion. Cela veut dire également que la conversion d'une représentation n'est pas séparable de la perception des variations propres au registre de départ et au registre d'arrivée. Naturellement, en faisant varier systématiquement une représentation, on en change le contenu représenté: le choix, parmi plusieurs représentations possibles dans le registre d'arrivée, de celle qui correspond à la représentation modifiée dans le registre de départ permet ainsi d'identifier les variations des unités signifiantes dans chaque registre de représentation.

Cela suppose évidemment que l'on ait préalablement identifié tous les facteurs de variation pertinente d'une représentation dans un registre. Sans cela on ne peut pas proposer une situation de variation systématique. Concrètement, pour pouvoir proposer de telles tâches de variation comparative, il faut, au préalable disposer d'analyses comme celles qui ont été présentées plus haut dans les trois tableaux de la fig. 2 . C'est seulement sur la base de telles analyses que l'on peut élaborer de telles tâches et que l'on peut également construire une évaluation adéquate des acquisitions des élèves.

B) Des tâches de couplage et de découplage entre des traitements non-sémiotiques et des traitements sémiotiques.

On pourrait croire que l'enseignement des mathématiques fait une grande place à l'apprentissage des traitements qui sont spécifiques à chaque registre de représentation : calcul numérique, résolution d'équations, construction et lecture de graphes, construction de figures géométriques, ... Or un examen attentif montre qu'il n'en est rien. Un apprentissage des traitements spécifiques à un registre de représentation n'est proposé que pour **les registres où les traitements sont uniquement de type calcul, mais non pour ceux où les traitements ne sont pas de type calcul.** L'exemple le plus frappant à cet égard est celui des figures géométriques.

Si les figures géométriques peuvent avoir un rôle heuristique pour résoudre des problèmes cela tient au fait qu'elles constituent un registre qui a ses possibilités de transformations propres. Il est donc essentiel de pouvoir répondre avec précision à la question suivante: quels sont les traitements *propres au registre des figures géométriques* qui donnent à ces figures leur force heuristique?

Généralement on s'en tient soit au traitement perceptif soit au traitement mathématique (tableau, fig. 6 ci-dessous). L'importance, légitime, donnée aux tâches de construction de figures est à cet égard révélatrice. Les tâches de construction de figure sont des tâches qui privilégient la formation de la représentation d'un objet mathématique ou d'une situation mathématique dans le registre figuratif : elles ne respectent pas la signification perceptive des différentes unités figurales, mais elles les subordonnent aux contraintes conceptuelles fixées dans la définition des objets. Elles entraînent donc à considérer les figures géométriques comme des notations mathématiques, c'est-à-dire comme des représentations où c'est la dénotation qui compte et non pas la signification proprement perceptive ou opératoire (cfr. schéma de droite dans la fig 3 plus haut). Peut-on dire, dans ces conditions, que les tâches de construction apprennent à "voir", c'est-à-dire permettent de découvrir, de mobiliser, et de contrôler la *productivité heuristique* des figures?

Les traitements qui constituent la productivité heuristique des figures géométriques combinent des opérations qui ne relèvent ni d'une appréhension purement perceptive ni d'une appréhension conceptuelle. Dans certains cas, les facteurs propres à l'appréhension perceptive peuvent favoriser ces opérations et, dans d'autres, au contraire, ils les inhibent. En outre ces opérations sont indépendantes de tout raisonnement déductif, comme de toute mise en oeuvre de définitions. C'est pourquoi il est important de bien distinguer cette appréhension opératoire des figures d'une appréhension perceptive ou d'une appréhension discursive et théorique (Fig. 5).

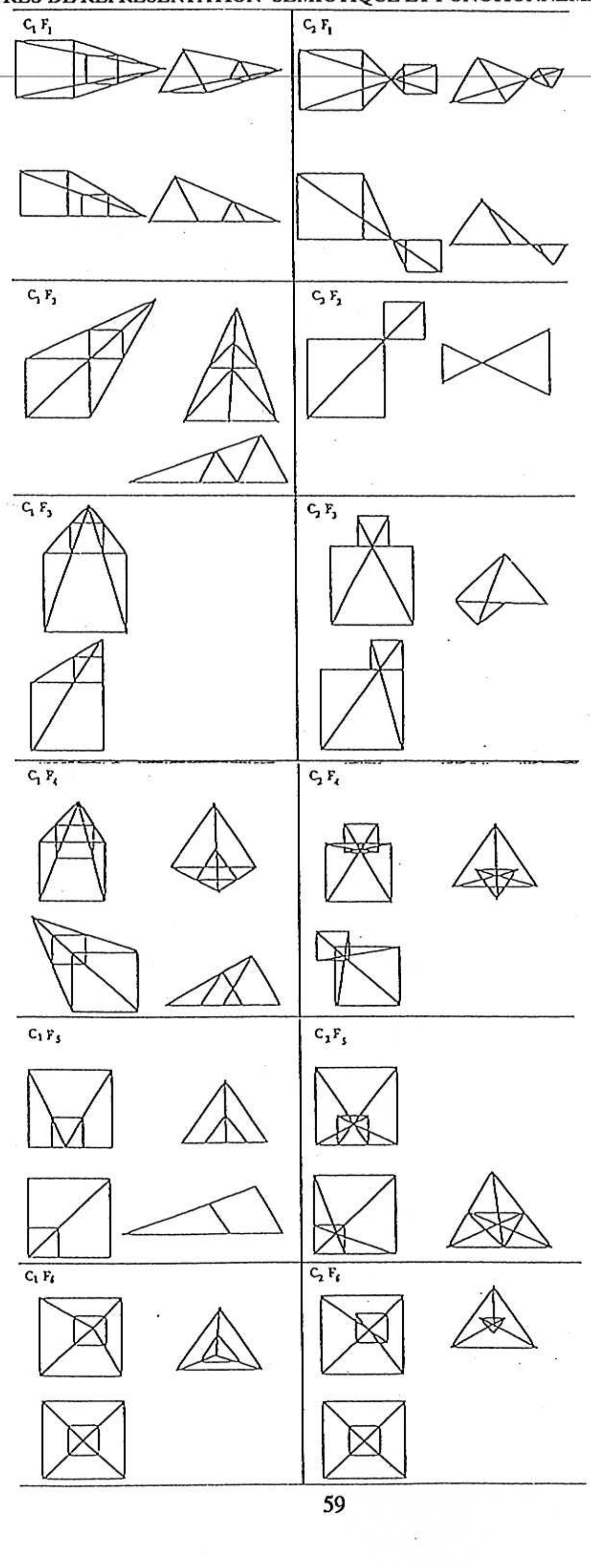
appréhension perceptive	appréhension opératoire d'une figure donnée *structure triadique de la représentation*			appréhension séquentielle *strc. dyadique*	appréhension discursive(*selon la définition des objets*)
integration de stimuli (contrastes brusques de brillance) **en une figure**	**types de modifications figurales**	Opérations modifiant la figure: **processus heuristique**	Facteurs int. déclenchant ou inhibant la **visibilité de ces operations**	Facteurs ext. intervenant dans la construction de la figure	Variations de congruence entre les modifications figurales visibles et déduction
lois de regroupement des stimulis (simplicité, clôture, continuité, proximité...) et identification de formes	méréologique (relation partie-tout)	- Reconfiguration,... Une figure se compose de plusieurs unités figurales: elles peuvent être combinées en une autre figure ou en différentes sous-figures.	- partage en plusieurs sous-figures pertinentes - convexité ou non des sous-figures pertinentes - complementarité.... - dédoublement....	degré de congruence entre les unités figurales possibles et celles permises par les outils utilisés.	- les unités figurales élémentaires et les objets mathematiques objects mobilisés par le raisonnement déductif ont, ou n'ont pas, le même nombre de dimensions
indicateurs de profondeur et de distance (taille, superposition, perspective par rapport à un point de fuite, inclinaison par rapport au plan fronto-parallèle) et **nombre de dimensions : 2 or 3**	optique	- même forme et même orientation dans le plan fronto-parallèle, mais variation de taille: superpoition en profondeur de deux figures semblables - variation deplan par rap. au plan fronto-parallèle (variation de forme et constance de forme et de taille)	- même orientation des figures (objet et image) - les lignes de perspective sont toutes distinctes des côtés des deux figures - centre d'homothetie à l'intérieur ou à l'extérieur du contour convexe enveloppant les deux figures,		- en fonction des hypothèses données, il y a congruence, ou non, entre le traitement figural heuristique et l'ordre des pas de déduction.
orientation dans le plan fronto-parallèle	de position	même taille et même forme maisvariation d'orientation: rotation, translation,...	- *Prégnace* des directions verticale et horizontale		

Fig. 5. Les traitements figuraux sont **des opérations qui peuvent être effectuées matériellement ou mentalement** sur les unités figurales d'une figure géométrique donnée pour obtenir une modification configurale de cette figure. Ces traitements peuvent être effectués indépendamment de toute définition explicite ou implicite d'un objet mathématique. Une figure géométrique donnée est susceptible de différents traitements figuraux. Selon le mode d'appréhension que l'on privilégie, une figure géométrique peut donc apparaître comme une représentation de structure triadique ou de structure dyadique. L'une des violences sémiotiques des mathématiques depuis Hilbert consiste à vouloir considérer les figures selon une structure dyadique et non pas triadique : on méconnaît ainsi la notion d'unité figurale ayant une signification propre et pouvant selon les cas dénoter des objets différents. On est ainsi dans l'impossibilité d'analyser la productivité heuristique des figures géomtriques, lesquelles sont constituées d'au moins deux unités figurales

Les tâches de construction de figures introduisent, dans l'appréhension des figures, des contraintes particulières d'ordre de prise en compte des unités figurales et des contraintes tenant à l'outil de construction. C'est pourquoi, elles relèvent d'un quatrième mode d'appréhension. Naturellement l'utilisation mathématique des figures mobilise ces quatre modes d'appréhension. Mais les traitements qui relèvent d'une appréhension opératoire, c'est-à-dire les traitements proprement figuraux, ont une importance toute particulière dans la mesure où ils sont décisifs pour l'utilisation heuristique des figures. On ne peut pas dire qu'ils fassent l'objet d'un apprentissage. Mais quels seraient les conditions d'un tel apprentissage et est-il vraiment possible?

Un apprentissage des traitements proprement figuraux doit être un apprentissage centré sur l'appréhension opératoire des figures et non sur leur appréhension séquentielle ou discursive. Il doit prendre en compte tous les facteurs qui jouent sur la visibilité d'une opération, c'est-à-dire les facteurs d'organisation perceptive d'une figure qui soit favorisent la mobilisation spontanée de cette opération soit au contraire l'inhibent. L'expérience d'un tel apprentissage a été réalisée pour l'opération de reconfiguration (Padilla, 1992). Nous retiendrons ici une recherche qui porte sur une autre opération, celle de superposition en profondeur, traitement figural qui peut être mobilisé pour la représentation des situations d'homothétie (Lémonidis, 1990).

Le tableau suivant (fig.6) extrait du travail de Lémonidis (p.58-59) propose une classification systématique des différents cas de figure pour la représentation des situations d'homothétie dans le plan.


C1 F1
C2 F1
C1 F2
C2 F2
C1 F3
C2 F3
C1 F4
C2 F4
C1 F5
C2 F5
C1 F6
C2 F6

Cette classification a été établie en fonction des paramètres suivants (Lémonidis p.50-55) :
— existence (figure de gauche dans chaque colonne) ou non (figure de droite dans chaque colonne) d'une symétrie intérieure,
— rapport positif (colonne C1) ou rapport négatif (colonne C2) de la configuration homothétique,
— nombre de points remarquables (points qui apparaissent particuliers) de chaque figure,
— position respective de chaque figure l'une par rapport à l'autre: aucun point commun (1ère ligne), intersection réduite à un point (2ème ligne) figures contiguës (3ème ligne), figures qui se chevauchent (la frontière de l'une traverse l'autre), figure dont l'une est une région limitrophe de l'autre, figures en situation d'inclusion complète,
— nombre de traces (droite joignant un point à son image) reliant les points remarquables des figures homothétiques.

Cette classification étant établie on remarque immédiatement que certaines configurations sont vues d'emblée en profondeur, que d'autres sont vues seulement de façon plane, et que certaines sont perceptivement ambiguës, pouvant aussi bien être vues en profondeur que de façon plane.

1. Les configurations qui sont **spontanément vues en profondeur** sont celles pour lesquelles les figures ont la même orientation et pour lesquelles les traces, c'est-à-dire les droites joignant un point de la figure objet à un point de la figure image, sont toutes distinctes des côtés des figures homothétiques.
Deux facteurs déterminent l'orientation d'une configuration homothétique: *l'orientation des formes des deux figures* (objet et image) *par rapport au plan fronto-parallèle* (ou aux bords du cadre matériel support), et *la position du centre d'homothétie* par rapport à l'*enveloppe convexe* qui réunit la figure objet et la figure image (lorsque le centre est à l'extérieur, le rapport numérique est positif et lorsqu'il est à l'intérieur le rapport numérique est négatif). Lorsque le centre est "intérieur", il y a inversion de la figure image par rapport à la figure objet. Ainsi, *deux figures peuvent avoir la même orientation de forme dans le plan fronto-parallèle, et ne pas avoir la même orientation homothétique* : par exemple la configuration C2F1 sur le tableau (Lémonidis, p.65).
Quand ces deux conditions sont remplies (même orientation et traces distinctes des côtés) on peut voir le centre d'homothétie comme un point de fuite: les configurations C1F1, C1F2, C1F3a mais non C1F3b .

2. Les configurations **perceptivement ambiguës pour la perception en profondeur** sont celles pour lesquelles:
— soit toutes les traces ne sont pas distinctes : C1F4b.
La représentation figurale d'objets impossibles repose sur des constructions dans lesquelles certaines traces sont distinctes et d'autres sont confondues.
— soit toutes les traces sont distinctes mais elles paraissent se distribuer comme des "rayons" à partir du centre C2F1a (à comparer avec C2F5a) (Lémonidis p. 54, 60, 73).
Les configurations perceptivement ambiguës ne doivent pas être confondues avec les configurations totalement ininterprétables. Ces configurations sont celles pour lesquelles il est impossible de distinguer le centre vu comme "intérieur" ou vu comme "extérieur". Ce sont les configurations pour lesquelles il y a inclusion complète de la figure objet et de la figure image (F6) (Lémonidis p.65-66). Ces configurations s'opposent à celles dont les figures objet et image n'ont aucun point commun et sont symétriques: pour ces figures on peut visuellement distinguer un centre "intérieur" et un centre "extérieur" (Lémonidis p.53). Dans tous ces cas soit la matérialisation des traces, soit la dénomination des point homologues (c'est-à-dire le recours à une appréhension discursive) deviennent nécessaires.

Toutes les configurations homothétiques planes peuvent donc être regroupées en trois classes selon le degré de prise qu'elles offrent à l'opération de superposition en profondeur. Cela permet d'organiser un apprentissage de type de traitement figural. On peut en effet présenter tous les types de configurations homothétiques distinguées dans la classification de Lémonidis selon l'ordre suivant: les configurations se prêtant à la surperposition en profondeur[1], puis celles qui sont perceptivement ambiguës, et, enfin seulement, celles qui sont irréductiblement planes. Pour le cas des figures vues en perspective on a la possibilité d'un couplage entre un traitement purement figural et un traitement mathématique. Pour les figures qui sont seulement vues de façon plane (C1F6, C2F6,..) le découplage s'impose.
On peut ainsi élaborer un enseignement de l'homothétie qui permet aux élèves de s'approprier des moyens de traitement de la représentation figurale. Et cette appropriation se révèle efficace non seulement pour la compréhension de l'homothétie mais aussi pour l'entrée dans d'autres notions comme celle de barycentre (Lémonidis 1990).

[1] On sépare soigneusement dans la présentation les configurations de centre intérieur et celles de centre extérieur. Car pour les configurations de centre intérieur il y a inversion de la figure image, bien qu'elles puissent être spontanément vues en perspective. Ce facteur de variation doit être pris en compte.

C) Des tâches de double production pour les représentations sémiotiques complexes.

Nous appelons représentation complexe toute représentation qui "expose une démarche": un texte, un calcul comprenant plusieurs étapes, un raisonnement.

Il est essentiel, lorsque ces productions sont faites dans un registre où l'organisation sémiotique est linéaire, de demander préalablement une production dans un registre où l'organisation sémiotique n'est pas linéaire (graphe, schéma, ..) et demander ensuite la production dans le registre à organisation sémiotique linéaire comme une description de la première production. Cette double production s'est révélée décisive pour l'apprentissage du raisonnement déductif (Duval,1991). Elle peut également être très féconde pour la compréhension des textes.

En guise de conclusion

Cette approche ouvre donc un vaste de champ de recherches concernant la diversité des représentations utilisées en mathématiques (graphiques, figures, schéma, écriture symbolique) et les premières effectuées jusqu'à présent dans cette perspective s'avèrent fructueuses pour l'apprentissage des mathématiques (Guzman Retamal.1990, Lémonidis 1990, Padilla 1992). Celles qui s'annoncent comme les plus complexes concernent naturellement l'activité de conversion dans laquelle la représentation de départ est un énoncé en langue naturelle ou un texte.

Tous les problèmes de "mathématisation", c'est-à-dire ceux qui visent à faire découvrir l'application de traitements mathématiques déjà acquis à des questions plongées dans des situations non mathématiques quotidiennes ou professionnelles, comme c'est le cas pour les problèmes additifs, les problèmes de mélange, ceux de mise en équations, etc..., en sont l'exemple le plus élémentaire. La résolution de tels problèmes dépend d'abord de la compréhension de l'énoncé et de la conversion des informations pertinentes qui y sont présentées: il s'agit de passer d'une description discursive des objets relevant du champ de la question posée à une écriture symbolique (numérique ou littérale) de leurs relations telles qu'elles sont marquées linguistiquement, et souvent de façon très variable, dans le texte de l'énoncé. C'est seulement à partir de cette écriture symbolique que les traitements mathématiques (opérations arithmétiques, règle des moyennes, résolution d'un système, etc...) peuvent être appliqués. Or l'effectuation de ce passage ne dépend pas de la connaissance de ces traitements ou des formules qui les initialisent. Car ce ne sont donc pas les nombres qui importent dans l'énoncé de tels problèmes mais les syntagmes nominaux ou verbaux qui leur donnent un sens relationnel.

Mais il y a plus largement tout ce qui concerne le raisonnement dans ses formes les plus élaborées que sont l'argumentation et la déduction. L'argumentation est évidemment une forme de raisonnement qui ne peut pas être détachée du registre de la langue naturelle. De même la déduction lorsqu'elle se réfère à des définitions, à des axiomes et à des théorèmes qui sont énoncés en langue naturelle, comme c'est le cas en géométrie. La conversion dans un autre registre peut alors sembler totalement inutile du point de vue traitement et elle peut même devenir une source de difficultés supplémentaires. Il suffit de rappeler ici toutes les difficultés auxquelles se heurte un enseignement de la logique pour voir que le passage dans un registre d'écriture symbolique pour conduire un raisonnement déductif semble tout à fait exclu lors de l'initiation à la démonstration. Peut-on alors considérer le registre de la langue naturelle comme un registre de départ en ce qui concerne le raisonnement ? L'importance de la *sémiosis* dans la *noésis* incite évidemment à répondre par l'affirmative. *La langue naturelle doit être considéré à la fois comme un registre de départ et comme un registre d'arrivée. Mais, et c'est là le point important, cette conversion interne ne se fait pas directement elle passe par des représentations intermédiaires non-discursives.* L'explicitation de représentations intermédiaires non-discursives apparaît être une condition nécessaire dans l'apprentissage du raisonnement déductif comme dans celui du contrôle d'une argumentation (Duval 1992, Duval & Egret 1993). Il ne s'agit pas là d'une condition qui s'imposerait seulement pour le raisonnement ou pour les situations dans laquelle la langue naturelle constitue également le registre d'arrivée. Elle semble également requise pour développer la de compréhension de texte : le passage d'un texte à un autre texte (résumé, commentaire, explication...) qui en exprime la compréhension ne peut pas être un passage direct (Duval 1993). De même la conversion d'un énoncé du registre de la langue naturelle à celui d'un écriture symbolique requiert le détour par des représentations intermédiaires. Les difficultés de l'enseignement de la logique et plus particulièrement celles liées à l'apprentissage d'une manipulation conjointe de la négation et des quantificateurs tiennent en très grande partie à l'illusion d'un passage direct.

Naturellement, le type de représentation intermédiaire non-discursive à mobiliser, quand le registre de départ est la langue naturelle, change selon le registre d'arrivée et selon le type de démarche à effectuer: résolution d'un problème de mathématisation, raisonnement, résumé, conversion dans un registre symbolique, etc... Cela engage dans des analyses plus particulières qui dépassent le cadre de cet article (Damm 1992).

En tout cas, il n'est pas possible de négliger ou d'écarter la langue naturelle dans le cadre de l'enseignement des Mathématiques, elle est un registre aussi fondamental que les autres registres, et plus particulièrement que ceux qui permettent des traitements de type calcul. Mais, à l'inverse, il n'est pas non plus possible de négliger, ou d'écarter, les registres de représentation non-discursive dans le cadre de l'enseignement du Français, du moins dans la mesure où le développement de la compréhension des textes constitue l'un des objectifs prioritaires de cet enseignement. Car, dans ces deux disciplines, il ne peut pas y avoir de véritable apprentissage tant que les situations et les tâches proposées ne prennent pas en compte la nécessité de plusieurs registres de représentation, pour le fonctionnement cognitif de la penée, et le caractère central de l'activité de conversion.

Références

Benveniste E., 1966, *Problèmes de linguistique générale*, 1, Paris, Gallimard.

Benveniste E., 1974, *Problèmes de linguistique générale*, 2, Paris, Gallimard.

Bresson F., 1987, Les Fonctions de Représentation et de Communication, *Psychologie* (Eds. Piaget, Mounoud, Bronckart) Encyclopédie de la Pleïade, p. 933-982.

Deledicq & Lassave, 1979, "Faire des Mathématiques, 4ème". Paris, Cedic.

Damm R. 1992, *Apprentissage des problèmes additifs et compréhension des énoncés*. Thèse U.L.P. Strasbourg.

Duval, 1988, Graphiques et Equations, *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, 1, p. 235-253.

Duval R., 1991, Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 233-261.

Duval R., 1992, Argumenter, démontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive. *Petit x* n°31, 37-61.

Duval R., 1993, *Sémiosis et Noésis. Préprint*.

Duval R., Geometrical Pictures: kind of representation and specific processings (à paraître).

Duval R.&Egret M.A., 1993, Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif *Repères*, 12, p114-140.

Eco U., 1988, *Sémiotique et Philosophie du Langage* (tr. Bouuzaher). Paris, P.U.F.

Granger G., 1979, *Langages et Epistémologie*, Paris, Klinksieck.

Guzman Retamal I., 1990, *Le rôle des représentations dans l'appropriation de la notion de fonction.* Thèse U.L.P. Strasbourg.

Lefort & L.E.G.T de Colmar, 1990, Changement de registre, *L'Ouvert* n°60

Larkin J.H. & Simon H.A., 1987, Why a Diagram is (sometimes) worth Ten Thousand Words, in *Cognitive Science*, 11, p.65-99.

Leiser D., 1987, Les Fonctions de stockage, *Psychologie* (Eds. Piaget, Mounoud, Bronckart) Encyclopédie de la Pleïade, p.1836-1870.

Lémonidis E.C., 1990, *Conception, Réalisation et Résultats d'une expérience d'ensei-gnement de l'homothétie*, Thèse U.L.P., Strasbourg.

Padilla V., 1992, *L'influence d'une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des mathématiques*, Thèse U.L.P., Strasbourg.

Païvo A, 1986, *Mental Representations A dual coding Approach,* Oxford, Oxford University Press.

Piaget J. 1968 (1946), *La Formation du symbole chez l'enfant*, Neuchatel, Delachaux& Niestlé.

Vitgosky L.S., 1962 (1934) *Thought and Language* (tr.Hanfmann&Vakar) Cambridge, M.I.T. Press.