



CENTRE ALAIN-SAVARY

« L'enseignement des nombres décimaux à l'école primaire et au collège

Questions de formation, obstacles, choix didactiques »

Lyon 10 mars 2020

Université de Bordeaux.



Joël Briand

ddm.joel.briand.free.fr

Equipe
Opération maths
Euromaths.



L'étude des décimaux en formation des professeurs est intéressante pour plusieurs raisons

- - C'est un objet mathématique pour lequel des PE et des PLC ne sont souvent pas très à l'aise pour des raisons diverses. Une mise au point mathématique (laquelle ?) est alors utile.
- Pour son enseignement, l'institution elle-même donne des consignes fluctuantes (entre pratiques sociales de références et savoirs de référence, sans parler des opérations).
- Une réflexion sur leur enseignement permet
 - - d'aborder la notion d'obstacle (épistémologique (ordre, rôle du 0), didactique (abus de langage pour dire les nombres décimaux))
 - - de mettre en évidence des « points aveugles » dans l'enseignement, en particulier les relations entre les nombres et la droite numérique
 - - de réfléchir sur les liens entre manipulation et conceptualisation et donc de se familiariser avec la notion de situation (adidactique) de validation (sémantique, syntaxique).
 - - d'étudier au sein d'une liaison école collège le difficile passage de la fraction partage à la fraction quotient.

Plan

Partie 1

- 1-1 Comparer des situations : buts des mathématiques
- 1-2 Etat des lieux
- 1-3 Questions autour des décimaux.

« Pause cognitive »

Partie 2

- 2-1 Les programmes 2016
- 2-2 Pistes de réflexion
- 2-3 La droite numérique
- 2-4 Proposition pour une progression.

Partie 1

1-1

En guise d'introduction

Aborder un savoir nouveau

L'introduction de la somme de deux décimaux en écriture à virgule

Antécédents :

Les écritures à virgule ont été introduites à partir des fractions décimales

4 scénarios...

- **Situation 1** : Le professeur explique la technique en s'appuyant sur les savoirs des fractions. Il fait ensuite le lien entre savoirs anciens et nouveaux (addition en colonne).
- **Situation 2** : Lecture d'un énoncé écrit au tableau : « Pour construire une grande frise chronologique, des enfants mettent bout à bout deux bandes de carton. La première mesure 1,45 m et la seconde mesure 2,7 m. Quelle est la longueur de la bande ainsi obtenue ? ». Travail individuel ou par groupes. Écriture des démarches sur une grande feuille qui sera affichée éventuellement au tableau. Synthèse collective.
- **Situation 3** : Par groupe : deux baguettes de longueurs connues et affichées : 1,45m et 2,7m. Consigne : « Je vous demande de trouver la longueur de la baguette obtenue en mettant ces deux baguettes bout à bout ». Les élèves disposent de mètres. Ils mesurent et trouvent la longueur totale. Synthèse collective.
- **Situation 4** : Dans la classe, deux baguettes de longueurs connues et affichées: 1,45m et 2,7m. Consigne : « Prévoyez par le calcul la longueur de la baguette obtenue lorsque l'on mettra ces deux bout à bout ».

Ce qui caractérise ces situations

	Situation 1	Situation 2	Situation 3	Situation 4
Problème posé	non	Oui (à partir d'un énoncé)	Oui (à partir d'un matériel)	Oui (à partir d'un matériel)
Action de l'élève	imiter	Calculer soit à l'aide des fractions, soit à l'aide des conversions d'unités.	Mesurer.	Prévoir un résultat soit à l'aide des fractions, soit à l'aide des conversions d'unités.
Transfert de responsabilité	non (ou maïeutique)	Oui	oui (mesurer)	Oui (prévoir puis vérifier en mesurant)
Nature de la tâche	addition des fractions puis addition en colonne	addition des fractions ou conversion des unités de longueurs, puis addition en colonne.	mise bout à bout puis mesurage.	addition des fractions ou conversion des unités de longueurs, puis addition en colonne.

Choisir : pratiques sociales de référence, savoirs de référence.

Réponses envisageables dans les scénarii 2, 3, et 4 :

Rappel : longueurs des bandes : 1,45 m et 2,7 m.

Réponse 3,52	(1 + 2 = 3 et 45 + 7 = 52)
Réponse 3,115	(2 + 1 = 3 et 45 + 70 = 115)
Réponse 1,72	(145 + 27 = 172 puis 1,72)
Réponse 4,15	

Question à poser en formation :

Que serait-il arrivé si on avait choisi pour les longueurs des bandes 1,4m et 2,5m ?

*Ces choix influent significativement sur le déroulement de la séance.
(variables didactiques).*

En 6° avec les unités légales



Petit rappel...

- **Mathématiser c'est construire un modèle** (produit par un langage : i.e. « moyen d'objectiver et de développer la pensée») en vue d'exercer un contrôle sur un milieu (souvent matériel en début de scolarité). C'est donc :
 - **résoudre des problèmes**
anticiper le résultat d'une action, émettre des hypothèses, faire des essais, construire une preuve, les valider ou les invalider, trouver les mots pour dire...
 - **s'entraîner**
 - **apprendre et retenir.**
- La présence d'un milieu matériel n'implique pas réduction de l'activité à une simple manipulation.
- Faire prévoir \neq illustrer.
- Manipuler, verbaliser, abstraire est une vieille lune...

1-2

L'enseignement des décimaux
Etat des lieux

Les décimaux chez les futurs PE

La question posée était : Qu'est- ce qu'un nombre décimal ?

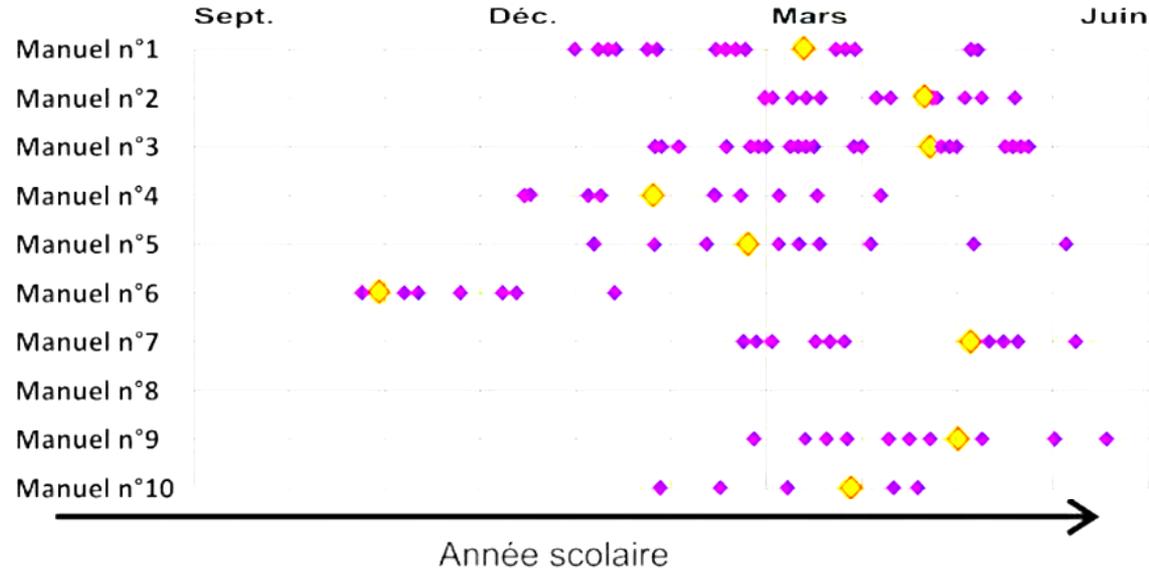
Les réponses (correctes ou erronées) peuvent être classées en cinq catégories :

- **Définition basée sur l'écriture** (*nombre à virgule - avec un nombre fini ou infini de décimales -, deux nombres séparés par une virgule, ...*) ; **40%**
- **Définition basée sur la place des décimaux par rapport aux entiers** (*nombre non entier, nombre entier plus une partie fractionnaire, ...*) ; **15%**
- **Définition basée sur les fractions** (*nombres fractionnaires, nombres fractionnaires se finissant, fractions décimales, ...*) ; **10%**
- **Définition liée à la division** (*résultat d'une division de deux entiers, d'un entier par une puissance de dix, ...*) ; **30%**
- **Définition liée aux puissances de dix ou la numération** (*produit d'un entier par une puissance de dix, sommes de fractions décimales*). **5%**



Fractions et décimaux au CM1

écriture fractionnaire et écriture à virgule



- ◆ Introduction de l'écriture à virgule
- ◆ Séances sur fractions ou décimaux

Source : Thèse « variabilité des pratiques effectives des professeurs des écoles utilisant un même manuel écrit par des didacticiens ».

[Sara Arditì](#)

Sur la toile...

LES NOMBRES

Nombres entiers/
Nombres décimaux

Un **NOMBRE DECIMAL** est une suite de **CHIFFRES**
séparés par une **virgule**

Milliers	Centaines	Dizaines	Unités	,	Dixièmes	Centièmes	Millièmes
----------	-----------	----------	--------	---	----------	-----------	-----------

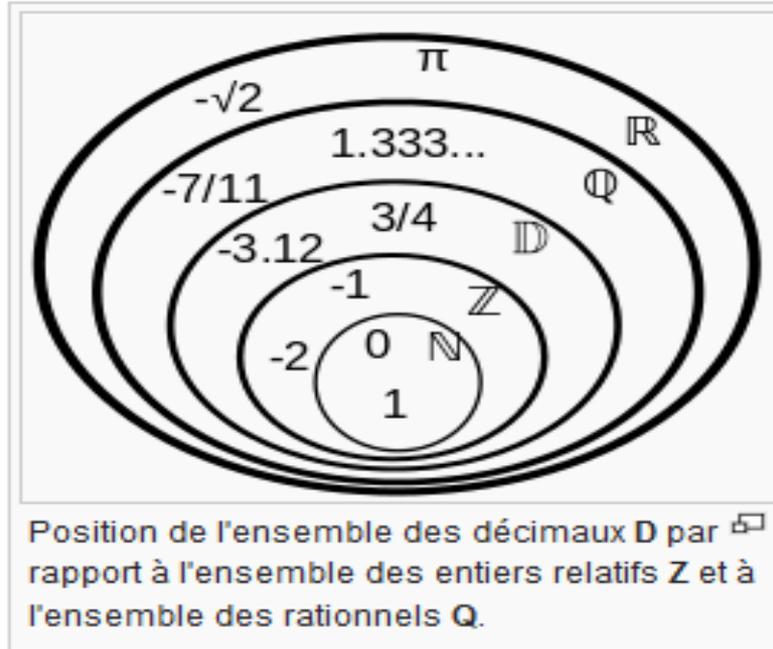
Partie entière

Partie décimale

Ou comment définir un objet par son costume;;;

<http://education.francetv.fr/matiere/mathematiques/sixieme/video/definir-les-nombres-entiers->

Des représentations classiques



Mais un schéma qui donne une conception fautive de l'organisation des nombres. D'où la nécessité de travailler la droite numérique.

Source Wikipedia.

Fractions en 6° en 2017 (29 élèves)

1) Sur une bande papier d'une unité de longueur, placer le nombre $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ à l'aide de pliages.

2) Compléter : $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \dots$

	R2	E2	NR2
R1	11	7	2
E1	0	5	0
NR1	0	3	1

Extrait en 6° en 2017 (29 élèves)

Exercice Cocktail :

Leïla veut préparer un cocktail composé de jus d'orange, de jus d'ananas et de sirop de citron. Pour cela, elle utilise la recette suivante :

Cocktail de jus de fruits :

0,5 L de jus d'orange

$\frac{1}{4}$ de litre de jus d'ananas

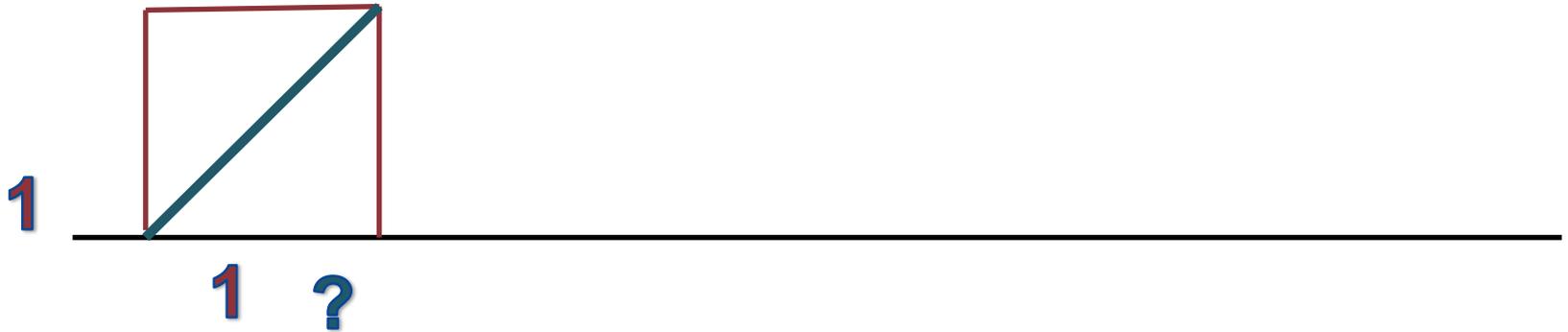
$\frac{1}{10}$ de litre de sirop de citron

Après avoir effectué le mélange, Leïla se demande si elle obtient un litre de cocktail. Propose une méthode pour répondre à cette question.

1-3 Questions autour des nombres décimaux

Des p'tits trous, encore des p'tits trous...

- Avec les décimaux et les fractions on doit couvrir toute la droite numérique ??
- Eh ! non....



- Les Pythagoriciens montrent que la mesure de « ? » n'est pas une fraction... mais 1,414 suffit dans les activités humaines traditionnelles.

Leur intérêt

- Approcher d'aussi près que l'on toute mesure d'une grandeur, donc tout nombre réel,
- Exprimer la mesure de grandeurs continues avec l'approximation voulue,
- Prolonger, sans trop de surcoût, les règles de calcul de notre numération décimale écrite des nombres entiers,
- Mais aussi, éveiller la curiosité dans l'exploration de la droite numérique.

Il y a donc toutes sortes de nombres pour rendre compte de mesures !

- **Trois petits problèmes**

Avec 13 billes, 4 lots, combien de billes par lot?

Se traite avec les nombres entiers : 3 billes. Il en reste une.

Avec une bande de 13 m, 4 morceaux de même longueur, quelle longueur pour chaque morceau?

Se traite avec les nombres décimaux : 3,25 m.

Avec une bande de 13 m, 3 morceaux de même longueur, quelle longueur pour chaque morceau?

Se traite avec les nombres rationnels : $13/3$ m que l'on arrondi en fonction du contexte. Exemple : 4,33 m.

Petit problème

Essayons de ranger les « mots » suivants comme s'ils étaient dans un dictionnaire (les lettres étant 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) :

1002 10134 102 10056 13

-L'ordre des décimaux est le même que celui du dictionnaire. Ce n'est pas celui des entiers naturels.

-Remarque : cela soulève la question de la « perméabilité didactique ».

Les difficultés prévisibles.

(notion d'obstacle)

« C'est dans l'acte même de connaître intimement qu'apparaissent par une sorte de nécessité fonctionnelle des lenteurs et des troubles. La compréhension s'acquiert contre une connaissance antérieure en détruisant des connaissances mal faites »

Gaston Bachelard (1919 - Le nouvel Esprit scientifique)

- **Un obstacle se manifeste donc par des erreurs, mais ces erreurs ne sont pas dues au hasard.**
- **Ces erreurs sont reproductibles, persistantes.**
- **Elles sont liées entre elles par une source commune : une manière de connaître, une conception caractéristique, aberrante sinon correcte, une “connaissance” ancienne et qui a réussi dans un domaine d'actions »**

Objet d'étude en didactique des mathématiques

Nature des obstacles

- Obstacle d'origine ontogénétique

lié à la personne qui apprend

- Obstacle d'origine épistémologique

lié à la nature même de la connaissance. Par exemple, l'ordre des décimaux

- Obstacle d'origine didactique

lié aux choix pédagogiques de l'enseignant. Par exemple, un décimal est un couple d'entiers.

Addition de deux nombres décimaux écrits sous forme « écriture à virgule »

- Voici les travaux d'élèves d'une classe de CM1 :

<p>Aurélien. \emptyset</p> $\begin{array}{r} 1\overset{1}{7}8 \quad 7,8 \quad 7,18 \\ +965 \quad +9,65 \quad +9,65 \\ \hline 1043 \quad 17,45 \quad 16,73 \end{array}$	<p>Tobien 78</p> $\begin{array}{r} 9,65 \\ + 96 \\ \hline 1,043 \end{array}$
<p>Véronique</p> $\begin{array}{r} 85 \\ + 7 \\ \hline 16 \end{array} \quad + \quad \begin{array}{r} 8 \\ 73 \\ \hline 16,73m \end{array}$	<p>Virginie</p> $\begin{array}{r} 9,65 \\ + 7,8 \\ \hline 1,043 \end{array}$
<p>Marc Antoine</p> $\begin{array}{r} 9 \mid 65 \\ 7 \mid 8 \\ \hline \end{array} \quad + \quad \begin{array}{r} 7 \mid 8 \\ 16 \mid 73 \\ \hline \end{array} \quad 16,73$	<p>Nicolas</p> $\begin{array}{r} 9,65 \\ + 7,8 \\ \hline 1043 \end{array}$
<p>aurélien</p> $\begin{array}{r} 9,65 \\ 7,8 \\ \hline 16,73 \end{array}$	<p>MURIELLE</p> $\begin{array}{r} 7,8 \\ 9,65 \\ \hline 9,773 \end{array}$
<p>Claude</p> $\begin{array}{r} 7,8 \\ 9,65 \\ \hline 16,45 \end{array}$	<p>Christophe</p> $\begin{array}{r} 7,8 \\ + 9,65 \\ \hline 17,45 \end{array}$
<p>Mathieu</p> $\begin{array}{r} 7,8 \\ + 9,65 \\ \hline 9,773 \end{array}$	<p>Emilie M.</p> $\begin{array}{r} 7,800 \\ + 9,650 \\ \hline 17,450 \end{array} \rightarrow 17,45m \text{ de tissu.}$
<p>Lylvie</p> $\begin{array}{r} 7,8 \\ + 9,65 \\ \hline 1943 \end{array}$	

Des erreurs persistantes...signes d'obstacles

- E_1 : $4,2 \times 2,3 = 8,6$: 4 fois 2 font 8 et 2 fois 3 font 6
 $5,8 + 2,3 = 7,11$: 5 et 2 font 7 et 8 et 3 font 11.
- E_2 : $3,2 < 3,13$ puisque $2 < 13$
- E_3 : 1,23 et 1,230 sont des nombres différents.
- E_4 : 2,63 et 2,64 sont des décimaux consécutifs : il n'y a pas de nombre entre 63 et 64.
- E_5 : $525 \times 0,3 > 525$ ou $525 \times 0,3 = 1575$: quand on multiplie, on obtient un nombre plus grand.
- E_6 : $15,6 \times 10 = 15,60$ ou encore $15,6 \times 10 = 150,60$: pour multiplier par 10, il suffit de placer un 0 à droite du (des) nombre(s).

Des exercices à éviter

Exemples:

1. Ranger dans l'ordre croissant les nombres suivants:

4 5,677 3,15 3,14 5,5

2. Calculer

$3,58 + 105,34$

$54,75 - 23,56$

$49,2 \times 3$

3. Trouver un nombre entre 2,34 et 2,37

Détour par l'histoire

LA DISME,

Enseignant facilement expedier par nombres entiers sans rompuz,
tous comptes se rencontraux aux affaires des Hommes.

*Premierement descrite en Flameng, et maintenant convertie en François,
par SIMON STEVIN de Bruges.*

Décidons d'écrire $\frac{3}{10}$ $\frac{7}{100}$ $\frac{5}{1000}$

de la façon suivante : $3^{①}$ $7^{②}$ $5^{③}$

c'est-à-dire 3 Primes 7 Secondes 5 Tierces.

Semblablement $8^{①}$ $9^{①}$ $3^{②}$

valent $8 \frac{9}{10} \frac{3}{100}$, ensemble $\frac{893}{100}$.



A propos des notations...

Notre dame de la Garde à Marseille
(document touristique offert).

Quelques chiffres impressionnants :

Altitude de la colline	147,85 m
Hauteur des remparts	13,15 m
Hauteur de la Tour	33,80 m
Hauteur du piédestal de la statue	12,50 m
Hauteur de la statue monumentale	9,72 m
Poids de la statue	9,796 kg
Tour du poignet de l'enfant Jésus	1,10 m
Poids du Bourdon	8,234 kg
Hauteur du Bourdon	2,50 m
Poids du battant	387 kg

Un manuel de mathématiques CM au Mexique.

Ampliar el conocimiento sobre los decimales

LECCIÓN **37** Las apariencias engañan

1. En esta lección ampliarás tus conocimientos sobre los decimales. Pon mucha atención porque, a veces, las apariencias engañan.

- Ana dijo: Mi cinta de medir tiene 2.30 metros de largo.
Paula dijo: **La mía es más grande, tiene 200 centímetros y 300 milímetros!**

¿Es cierto lo que dijo Paula? _____ ¿Por qué? Discútelo con tus compañeros. Luego anota la conclusión que obtuviste con base en la discusión.

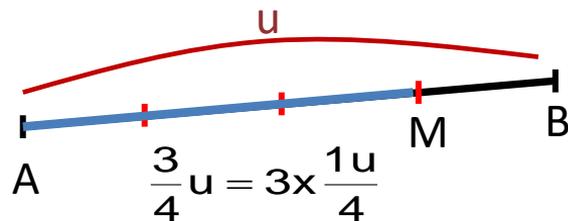
Las siguientes son las medidas de cuatro listones que Paula cortó. Ordénalas empezando por la menor: 5.25 m, 5.19 m, 5.3 m, 5.1740 m.

Ecriture décimale des durées :

« **embrayage : 3,5 heures** ».

(1h15 min c'est donc 1,25....)

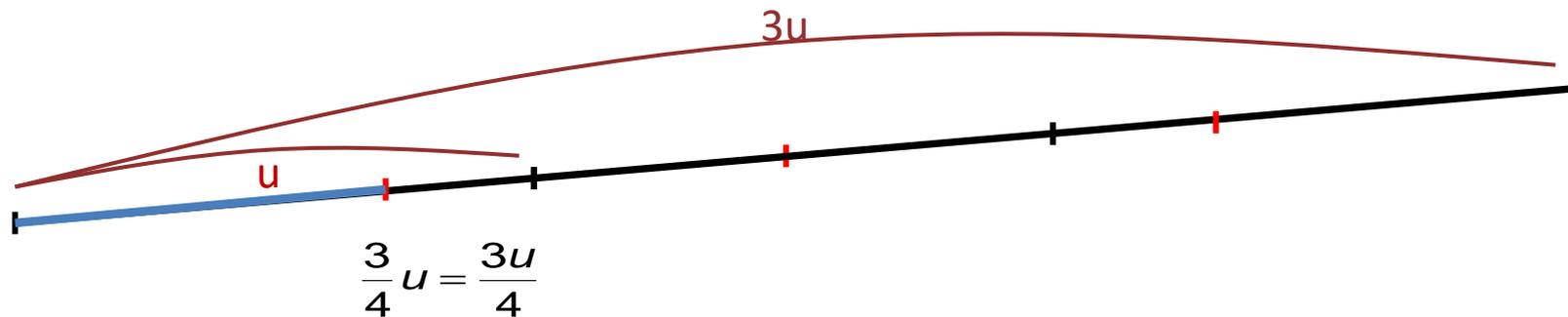
Deux conceptions des fractions



-« 3 quarts » renvoie au partage du segment unité (de mesure 1) qui est fractionné en 4 parts égales (par pliage) et l'on prend 3 de ces quarts. Dans ce cas, on parle de « **fractionnement de l'unité** ».

$\frac{3}{4}u$ est la mesure du segment [AM]

Autre conception



-« 3 divisé par 4 » renvoie au partage d'un segment de mesure $3u$ en 4 segments de mesures égales (cela peut être un segment de mesure $3u$, mais cela peut être aussi 3 pizzas, etc.). On parle alors de « **commensuration** ».

C'est cette seconde conception qui donne du sens à la « fraction quotient ».

« Pour faire $3u$ il faut $4u'$ » ; « $4x = 3$ »

Les programmes 2016 renvoient à la 6^o cette conception des fractions.

*** Pause cognitive ***

Partie 2

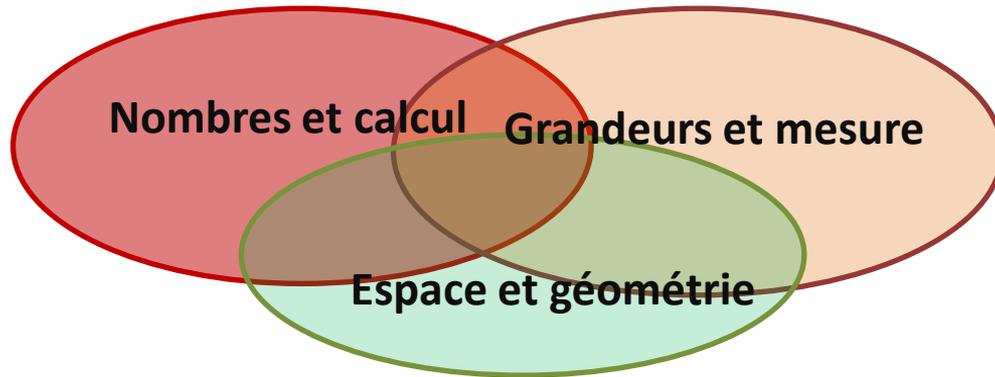
2-1 les programmes 2016 de l'école primaire

Programmes 2016

6 Compétences travaillées

- Chercher
- Modéliser
- Représenter
- Raisonner
- Calculer
- Communiquer.

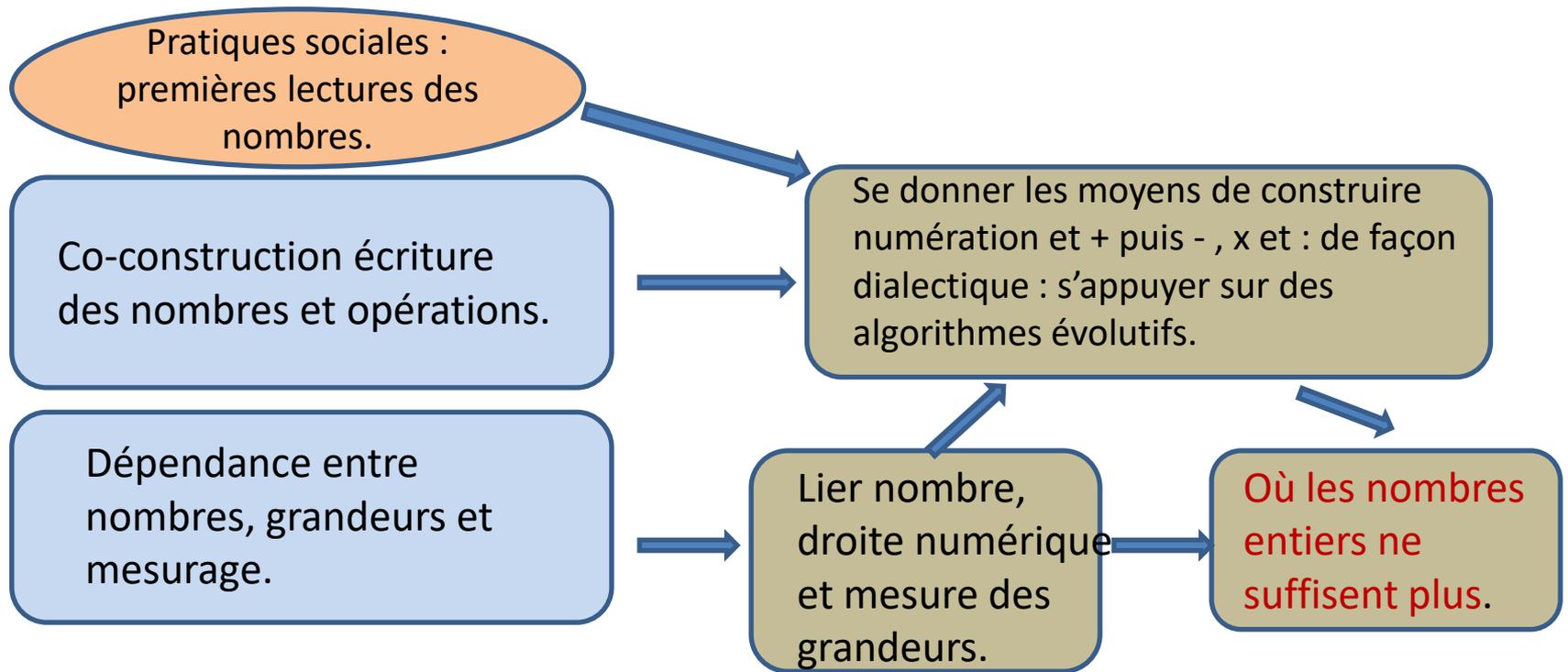
Trois domaines imbriqués



L'accent est mis sur 3 points essentiels

- L'articulation très forte entre nombres et grandeurs d'où la résolution de problèmes vue comme activité de modélisation de situations faisant intervenir les grandeurs.
- L'étude de différentes représentations des nombres, qu'elles soient langagières ou symboliques (désignations orales, décompositions/ recompositions, demi droite graduée..) et sur leurs liens
- Un point de vue sur le calcul, conséquence de ces 2 points
 - le calcul est "motivé" par les situations qu'il permet de résoudre (sans manipulations),
 - il est nourri des équivalences entre les différentes désignations des nombres.

De ce fait les techniques opératoires usuelles n'interviennent que lorsque le besoin s'en fait sentir, progressivement sur les 3 années du cycle.



A propos des décimaux retour à plus de réalisme.

- Fractions et décimaux : Les fractions sont à la fois objet d'étude et support pour l'introduction et l'apprentissage des nombres décimaux. Pour cette raison, on commence dès le CM1 l'étude de fractions simples (comme $1/2$ $1/4$ $1/3$ $2/3$...) puis celle des fractions décimales.
- Du CM1 à la 6^{ème}, on aborde différentes conceptions possibles de la fraction, du partage de grandeurs jusqu'au quotient de deux nombres entiers, qui sera étudié en 6^{ème}.
- Pour les nombres décimaux, les activités peuvent se limiter aux centièmes en début de cycle 3 pour s'étendre aux dix-millièmes en 6^{ème}.

Les opérations

- Addition et soustraction pour les nombres décimaux dès le CM1,
- Multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier au CM2 ; multiplication de deux nombres décimaux en 6^{ème}.
- Division euclidienne dès le début du cycle 3, division de deux nombres entiers avec quotient décimal ; division d'un nombre décimal par un nombre entier à partir du CM2. Sera consolidé en 6[°].

2-2 des pistes de réflexion

Travail effectué en classe de 6°

But : réfuter le modèle : $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{3}{7}$

La bande bleue a été mesurée à l'aide de la graduation réalisée en demi $\frac{1}{2}$



La bande jaune a été mesurée à l'aide de la graduation réalisée en cinquièmes : $\frac{2}{5}$



Question : « prévoyez par le calcul la mesure de la bande obtenue en mettant bout à bout ».
Une fois les prévisions effectuées, vérification à l'aide du matériel

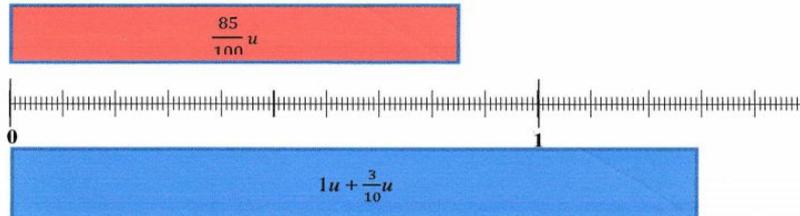


APMEP atelier octobre 2017 IREM de LYON (Sophie Roubin, Bruno Rozanes)

BANDES ACCOLEES¹

DESCRIPTION RAPIDE : On dispose de deux bandes de longueurs différentes dont la mesure donnée est une fraction décimale de l'unité. Les élèves doivent d'abord prévoir quelle sera la longueur obtenue en mettant les deux bandes bout à bout puis trouver une disposition des nombres qui leur permette d'effectuer rapidement l'addition posée des deux mesures....

MATERIEL :



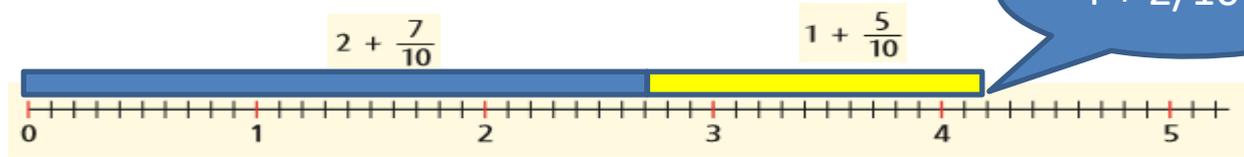
- Une demi-droite graduée en centièmes
- Deux bandes respectivement de longueur $1u + \frac{3}{10} u$ et $\frac{85}{100} u$ à projeter ou à construire en grand pour pouvoir être affichées au tableau.

CONSIGNES

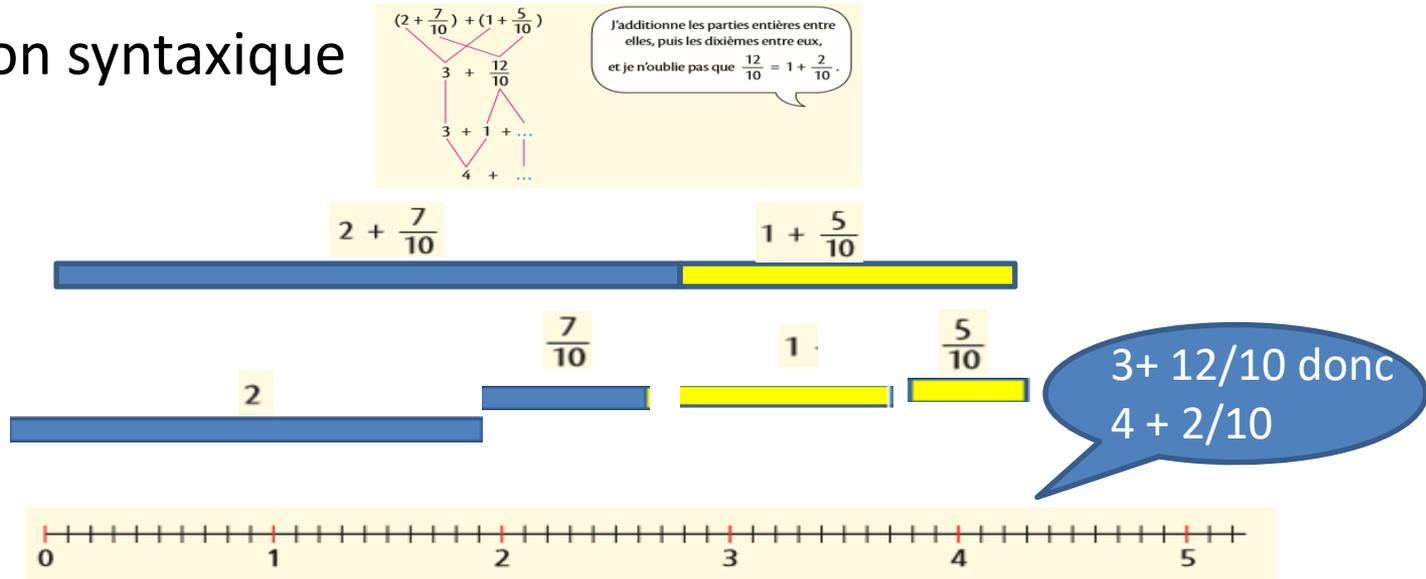
1. Vous rangez les bandes et les droites graduées dans une enveloppe. Vous devez prévoir combien mesurerait une bande ayant la même longueur que vos deux bandes mises bout à bout. On les sortira ensuite pour vérifier.
2. Vous devez maintenant essayer de poser l'addition de $1u + \frac{3}{10} u$ et de $\frac{85}{100} u$. (Cela doit vous permettre de retrouver le résultat précédent.) Vous travaillerez d'abord seuls puis vous vous mettrez d'accord à plusieurs sur une disposition qui vous semble pratique.

Continuité rupture entre manipulation et preuve

Validation pragmatique



Validation syntaxique



Passage de la fraction partage à la fraction quotient

Document d'accompagnement 6°

L'écriture $\frac{13}{5}$, dans la conception partage travaillée au cours moyen, représente « 13 cinquièmes de l'unité ». Or, un cinquième de l'unité, c'est l'unité partagée en 5 ; une unité est égale à dix dixièmes, un cinquième de l'unité est donc égal à 2 dixièmes de l'unité¹⁰ ; on montre ainsi que « 13 cinquièmes de l'unité » est égal à 13 fois 2 dixièmes de l'unité, soit 26 dixièmes, ou 2,6. Ce raisonnement permet de valider le fait que l'écriture $\frac{13}{5}$, sera aussi utilisée pour noter le quotient de 13 par 5 ; on parlera cette fois de la conception quotient de la fraction $\frac{13}{5}$.

De la fraction partage à la fraction quotient

Partage et quotient

A Sur la demi-droite graduée

1 Reproduire la demi-droite graduée ci-dessous.



2 a/ Quelle est l'abscisse du point A ?

b/ Placer les points B d'abscisse $\frac{2}{3}$, C d'abscisse $\frac{3}{3}$ et D d'abscisse $\frac{4}{3}$.

3 a/ Placer le point E tel que $OE = OB \times 3$.

b/ Quelle est l'abscisse du point E ? Expliquer.

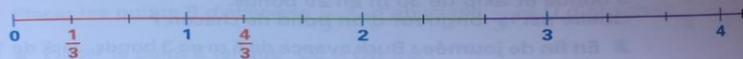
c/ Avec quel point déjà placé est confondu le point F tel que $OF = OE : 3$? Quel est le résultat exact de $2 : 3$?

1 Du partage au quotient

$\frac{4}{3}$ = quatre tiers = 4 fois un tiers $\frac{4}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$

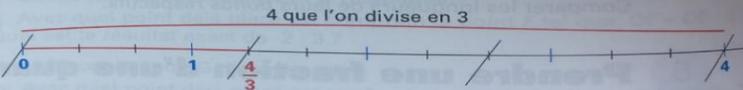


Alors 3 fois $\frac{4}{3}$ donne 4 :



Donc :

$$\frac{4}{3} = 4 : 3$$

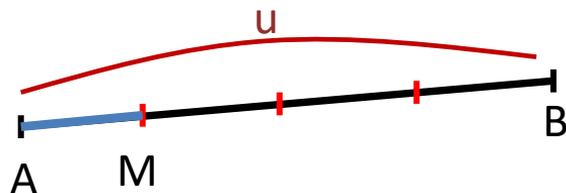


$\frac{4}{3}$ est le nombre qui, multiplié par 3, donne 4 c'est-à-dire $\frac{4}{3} \times 3 = 4$.

● Passer de l'abscisse à la longueur du segment ne va pas de soi.

● Si cette incertitude est levée, la démarche est adaptée.

Proposition pour le CM2 : faire un lien uniquement dans le cas des dixièmes de l'unité après construction des écritures à virgules et de la division.

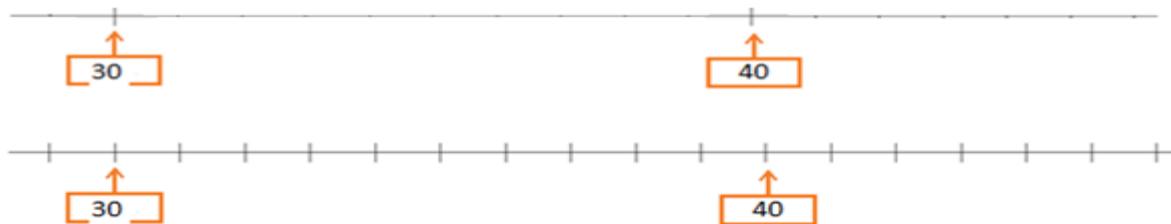


-« 1 quart (de l'unité) » c'est 1 divisé par 4 donc 0,25.

2-3

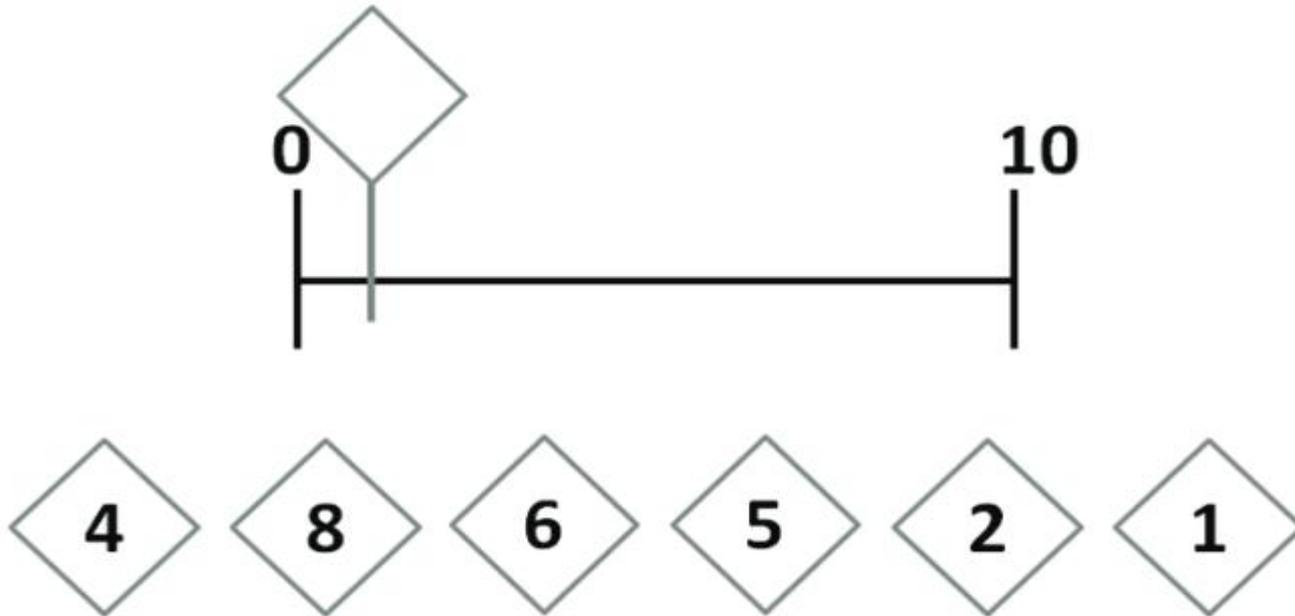
**la droite numérique objet
d'enseignement**

Nécessité de construire une image mentale de la droite numérique

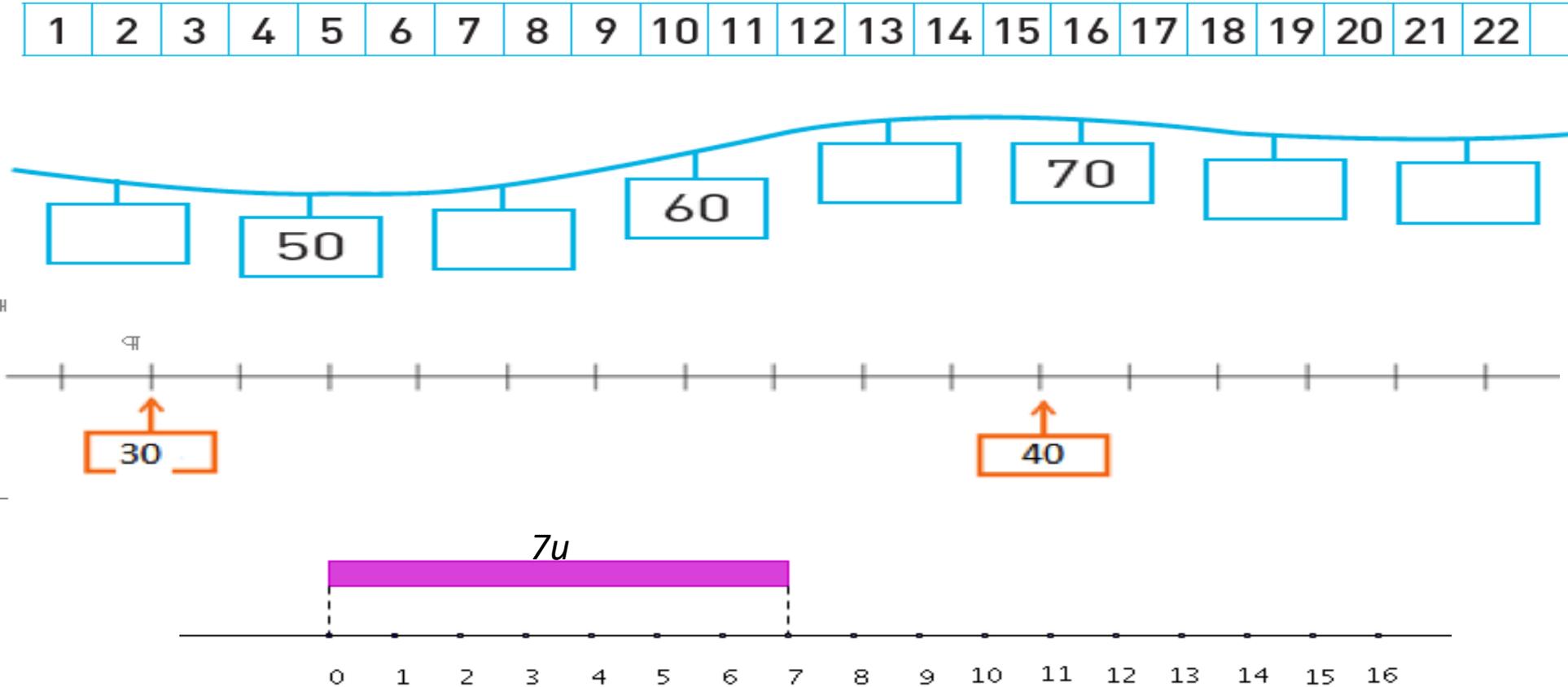


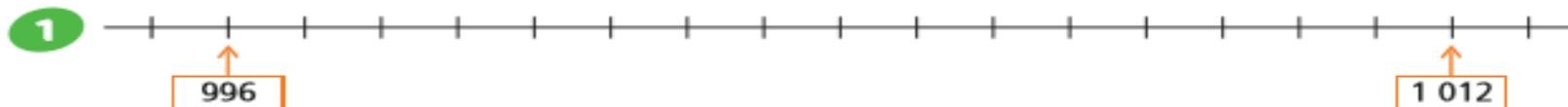
- Travailler le lien entre distance (notion géométrique : nombre de graduations) et écart (notion numérique : l'écart 37-15)
- Permet de donner du sens à
 - « 36 est entre 30 et 40 »
 - « 39 est proche de 40 »
 - « 35 est entre 30 et 40. Il est juste au milieu »
 - « 35 est à égale distance de 30 et 40 »
 - Etc.

Exercice 6 des repères CP 2019...



Piste, file, droite numérique, double décimètre : du discret au mesurable

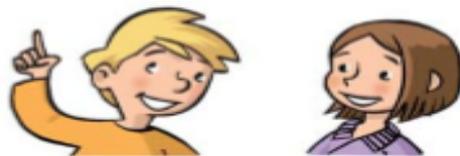




a. Complète : « Cette droite est graduée de ... en ... ».
Reproduis la droite graduée et place le nombre 1 000.

b.

Mon nombre est
à égale distance
de 996 et de 1 012.



Le mien est entre
1 000 et 1 010 et
il se termine par 7.

Différentes échelles de graduation... ... vers la proportionnalité (CE2, CM1)

Pour représenter les nombres, on peut les placer

– sur une droite graduée de 1 en 1.



– sur une droite graduée de 10 en 10.



2 graduations qui se suivent
correspondent à 2 nombres
consécutifs,

à 2 dizaines
consécutives

– sur une droite graduée de 100 en 100.



ou à 2 centaines
consécutives.

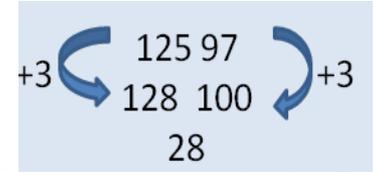


La technique « par compensation ou translation » : exemple 125-97

Méthode « à la russe » : on cherche un nombre rond

100

128



100

110

120

130

140

- Méthode usuelle : on ne peut pas calculer 5-7 : on ajoute 1 dizaine à 125 et pour conserver l'écart on ajoute 1 dizaine à 97.

107

125
-97

135

100

110

120

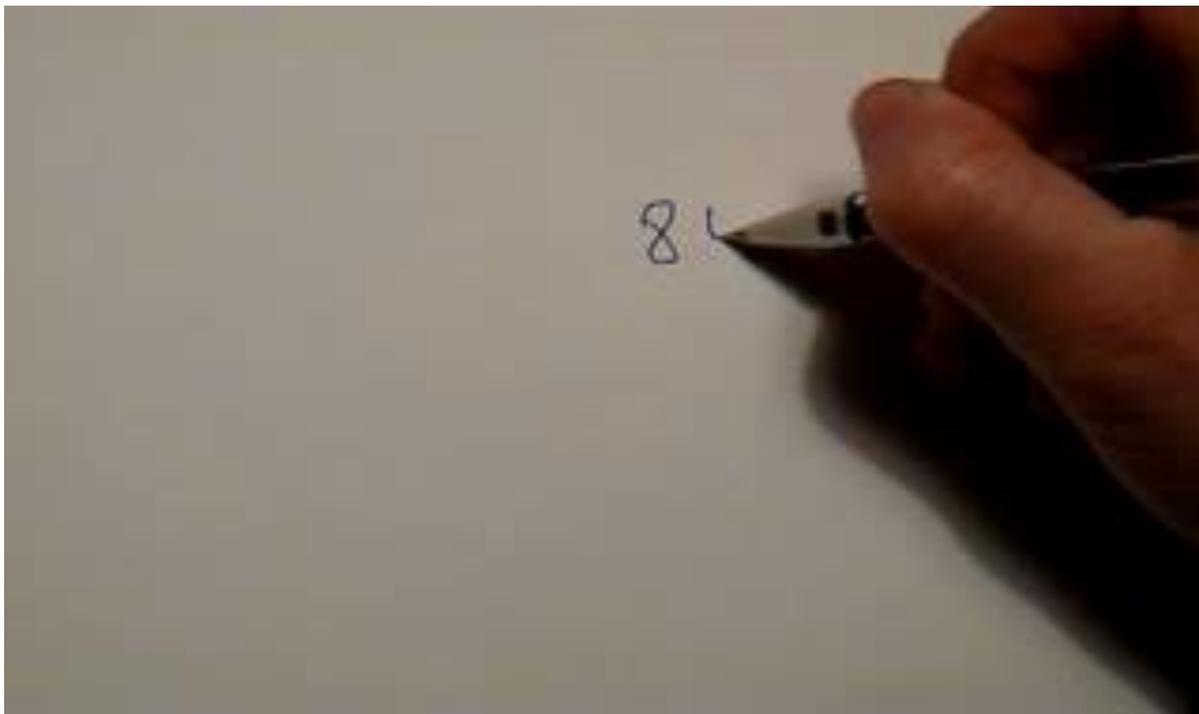
130

140

avantages : cette technique est utilisable quels que soient les nombres choisis. Elle s'appuie sur des propriétés mathématiques qui seront utiles au cycle 3 et au collège. C'est la technique usuelle de la soustraction en France, elle sera enseignée au cycle 3. Les élèves qui l'auront apprise en CE1 n'auront pas besoin de changer de technique au cycle 3.

inconvénient : elle nécessite de prendre le temps de travailler la propriété de conservation des écarts, sur laquelle elle repose.

L'algorithme de la soustraction en CE1 se construit donc à partir d'une bonne connaissance de la droite graduée.



Technique définitive

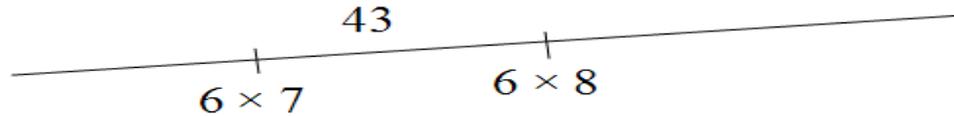
Droite graduée et multiplication



- a.** Reproduis cette droite graduée de 3 en 3.
Sous chaque graduation, complète avec un nombre et un produit.
- b.** Place approximativement le nombre 41 sur cette droite.
- c.** Encadre 41 par deux multiples consécutifs de 3 : $3 \times \dots < 41 < 3 \times \dots$

Droite graduée et division

- Résoudre des problèmes en s'appuyant sur la droite numérique :



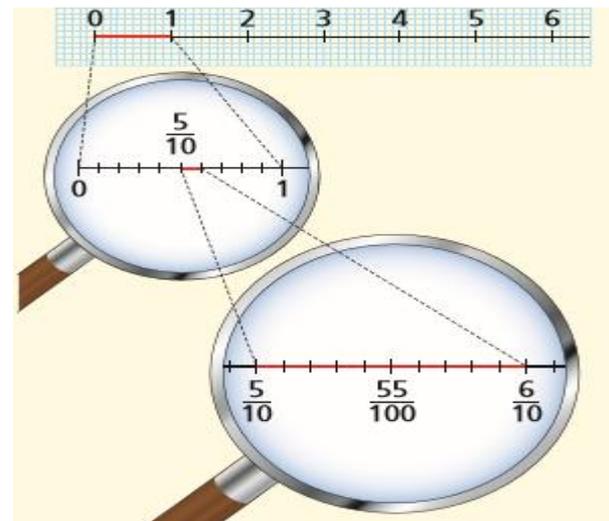
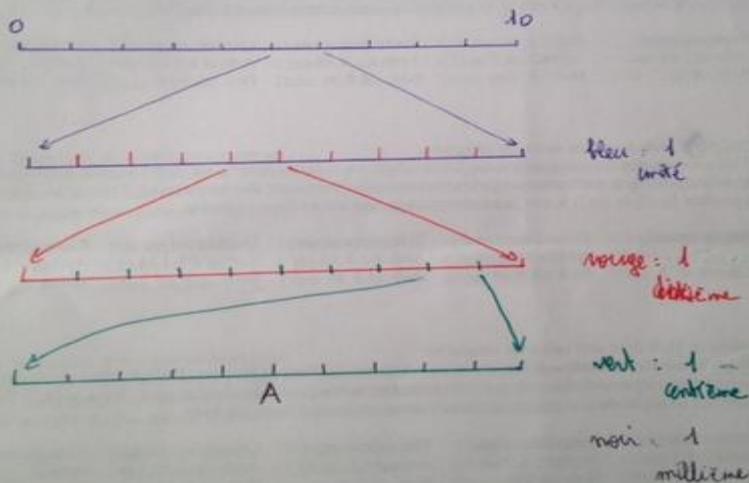
« Quand on encadre 43 par deux multiples consécutifs de 6 et que l'on écrit $43 = (6 \times 7) + 1$, on dit que l'on fait la division de 43 par 6. Dans cette division, le nombre 7 s'appelle le quotient. C'est le nombre de fois où 6 est contenu dans 43. 1 s'appelle le reste. »

La droite graduée et la mesure (CE2- CM1 – CM2)

Un nombre désigne à la fois un point, la distance de ce point à l'origine, mais aussi la longueur d'une bande.



Je te montre ce qui est attendu avec le code couleur qu'on a adopté.



Claire et Dina font des sauts en longueur.

Pour chacun des 5 essais, place les lettres C (pour Claire) et D (pour Dina) le plus précisément possible pour que ton camarade puisse retrouver la longueur de chaque saut. Pour cela, il faut respecter la règle du jeu que je te montre avec un exemple au tableau.

Premier essai :	Deuxième essai :	Troisième essai :	Quatrième essai :	Cinquième essai :
Claire : 4,6 m	Claire : 4,8 m	Claire : 4,64 m	Claire : 5,389	Claire : 5,785 m
Dina : 5 m	Dina : 4,5 m	Dina : 4,7 m	Dina : 5,3 m	Dina : 5,783 m

2-4

Proposition pour une progression

Les objectifs à atteindre

- Prendre conscience de l'insuffisance des entiers pour résoudre certains problèmes sur les grandeurs
- Envisager de nouveaux nombres pour résoudre ces problèmes
- Faire le lien entre ces nombres et les entiers
- Prolonger à ces nombres l'ordre des entiers
- Concevoir qu'entre ces nouveaux nombres, on peut toujours en intercaler un autre, ce qui est décisif pour la mesure
- Prolonger à ces nouveaux nombres les opérations
- Utiliser ces nouveaux nombres dans des situations d'approximation dans le cadre de la mesure des grandeurs
- Utiliser ces nouveaux nombres dans des problèmes variés.

Des points d'appui

- La construction de fractions simples et surtout de fractions décimales est justifiée par le fait qu'elles sont utiles à une compréhension correcte des nombres décimaux

$$12 + \frac{5}{10} + \frac{4}{100} = 12,54$$

- Pour les fractions décimales, le passage à l'écriture à virgule est une simple convention
- Ce sont les fractions décimales qui permettent de travailler la signification des chiffres qui composent la partie décimale d'un décimal

Nos choix

- Les fractions et les décimaux doivent apparaître comme de nouveaux nombres, utiles pour résoudre des problèmes que les entiers ne permettaient pas de résoudre :
 - Problèmes de partage
 - Problèmes de mesures de longueur et d'aire
 - Problèmes de repérage d'un point sur une droite.
 - On ne demande pas une grande expertise des fractions en général : elles sont un point de passage. Le fractionnement de l'unité suffit.

Premier bloc d'étapes (en période 4 du CM1)

1 : les fractions au quotidien

Evocation de situations quotidiennes dans lesquelles les fractions sont utilisées.

Partage de bandes par pliage.

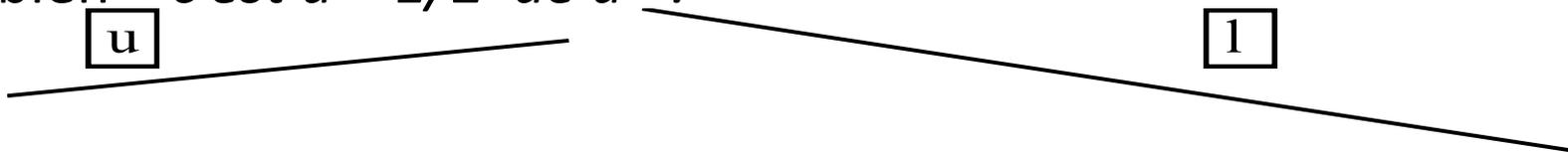


2 : Situation de communication

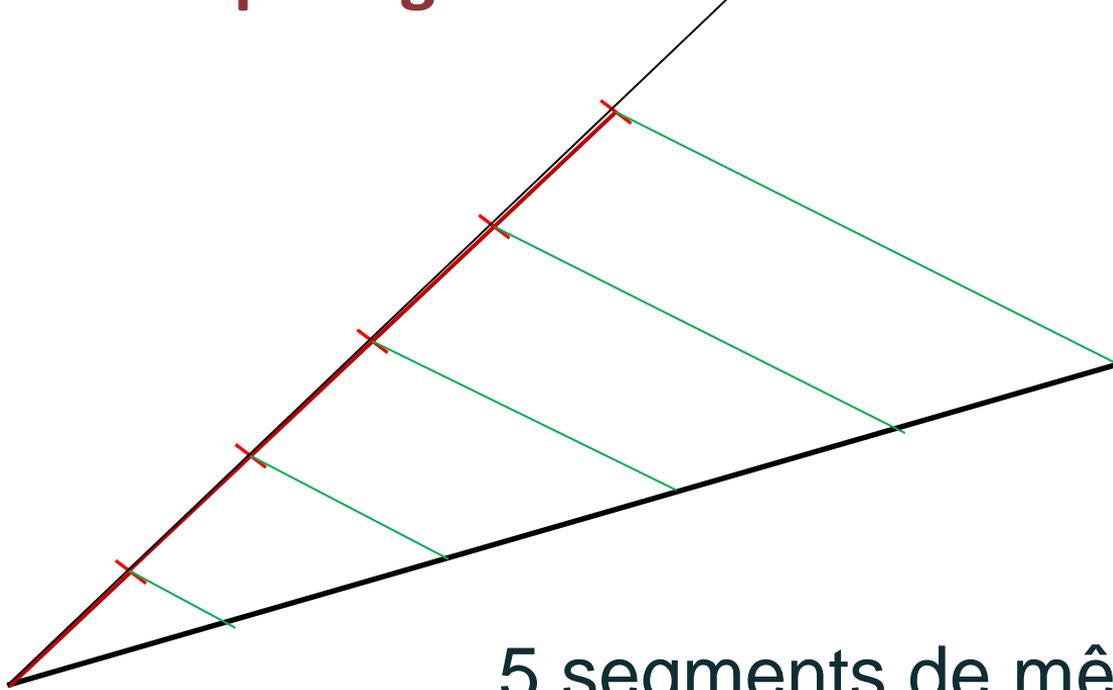
But : permettre de palier l'insuffisance des nombres entiers pour mesurer une longueur.

Situation : tracer un segment de même longueur qu'un segment donné à partir d'un message. Emetteur et récepteur ont le segment unité.

Cette situation permet la production de messages du type : « *Le segment mesure une unité plus la moitié de l'unité* » ou bien « *c'est $u + 1/2$ de u* ».

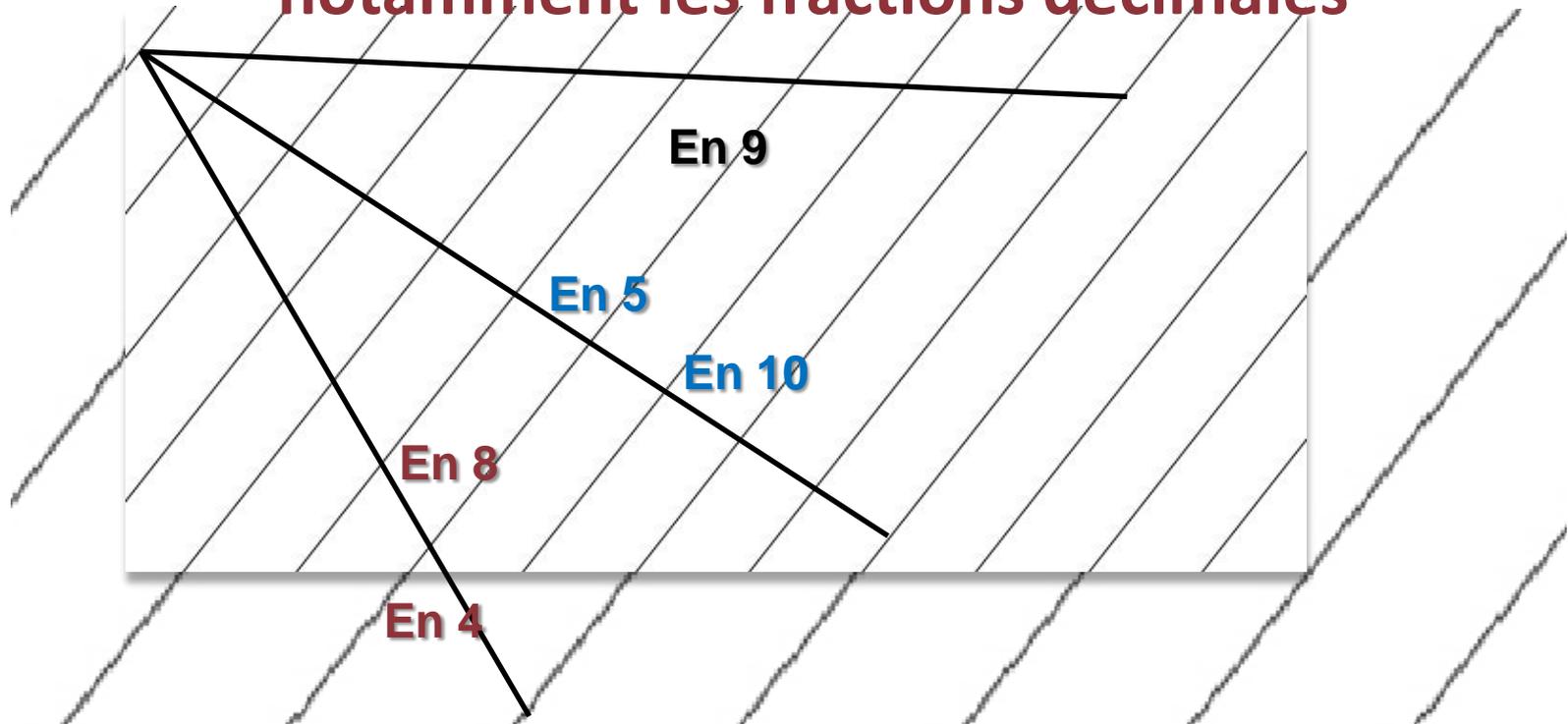


3 : « machine à partager » basée sur un savoir faire ancien...



5 segments de même mesure

Environnement de fractions plus riche, avec, notamment les fractions décimales

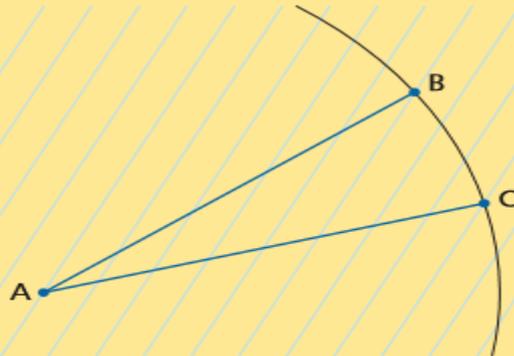


1

u

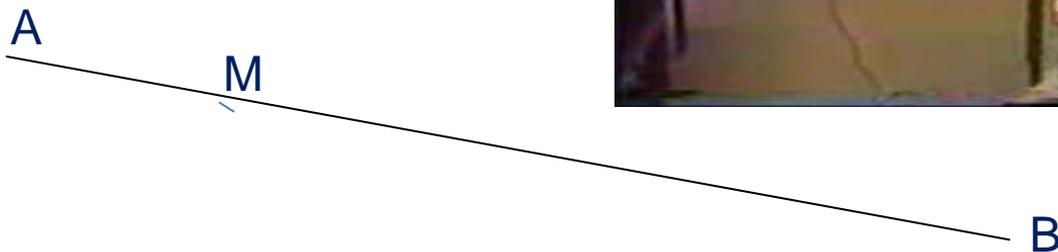


Une machine à partager est un réseau de droites parallèles à la même distance les unes des autres.



- a En traçant un cercle de centre A et de rayon $1 u$ sur ta machine à partager, tu peux obtenir le partage du segment unité en parts égales.
En combien de parts le segment $[AB]$ est-il partagé ?
En combien de parts le segments $[AC]$ est-il partagé ?

Repérer précisément un point sur un segment unité

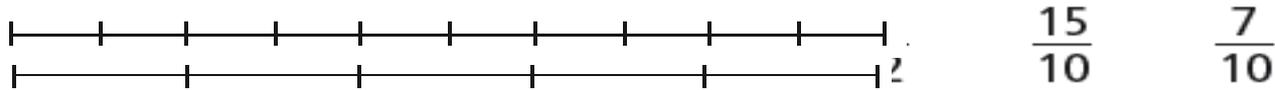


4 : positionner une fraction sur la droite graduée

a. Donne la position des points G, H, I et J sur la droite.



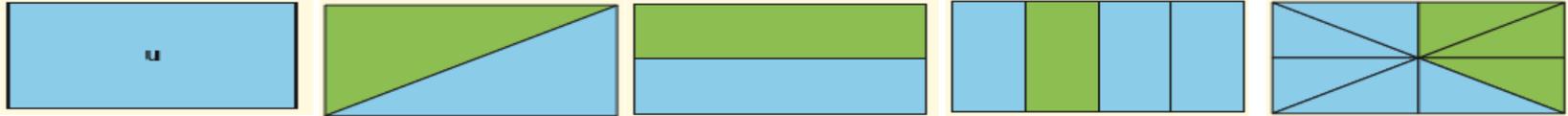
b. Sur cette



$\frac{3}{10}$ désigne la position du point B sur la droite graduée. C'est aussi la distance en unités u de AB.

$\frac{7}{10}$ désigne la position du point C sur la droite graduée. C'est aussi la distance en unités u de AC.

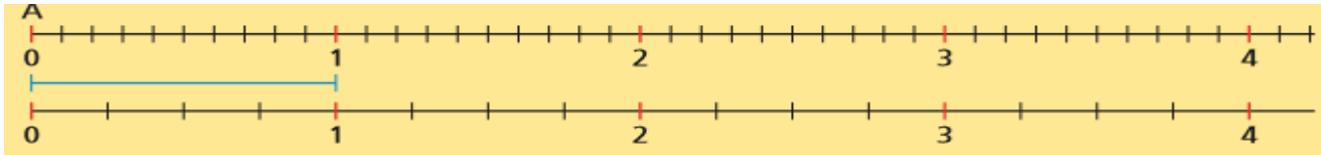
5 : utiliser les fractions pour résoudre des problèmes d'aires



Les fractions permettent aussi d'exprimer la mesure de l'aire de figures planes dès lors que l'on a choisi une aire unité.

6 : les fractions décimales : leur avantage

Placer des fractions à l'aide de la graduation la mieux adaptée puis écrire la fraction sous la forme d'un entier et d'un « rompu »



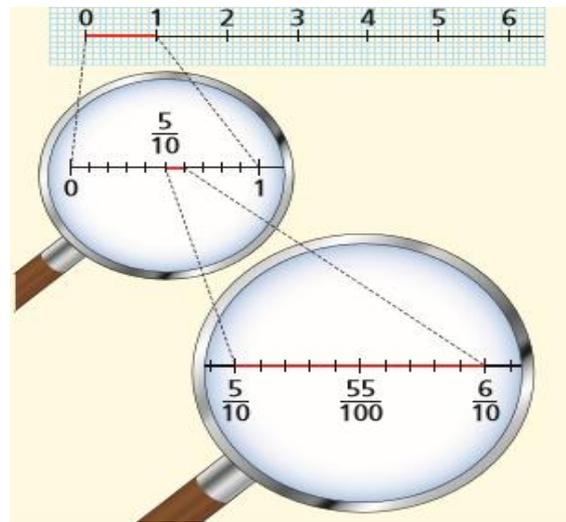
$$\frac{3}{4} \quad \frac{22}{7} \quad \frac{32}{10} \quad \frac{45}{10} \quad \frac{17}{5} \quad \frac{21}{10}$$

Lesquelles sont faciles à localiser à l'aide de leur écriture ?



7 : les fractions décimales : différentes écritures

Enrichir la graduation : les centièmes



S'appropriier différentes écritures

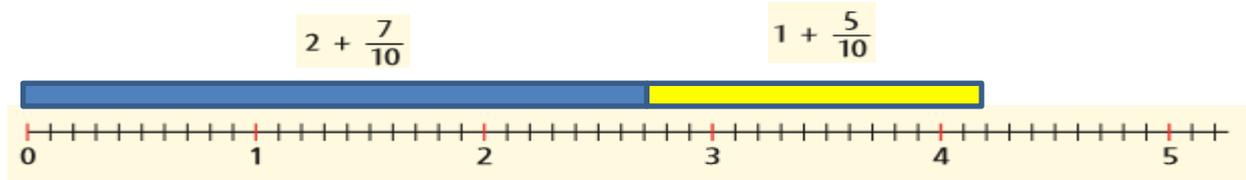
$\frac{247}{100}$ c'est $2 + \frac{4}{10} + \frac{7}{100}$

Non, $\frac{247}{100}$ c'est $2 + \frac{24}{100}$

 $2 + \frac{4}{10} + \frac{7}{100}$ est l'écriture canonique de la fraction $\frac{247}{100}$.

8 : les fractions décimales : les additionner

Validation pragmatique



Validation syntaxique

$(2 + \frac{7}{10}) + (1 + \frac{5}{10})$

$3 + \frac{12}{10}$

$3 + 1 + \dots$

$4 + \dots$

J'additionne les parties entières entre elles, puis les dixièmes entre eux, et je n'oublie pas que $\frac{12}{10} = 1 + \frac{2}{10}$.

Second bloc d'étapes (en période 5 du CM1)

Le second bloc d'étape consiste en le passage conventionnel à l'écriture à virgule.

9 : les nombres décimaux : écritures à virgule (Stevin)

Convention d'écriture.

$$12 + \frac{5}{10} + \frac{4}{100} = 12,54$$



Bien utile pour l'addition

$$1,45 + 2,7 = (1 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100}) + (2 + \frac{7}{10}) = \dots$$

$$\begin{array}{r} 1,45 \\ + 2,7 \\ \hline \end{array}$$

La calculatrice

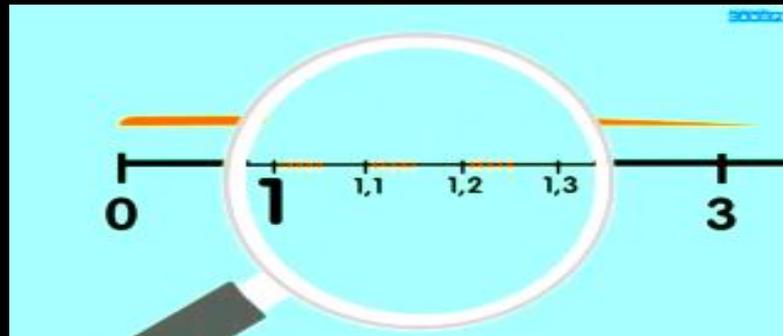
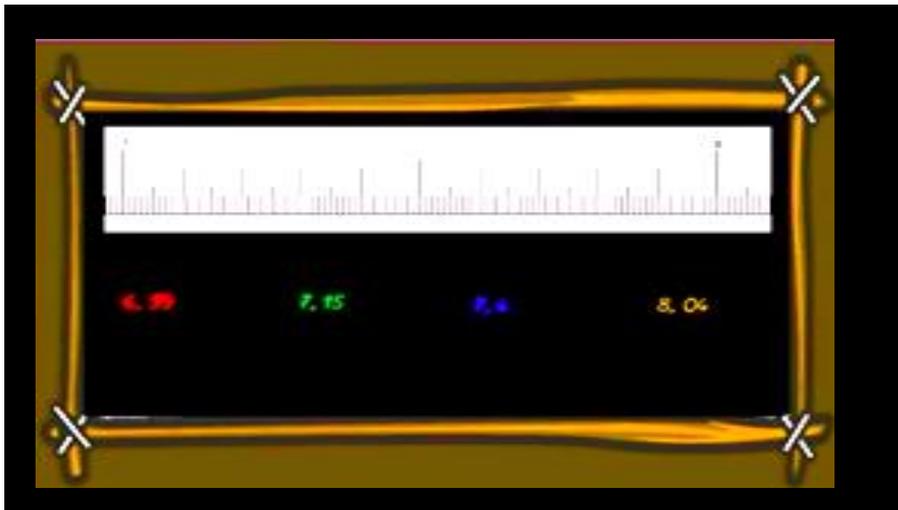
Objectif :

Maîtrise des écritures du type $3,23 = 323/100 = 3230/1000 = \dots$
 $3,23 = 3 + 2/10 + 3/100.$

Consignes :

- 1) Tu dois faire afficher par ta calculatrice les nombres 2, 3 mais ceci sans utiliser la touche virgule, ni d'autres chiffres que 2, 3, 1, 0.
Trouve le plus de moyens possibles.
Ecris sur ton cahier comment tu as fait.
- 2) Même travail avec 0,23 et 3,23.
- 3) Reprends le travail ci-dessus, mais cette fois tu peux utiliser toutes les touches, excepté la touche virgule.

Rester proche de la droite numérique (animations possibles...)



A ce stade, l'égalité $3/4=0,75$ se conçoit éventuellement par passage à $75/100$ par coïncidence sur la droite et non par division.
-L'identification de $3/4$ à $0,75$ devrait s'effectuer au collège et autrement qu'en présentant la division comme une évidence.

10 : Les additionner

La situation



La reprise sur le
manuel



Deux méthodes de
calcul



$$1,45 + 2,7 = (1 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100}) + (2 + \frac{7}{10}) = \dots$$

$$\begin{array}{r} 1,45 \\ + 2,7 \\ \hline \end{array}$$

11 : les comparer

Jeu de l'explorateur : ici le nombre caché est 0,111.

0,1 et 0,2 sont déjà placés. Les élèves savent que le nombre caché est entre 0,1 et 0,2.

La question est « est-il entre 0,15 et 0,20 ? ». La réponse est « non ». Un enfant vient placer ces nombres au tableau.



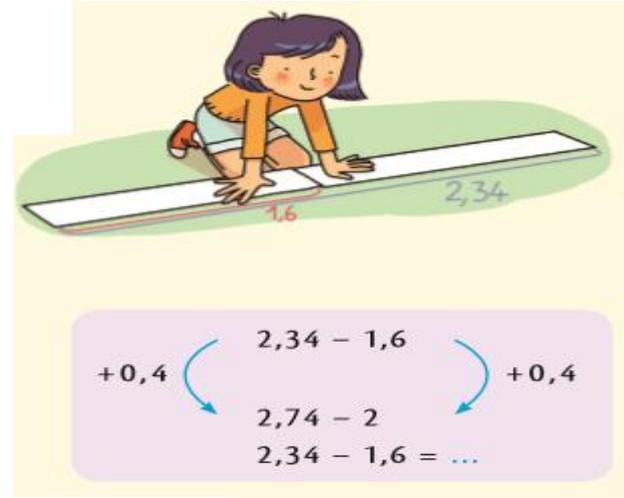
11(2) : les comparer reprise sur le manuel

Questions de Zora	Réponses de Lucas
Est-il plus grand que 10 ?	Non
Est-il plus grand que 5 ?	Non
Est-il plus grand que 3 ?	Oui
Est-il plus grand que 4 ?	Non
Est-il plus petit que 3,5 ?	Non
Est-il plus petit que 3,8 ?	Oui
Est-il plus grand que 3,6 ?	Oui



12 : Les soustraire

L'évocation de la situation sur la manuel



La consolidation de la soustraction à la russe



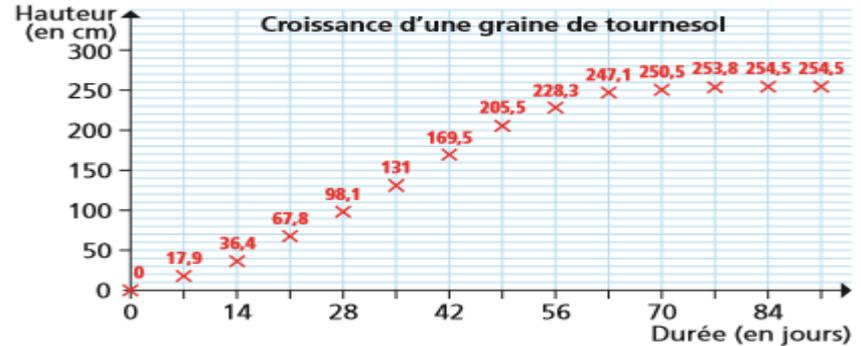
Le rappel du traitement de la soustraction par conservation des écarts



	2,	10+3	4
-	1+1,	6	
<hr/>			
			4

13 : Les convoquer dans des problèmes

Nom	Nationalité	Sauts					
TAKAKUWA Saki	Japon	X	4,67	X	4,83	5,09	5,01
van GANSEWINKEL Marlene	Pays-Bas	5,27	4,85	4,79	4,73	5,14	X
NAKANISHI Maya	Japon	X	4,92	4,72	4,50	X	X
WALSH Sarah	Australie	4,76	4,18	4,72	4,16	4,52	4,40
LE FUR Marie-Amélie	France	5,63	5,51	5,74	5,61	5,65	5,84
PRUYSEN Iris	Pays-Bas	5,00	X	X	4,67	X	4,90



- Quelle unité a été choisie pour écrire ces résultats ? Quel est le meilleur saut de chaque athlète ?
- Quelle est la championne du monde 2015 ? Quelle est la seconde, puis la troisième ?
- En quelle position Sarah Walsh est-elle arrivée ?
- Range ces 6 athlètes selon leur meilleur saut.
- Vérifie tes réponses en écrivant la longueur de chaque saut en mètres et centimètres.

- 5** Convertis en grammes.
- a. 1,5 kg b. 2,35 kg c. 0,75 kg d. 0,5 kg e. 0,25 kg
- 6** Convertis en kg.
- a. 500 g b. 2 500 g c. 750 g d. 250 g e. 100 g

Affiche 34,52. Sans effacer l'écran ni passer par 0, affiche maintenant 34,62.

Affiche 5,37. Sans effacer l'écran ni passer par 0 affiche maintenant 5,36.

Donne un ordre de grandeur de chaque résultat puis utilise ta calculatrice pour effectuer les calculs.

- a. $54,74 + 127,5 + 86,09$ b. $617,24 - 542,76$ c. 457×35

Avec ta calculatrice, **trouve** le quotient de la division de 4 732 par 56, puis **utilise** l'écriture en ligne de cette division pour trouver le reste.

En CM2 :

le cas du produit d'un décimal par un entier, tout va bien!

a. Théo



$$\begin{array}{r} 2,35 \\ + 2,35 \\ + 2,35 \\ + 2,35 \\ \hline \dots\dots\dots \end{array}$$

b. Qwang



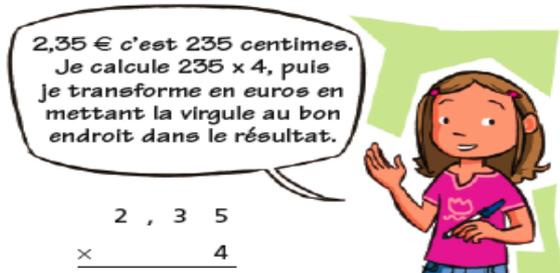
	2	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{100}$
4	$4 \times 2 = \dots$	$4 \times \frac{3}{10} = \dots$	$4 \times \frac{5}{100} = \dots$

$2,35 \times 4 = \dots$

c. Léila propose alors la multiplication en colonne, pas à pas.

$$\begin{array}{r} 2,35 \\ \times \quad 4 \\ \hline \dots\dots\dots \leftarrow 4 \times 0,05 \\ \dots\dots\dots \leftarrow 4 \times 0,3 \\ \hline \dots\dots\dots \leftarrow 4 \times 2 \\ \hline \dots\dots\dots \leftarrow 2,35 \times 4 \end{array}$$

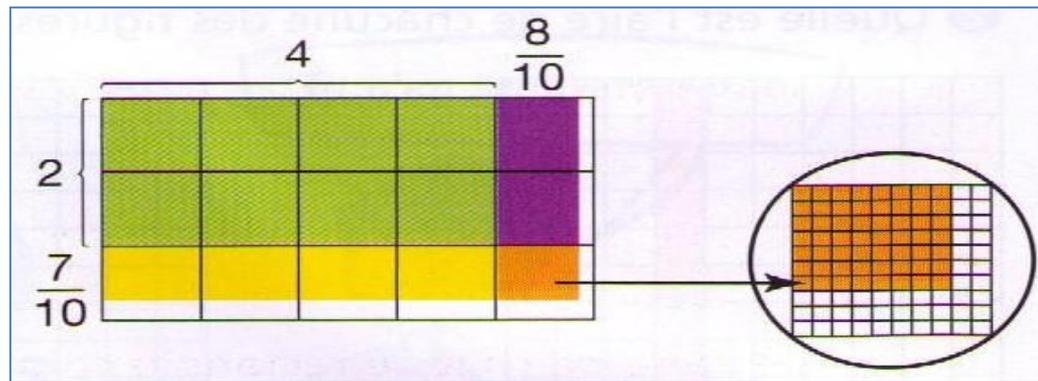
d. Alice



$$\begin{array}{r} 2,35 \\ \times \quad 4 \\ \hline \dots\dots\dots \end{array}$$



Produit de deux nombres décimaux : en classe de 6°



4	$\frac{8}{10}$
2
$\frac{7}{10}$

$4,8 \times 2,7 = \dots\dots$

Je multiplie 48 par 27.
Puis je place la virgule dans le résultat en laissant deux chiffres après elle parce que, quand on multiplie des dixièmes par des dixièmes, on obtient des centièmes.

$$\begin{array}{r}
 4, 8 \\
 \times 2, 7 \\
 \hline
 336 \\
 960 \\
 \hline
 12,96
 \end{array}$$



Merci de m'avoir écouté et...
Bon courage pour la suite.

