

Place et rôle de la manipulation dans la construction du nombre et la résolution de problèmes aux cycle 1, 2 et 3.

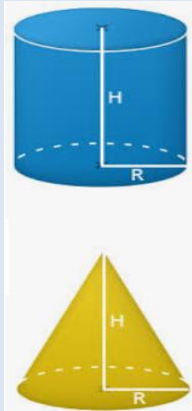
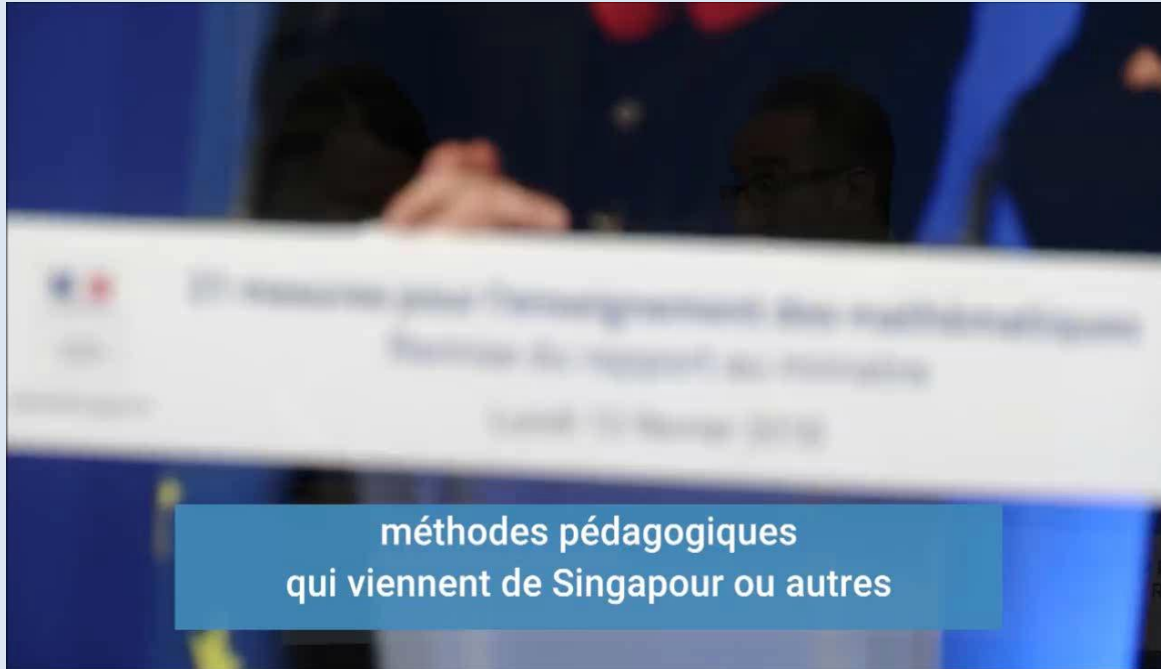
Joël Briand ddm.joel.briand.free.fr

Plan

- **Première partie**
Manipuler, conjecturer, démontrer
Problèmes et situations
- **Deuxième partie**
Des recommandations ministérielles aux situations : les premiers nombres
- **Troisième partie**
Evaluer
- **Quatrième partie**
Concilier activité mathématiques et acquisition des opérations : les algorithmes évolutifs
- **Cinquième partie**
La droite numérique
- **Sixième partie**
Problèmes à énoncé textuel
- **Septième partie**
Prouver, démontrer à l'aide de résultats statistiques
- **Conclusions.**

En guise d'introduction

Un extrait vidéo saisi lors de la présentation du rapport Villani-Torossian



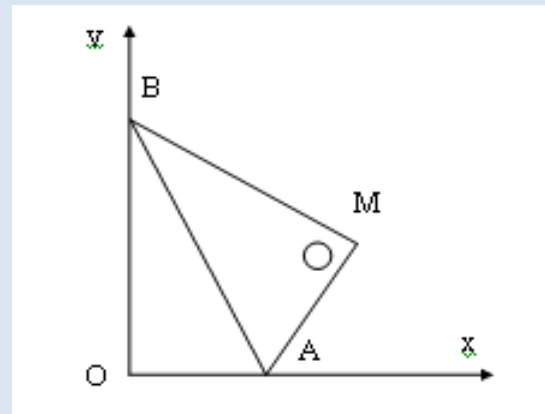
Que nous apprend cet extrait ?

- Que manipuler est ludique ?
- Qu'il suffit d'observer pour démontrer ?
- Que les mathématiques se construisent sans langage ?
- Qu'il n'est donc pas nécessaire de s'embarrasser de formules ?

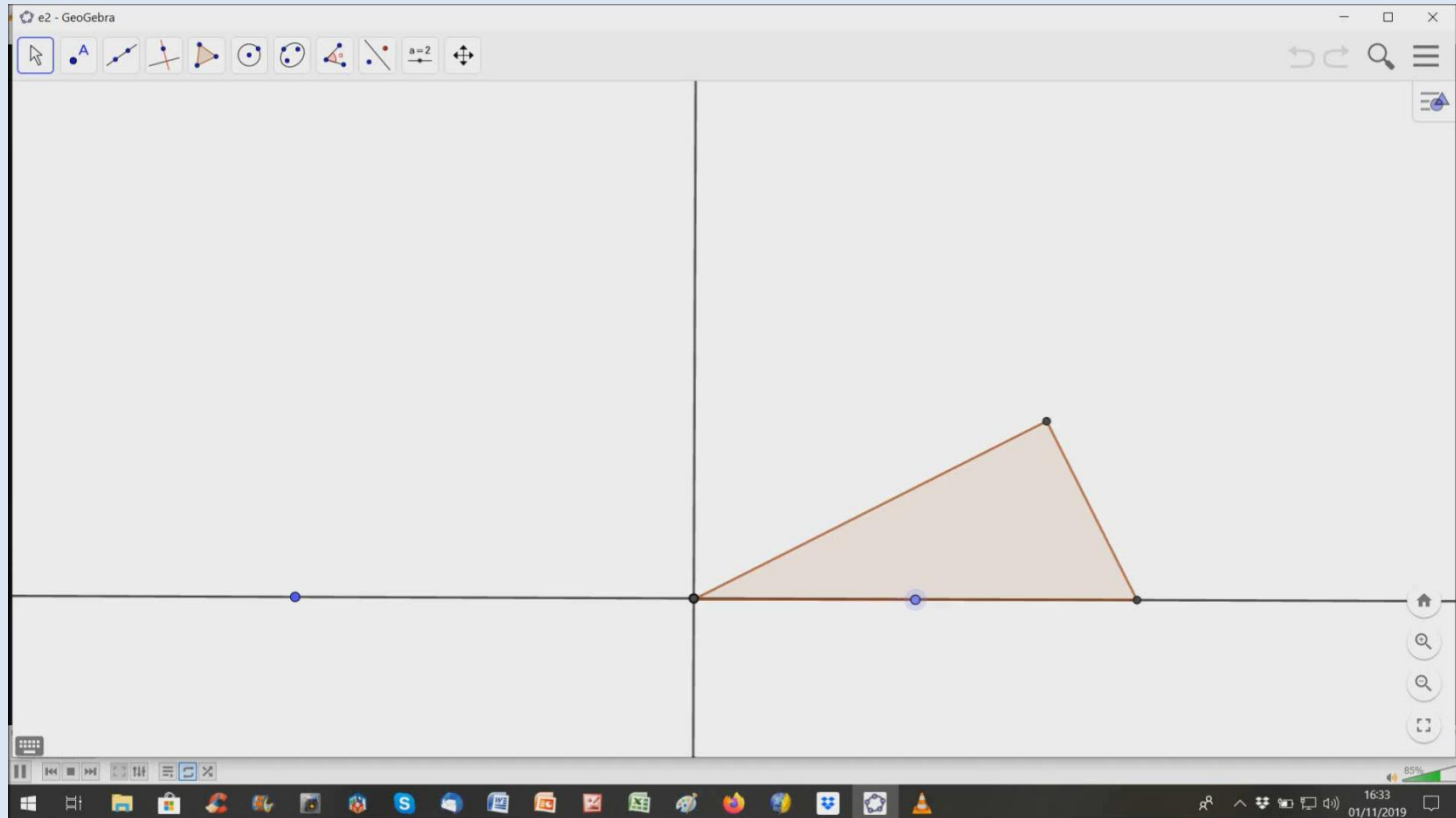
- Ce que l'on attend du professeur après cette « expérience »
- « Vous voyez que le volume d'un cône *semble* être le tiers de celui d'un cylindre de même diamètre et de même hauteur. *Plus tard, vous construirez des outils mathématiques vous permettant d'être sûrs que cela est vrai... ou faux*».

Conjecturer, argumenter, prouver, démontrer.
Les outils numériques.
Proposition en formation.

- **Comment se déplace le point M quand l'équerre glisse sur les deux axes ?**
- **Vous avez deux minutes pour faire une *conjecture* que vous formulerez.**
- **Ensuite, vous vous donnez tous les moyens possibles pour confirmer ou infirmer votre conjecture (discussions entre vous souhaitables bien sûr).**



Conjecturer, argumenter, prouver, démontrer *du bon ou du mauvais usage des outils numériques*



Manipuler : une prescription sans précautions

- L'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire, pour des raisons diverses, s'est de moins en moins appuyé sur des manipulations d'objets pour organiser des activités.
- Or c'est par un appui sur du matériel que les élèves sont motivés, y compris le matériel numérique
- Le merchandising actuel : « méthode de Singapour », « méthode Montessori », etc. profite de la quête légitime de l'épanouissement des élèves pour laisser croire à des méthodes nouvelles qui partent de manipulations en « *sacralisant le bricolage* » et attirer ainsi des enseignants soucieux d'améliorer leur enseignement.
- **Il est donc nécessaire de resituer le rôle des manipulations dans l'activité mathématique.**

Programmes 2016

6 Compétences travaillées

Le calcul n'est qu'une partie de l'activité mathématique

- Chercher
- Modéliser
- Représenter
- Reasonner
- Calculer
- Communiquer.

Stratégie de formation

Deux activités comparées en CP



L'illusion entretenue de la même séquence de classe parce que le même écrit est affiché.

Mais deux formes radicalement différentes de rapport au savoir.
Deux formes différentes de rapport à l'écrit .

Même **milieu de référence** ; **milieu d'apprentissage** différent.

- Dans cet exemple la réponse à « combien il y en a dans la boîte ? » s'élabore en s'appuyant :
- **Soit sur une manipulation de type 1** : le matériel permet de comprendre la situation et d'obtenir une réponse mais sans engager un travail cognitif significatif
- **Soit sur une manipulation de type 2** : le matériel permet de comprendre la situation (éventuellement en simulant avec une manipulation de type 1) ; un travail de prévision est mis en place ; la vérification des prévisions s'effectue soit de façon pragmatique (on vérifie à l'aide du matériel) soit de façon syntaxique (on vérifie en s'appuyant sur des savoirs).
- **Le matériel n'a donc pas la même place dans la mise en scène.**
- **Seule la manipulation de type 2 engage à coup sûr une modélisation (l'addition).**

Premières conclusions : outillage pour le conseil, points de vigilance.

- En formation, ou/et sur le terrain, ce type d'approche comparatiste de situations apparemment proches permet :
 - De prendre du recul par rapport au discours des rétro-novateurs annonçant la manipulation comme remède aux incompréhensions en mathématiques
 - De faire comprendre ce que peut être une séquence d'apprentissage en mathématiques (donc de ne pas confondre avec entraînement, consolidation, évaluation, évaluation à terme)
 - De montrer que des modifications minimales de séquences de classe habituelles sont déterminantes
 - Donc d'éviter les deux écueils que sont l'usage exclusif du fichier ainsi que les manipulations de type 1.

En formation, faire apprendre à utiliser un manuel

Le travail avec les objets :
suppose que le GP propose
une manipulation adéquate

L'évocation à l'aide
d'images et de textes

COUVRONS ENSEMBLE

Dans ce jeu, tu prévois le nombre de jetons dans la tirelire sans l'ouvrir.



Photo de la manipulation

La tirelire est vide.

Je mets 4 jetons.

Je mets 2 jetons.

Je mets 5 jetons.

1 Combien de jetons y a-t-il maintenant dans la tirelire ?
 $4 + 2 + 5 =$

L'écriture formelle

Problèmes et situations

« Un problème est généralement défini comme une situation initiale, avec un but à atteindre, demandant au sujet d'élaborer une suite d'actions ou d'opérations pour atteindre ce but. Il n'y a problème que dans un rapport sujet/situation où la solution n'est pas disponible d'emblée, mais possible à construire. C'est dire aussi qu'un problème pour un sujet donné peut ne pas être un problème pour un autre sujet, en fonction de leur niveau de développement intellectuel par exemple. »

Jean BRUN, revue *Math-École*
n° 141, Institut de mathématiques
(Neuchâtel).

Les catégories de situations

- Dans la plupart des situations vues en classe, on peut dire que l'apprentissage se fait par **familiarisation** : l'enfant comprend le problème posé par le professeur ou le manuel ou le fichier et s'efforce de résoudre le problème ou de répondre à la question.
- La situation évoquée rapidement en CP est d'une autre nature : Il s'agit de construire des dispositifs adaptés à l'âge, aux connaissances, et aux intérêts des élèves concernés en se posant une question d'ordre didactique et une d'ordre plutôt sociologique :
- « De quels problèmes traités dans ces dispositifs, le savoir visé est-il la solution optimale ? »
- « Comment s'assurer que les élèves voient dans ces activités des occasions d'apprendre ? »
- Brousseau, dans la théorie des situations (TSD) nomme ces situations : « situations d'apprentissage par **adaptation**. »

Quelques questions pour caractériser de telles situations

- Y-a-t-il bien un problème posé aux élèves ou ont-ils seulement à appliquer une consigne?
- L'utilisation de la connaissance est-elle nécessaire pour parvenir à la solution du problème posé aux élèves ?
- L'élève peut-il comprendre la consigne et s'engager vers une solution sans disposer de cette connaissance entièrement élaborée?
- Comment voit-il qu'il a réussi ou échoué? (Est-il entièrement dépendant de l'adulte ou la situation comporte-t-elle des rétroactions interprétables par l'élève?)
- La vérification du résultat peut-elle lui donner des informations sur la façon de réussir?
- L'organisation de la situation permet-elle à chaque enfant d'être confronté au problème et de faire des tentatives ?

Comment répondre à la question : « qu'est-ce que faire des mathématiques » ?

- Mathématiser c'est construire un modèle (produit par un langage : i.e. « moyen d'objectiver et de développer la pensée. ») en vue d'exercer un contrôle sur un milieu (souvent matériel en début de scolarité).
- **La manipulation : sa place, son rôle : prévoir puis vérifier.**
- Ceci dès la petite section de l'école maternelle
- Notre métier consiste à rendre compatible cette activité intellectuelle formatrice et l'acquisition des savoirs des programmes de l'école.
- **Cette approche n'est pas réservée à une « élite ». Malgré cela, « plus les élèves sont en difficulté plus on les plonge dans du déjà fait, du déjà vu, de l'entraînement. » rapport sur l'individualisation (CNESEO sep 2016)**
: <http://www.cnesco.fr/wp-content/uploads/2016/09/160926-Inegalites-scolaires.pdf>

La nécessaire dialectique milieu matériel, milieu des signes

Etude sur un exemple en CP

- 9 lancés d'un dé ont permis, à chaque lancé, de mettre autant de jetons dans une boîte « tirelire ». Au fur et à mesure, l'enseignante écrit le résultat des lancés au tableau : $1 + 6 + 6 + 6 + 1 + 5 + 6 + 6 + 6$.
- Il faut, à terme, prévoir combien de bonbons on obtient en échangeant un bonbon contre 10 jetons, sans ouvrir la boîte.



L'émergence des connaissances pour acquérir le savoir « grammaire de l'addition ».

R1 : La liaison entre deux signes consécutifs (génèse de l'addition) permet de prévoir à l'aide d'un autre signe (oral ou écrit) le nombre de jetons obtenu à la suite de deux lancers,

Cette première règle permet de commencer à interroger l'affirmation première « il ne peut pas y avoir de 10 , puisque ce n'est pas écrit »

R2 : La liaison entre deux signes, même non consécutifs permet de prévoir le nombre de jetons obtenus à la suite des lancers correspondants, indépendamment des autres lancers,

R3 : Une fois que l'on a pris un signe, celui-ci ne peut-être repris

R4 : le résultat d'une liaison entre deux signes peut être signifié par un autre signe (génèse de l'addition) qui peut être lui-même combiné aux autres signes.

Ce sont ces *connaissances* que le professeur attend de voir émerger. Il construit ses interventions autour de cela. Il évalue en continu à partir de cela.

Les *savoirs* sont plus facilement prévus, évalués, corrigés et enseignés que les *connaissances*. **Or ce sont les connaissances qui génèrent les savoirs.**

(petit x n° 73 : la place de l'expérimentation....)

La preuve par le langage

- A terme, l'ouverture de la boîte sera considérée comme superflue.
- Le professeur aura donc conduit les élèves vers l'élaboration d'un langage « consistant » lorsque les élèves manifesteront fièrement l'inutilité de l'ouverture de la boîte. (Même si le professeur « ouvre quand même ! »).
- Dans les phases de validation, les énoncés produits dans la situation de formulation deviennent des théorèmes. Ils entrent à leur tour dans le milieu d'apprentissage.
- A ce stade, les écrits qui étaient d'abord descriptifs, constituent alors progressivement un milieu syntaxique de preuves.
- Petit à petit le répertoire additif et la numération se construisent dialectiquement.

Voir : Rebière M., 2011 16° école d'été de didactique des mathématiques : « S'intéresser au langage dans l'enseignement des mathématiques, pour quoi faire ? »

Processus de mathématisation

- Un savoir mathématique ne peut résulter d'une simple confrontation à un milieu matériel qui envoie une rétroaction en cas d'erreur.
- Ca marche ? ou Pourquoi ça marche ?
- « Dans une mathématisation complète, on s'assure qu'un fait est vrai **ou pressenti** sur une base expérimentale puis on s'assure que, dans la théorie que l'on a bâtie par ailleurs, on peut déduire le fait en question. Cela mobilise toute une dialectique. » [CHEVALLARD 2004].

Outillage pour le conseil, points de vigilance (2).

- En formation, ou/et sur le terrain, ce point de départ : rapports savoir/connaissances constitue un outil d'observation indispensable à faire partager avec les enseignants. (L'observation nécessite un outillage théorique.)
- il permet de construire une relation rassurante avec l'enseignant dans la mesure où « l'inattendu » devient du prévisible !

PARTIE 2

Des recommandations ministérielles aux situations

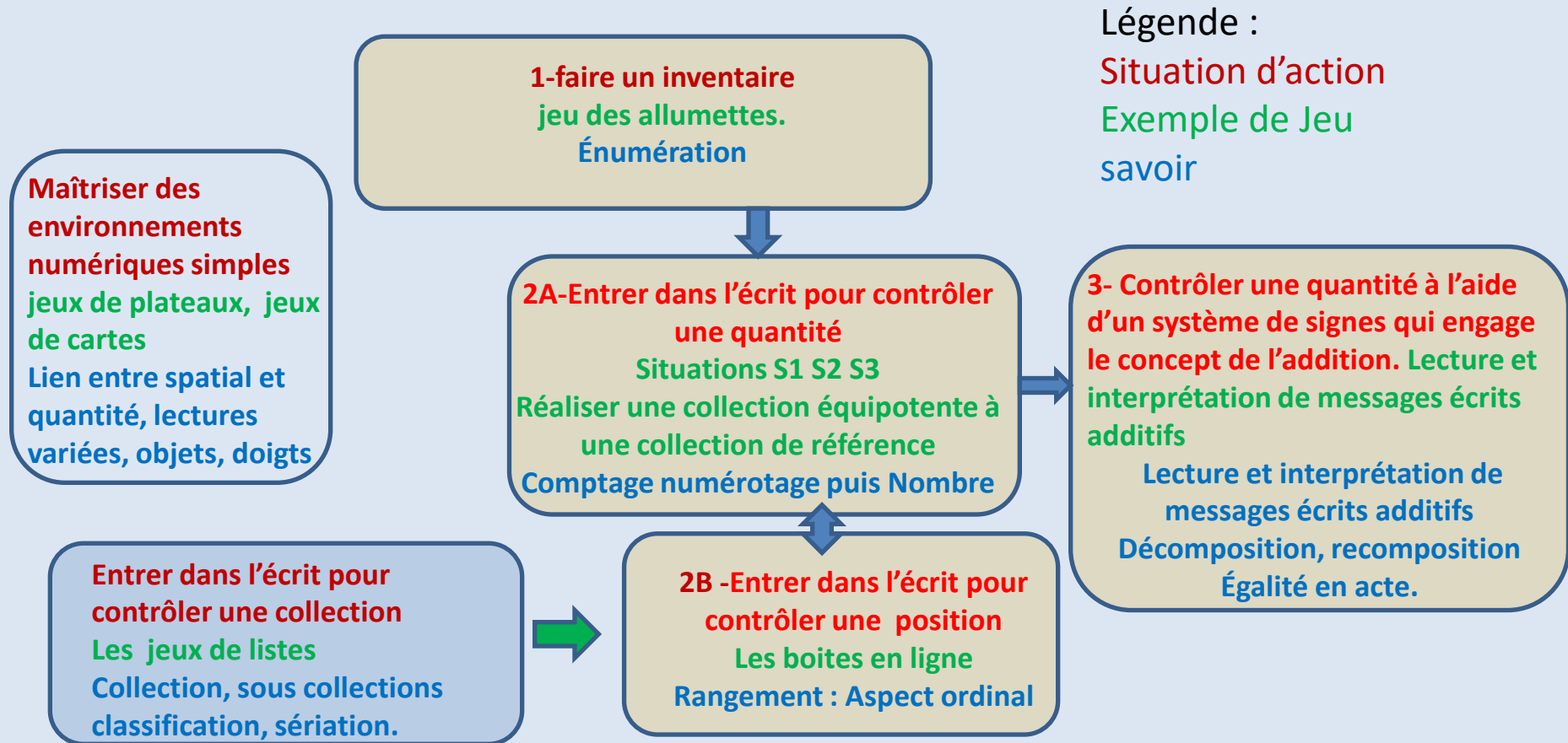
(exemple : note de service du 29 mai 2019 relative aux mathématiques à l'école maternelle)

Deux exemples

« **Composer/décomposer** les nombres est une première étape vers la mémorisation des résultats additifs et multiplicatifs »

« l'enfant doit maîtriser la synchronisation du pointage des éléments de la collection avec la récitation des noms des nombres et apprendre à énumérer tous les éléments de la collection (pointer une et une seule fois, sans en oublier). Cette compétence **d'énumération** s'acquiert dans l'action, en dénombrant activement, et il est déterminant de concevoir, et proposer aux élèves, des situations permettant des manipulations nombreuses et variées, en prenant le temps nécessaire chaque jour et dans la continuité du cycle 1. »

Construction des premiers nombres : approche plurielle, rôles de l'écrit.



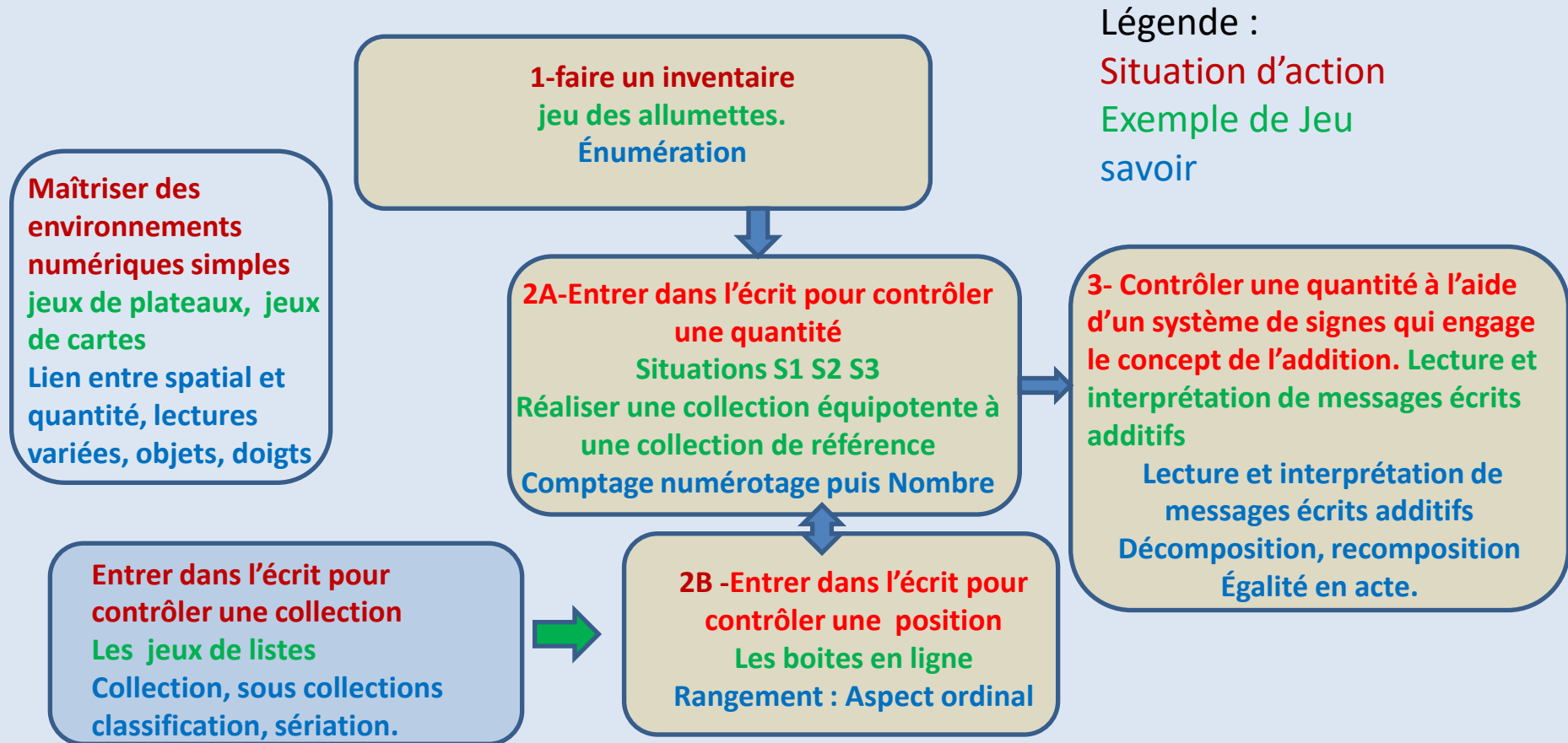
Légende :

Situation d'action

Exemple de Jeu

savoir

Construction des premiers nombres : approche plurielle, rôles de l'écrit.



Légende :

Situation d'action

Exemple de Jeu

savoir

- Une activité venue d'où ?

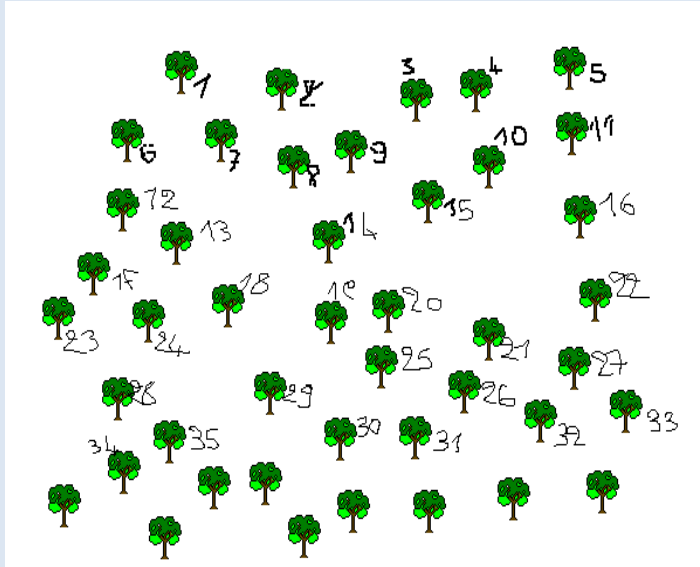


Document 2 000



Allons voir en Cours préparatoire

Examinons un travail d'élève de CP



L'enfant échoue alors qu'il dispose de la suite numérique et d'un procédé d'exploration relativement bien organisé (lignes conçues). Il s'agit donc d'une absence de connaissance (que nous appelons *l'énumération*) qui se manifeste par une absence de synchronisation effective entre une connaissance numérique et une organisation conjointe de la collection et qui empêche d'effectuer *l'inventaire* de la collection. (Briand 1993).

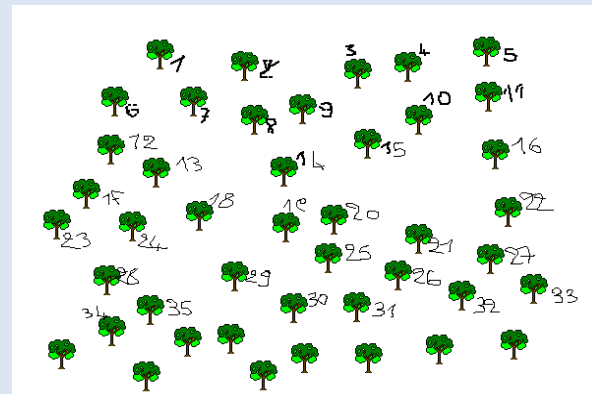
Compétences observées pour effectuer un comptage

- *Etre capable de distinguer deux éléments différents d'un ensemble donné.*
- *Choisir un élément d'une collection.*
- Enoncer un mot nombre. (« un » ou le successeur du précédent dans une suite de mot-nombres).
- *Conserver la mémoire de la collection des éléments déjà choisis*
- *Concevoir la collection des objets non encore choisis*
- Recommencer (pour la collection des objets non encore choisis) les quatre points qui précèdent tant que la collection des objets à choisir n'est pas vide.
- *Savoir que l'on a choisi le dernier élément.*
- Enoncer le dernier mot nombre.

« Dans certaines situations, l'élève a besoin de **connaissances** que l'école n'enseigne pas, mais qu'il doit pourtant mettre en œuvre pour apprendre **le savoir** ou pour utiliser ce qu'il a appris. »

La classe au jour le jour : faire évoluer la situation

Boîtes fixées...écrire est la seule solution



Enumération

Dénombrement
(donc énumération)

Sourions un peu : L'énumération prise en défaut lors d'un comptage



Variante avec un « milieu » différent



Voir « des situations pour apprendre le nombre »

CRDP Champagne Ardenne.

Joël Briand 29 octobre 2019 IFE

Manipuler, expérimenter : tout sauf le bricolage. Dès la petite section

- Une activité connue... : trier des objets



- Deux connaissances (faiblement) convoquées : **collection** et **énumération** : elles sont constitutives du savoir « tri ».
- Connaissances contrôlées à l'insu des élèves par le dispositif matériel. (Manipulation de type 1).

- Trier avec des boîtes tirelires



- Pourquoi « compliquer » la situation ?

Le « milieu » détermine l'activité.

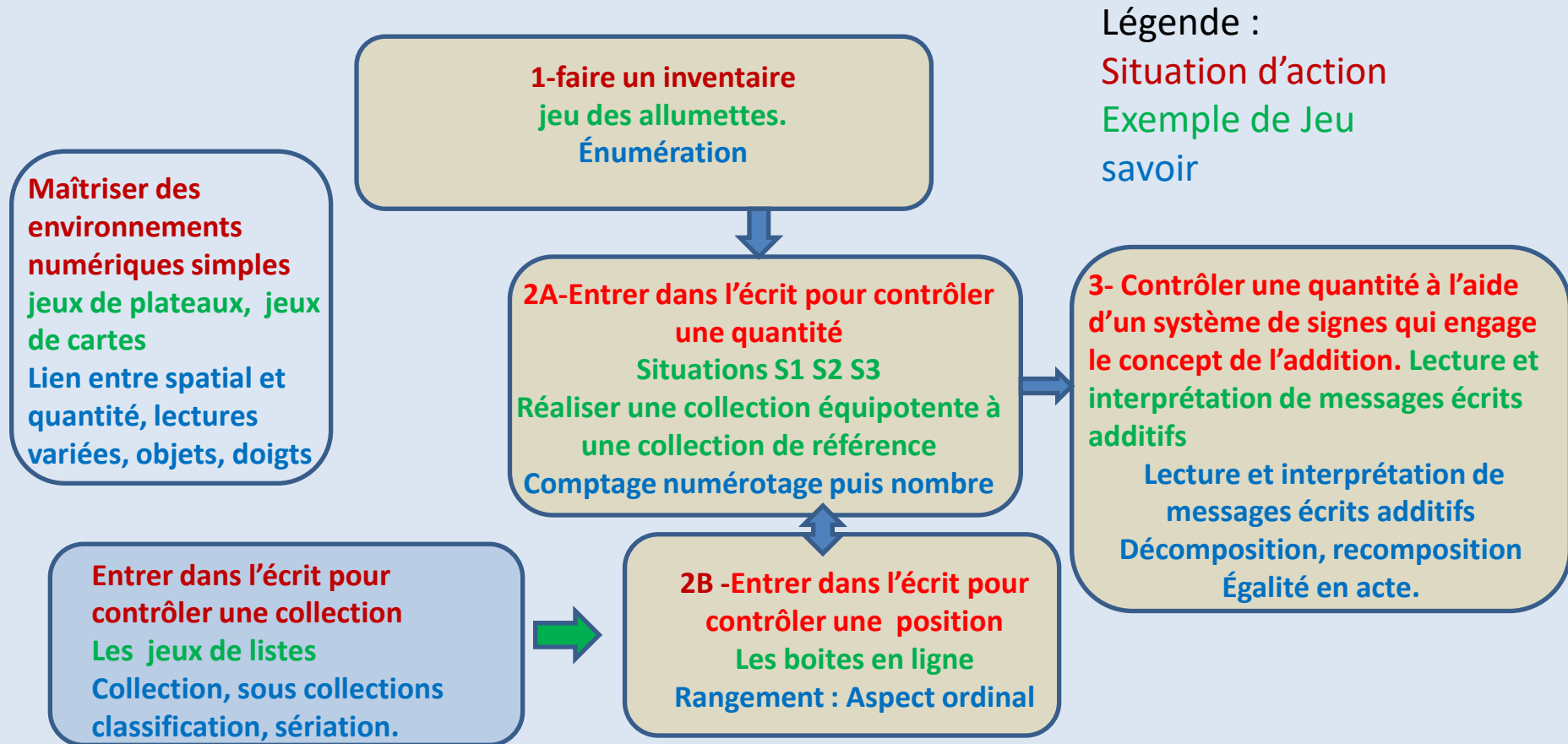


- Milieu matériel « faux ami »
- Milieu matériel antagoniste : de vrais enjeux
- (Manipulation de type 2).

Document 2 000

Joël Briand 6 novembre 2019

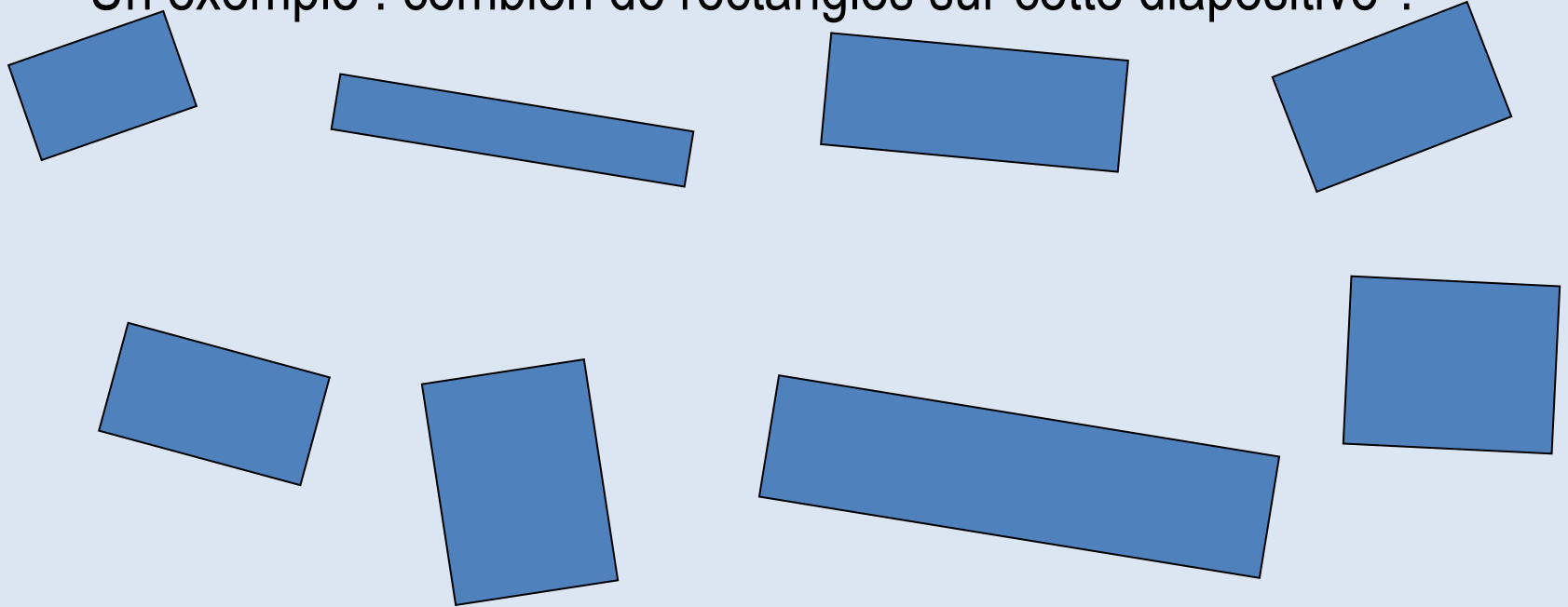
Construction des premiers nombres : approche plurielle, rôles de l'écrit.



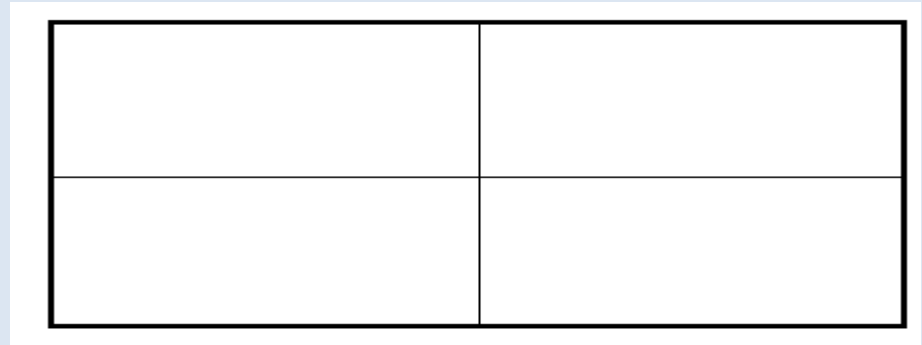
Légende :
Situation d'action
Exemple de Jeu
savoir

Contrôler une collection pour dénombrer : une activité simple ?

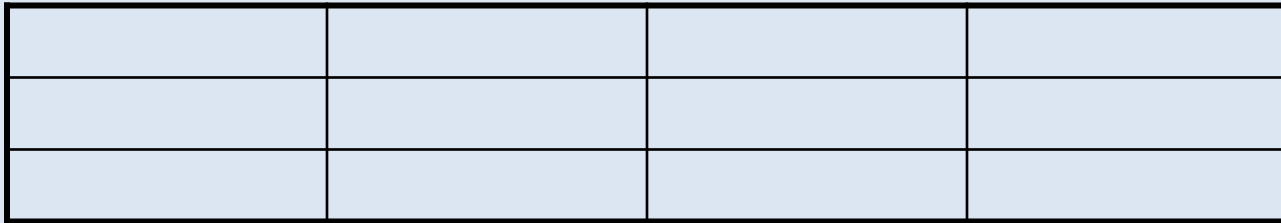
Un exemple : combien de rectangles sur cette diapositive ?



Combien de rectangles dans cette figure?



Et dans celle-ci?...



$$C_5^2 \times C_4^2$$

Connaissances spatiales,
conceptions des objets à dénombrer,
outillage mathématique expert.

Dénombrement

- **DENOMBREMENT**
- C'est la capacité à produire une collection (C2) équipotente à une collection donnée (C1) sans voir cette collection au moment où l'on produit la collection (C2).

- **COMMENT DENOMBRER ?**
- Par subitizing,
- En comptant, numérotant
- Ou les deux et en s'aidant d'images mentales.
- Ou en ayant maîtrisé le nombre.

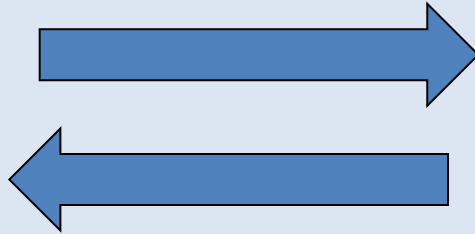
-

La construction des premiers nombres

- Le comptage-numérotage est une pratique spontanée,
 - On peut observer cette pratique comme procédure réussie de dénombrement,
 - Sa manifestation ne garantit pas l'acquisition du concept de nombre.
 - Elle ne signifie pas non plus que le concept de nombre n'est pas acquis !
-
- Comment alors faire évoluer un milieu d'apprentissage afin de passer du comptage-numérotage (quantité) observé au nombre construit opérationnel.
 - Nous allons voir que l'entrée dans le monde des signes joue ici un rôle déterminant afin de contrôler des rapports.

A partir du comptage-numérotage

[S1]. « *Nous allons jouer au jeu des voitures...* ». *Autocommunication orale.*



Vu dans un fichier largement diffusé en France... : « Eloigner les deux collections à comparer pour les élèves les plus performants » (!)

Faire évoluer la situation pour s'assurer de l'abandon du comptage-numérotage

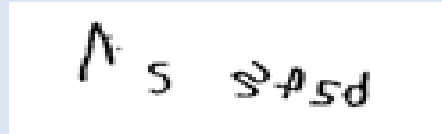
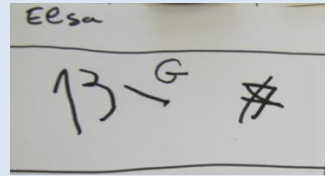
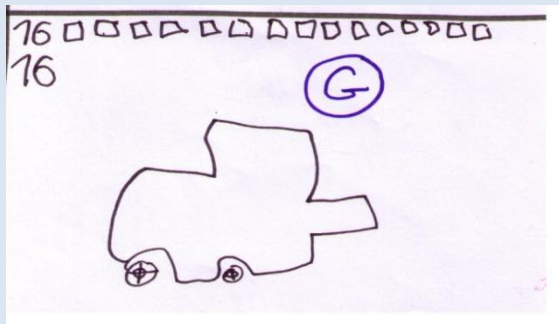
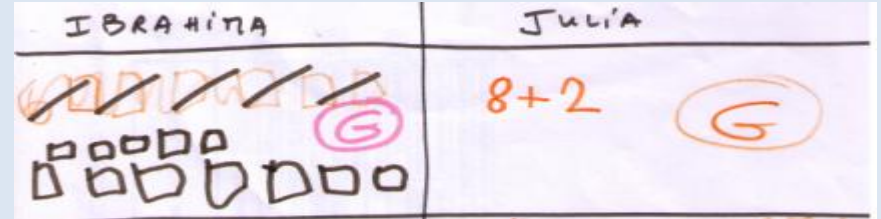
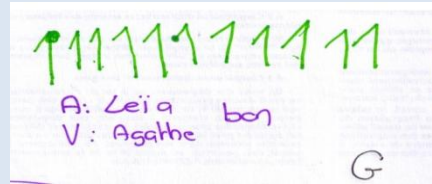


[S2]. « *Les garages seront pris plus tard. Vous n'aurez plus les voitures. Pour vous souvenir, vous pourrez écrire* ». **Autocommunication écrite.**

[S3]. « *Ce n'est plus vous qui irez chercher les garages ; vous porterez votre message qui sera lu par un camarade. Il vous donnera les garages* ». **Communication écrite.**

- Le milieu d'apprentissage est modifié afin d'optimiser la conceptualisation du nombre par passage à l'écrit.

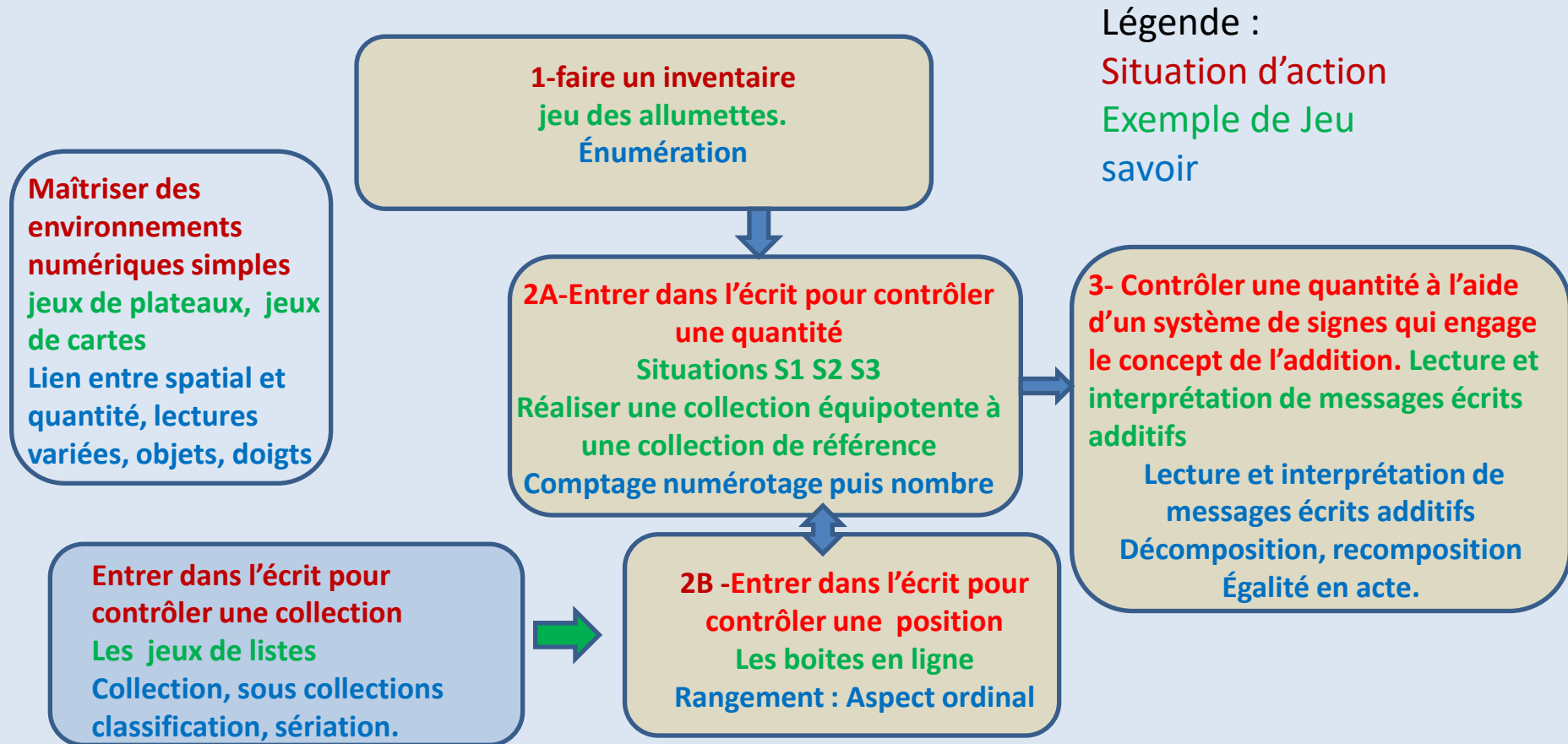
Quelques messages MS-GS



Documents 2 014

L'évolution des traces écrites est un indice de l'acquisition de la maîtrise des premiers nombres. C'est un chantier de plusieurs semaines qui s'ouvre.

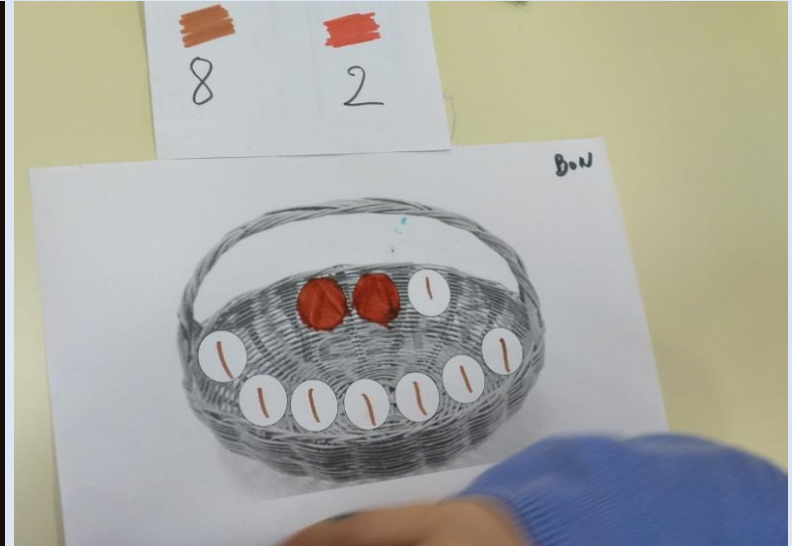
Construction des premiers nombres : approche plurielle, rôles de l'écrit.



Une situation



Document 1995



Document 2016

- Cette situation S1 permet de progresser d'une signification « topographique » du signe 45 à une signification « mesure d'une quantité »

La suite...

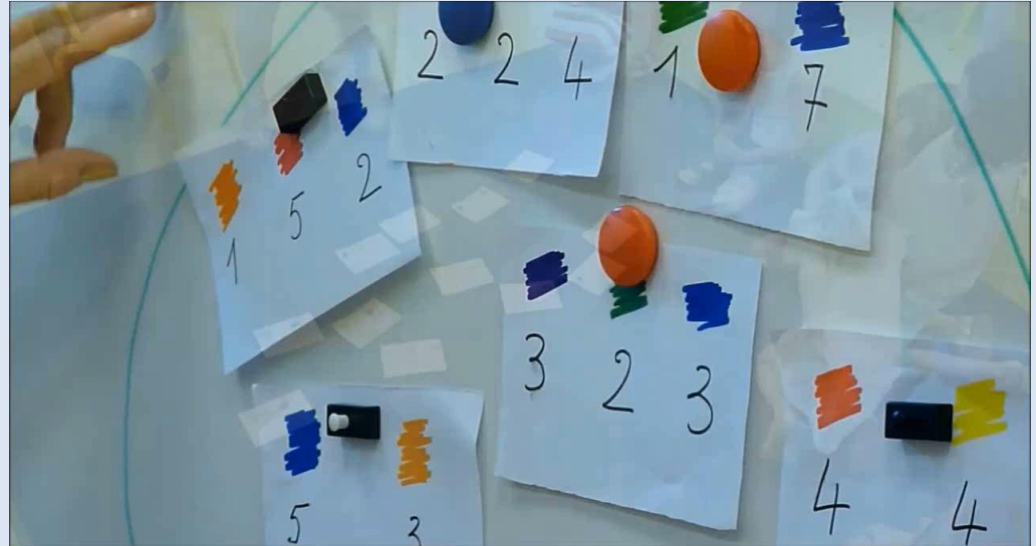
- **S2 : Savoir aller chercher les bons paniers en faisant le lien entre 4 5 et 9**
(C'est un milieu de signes avec validation en milieu matériel ou doigts de la main)



Document 1 995

- S31 : Prévoir si deux étiquettes amènent au même panier (vérification à l'aide des barquettes : **validation sémantique**)
- S32 : Prévoir si deux étiquettes amènent au même panier (cette fois sans recours aux barquettes : **validation syntaxique**) (vidéo).

- « *La reconnaissance de la propriété d'addition est une condition nécessaire à la conceptualisation du nombre.* » G.Vergnaud.
- *Décomposer recomposer par itération sont alors des observables.*



Document 2016

Partie 3

Evaluer

Accès à la numération

Les « principes organisateurs » déterminants

- Il est classique de voir un élève lire l'étiquette « 18 » en énonçant « dix-huit » et considérer simultanément que 18 c'est $1 + 8$ (donc c'est 9 !) sans voir l'incompatibilité entre ces deux lectures.
- On constate donc que ce signe « 18 » a une signification pour l'élève qui n'est pas « stable »
- Pour que l'élève s'approprie la signification souhaitée de ce « signe », un discours magistral n'est pas suffisant.
- **Objectif** construire des situations qui permettent cette appropriation et accompagne ce changement d'interprétation des signes également connus « 1 » et « 8 ».



Extraits de cette situation d'évaluation



L'évaluation – l'observation

L'observation des élèves en **situation d'action** permet :

- **au professeur d'exercer son travail de professionnel (responsable)**
- **de s'émanciper du filtre de l'écrit**
- **d'évaluer au-delà des savoirs**

Il est donc important de resituer les moments de l'**action**, ceux de la **formulation**, ceux du **conseil**, ceux de l'**évaluation stricto sensu**.

Ce qu'il faut enseigner ce sont les **notions** pas les **compétences** !

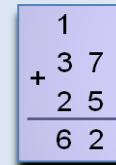
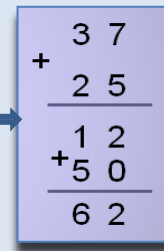
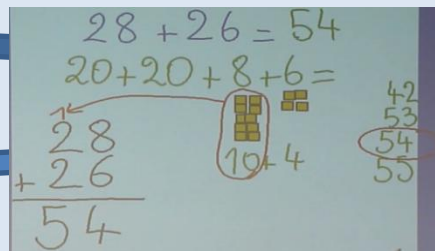
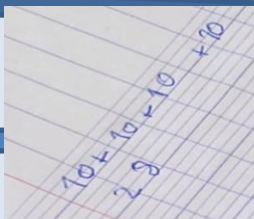
Partie 4

Algorithmes évolutifs

(individualisation, mécanismes : deux risques)

Construction conjointe de la numération et de procédés évolutifs de calculs : l'addition

« Les opérations arithmétiques sont introduites dans le cadre de la résolution de problèmes dont elles sont un outil de modélisation. »



Fin de CP : s'assurer du bon contrôle de l'addition en colonne

The image displays three vertical grids, each representing a columnar addition problem. Each grid has 10 horizontal lines and 3 vertical columns. A thick horizontal line is drawn at the bottom of each grid, indicating the end of the calculation.

Grid 1 (Left): Shows the numbers 12, 5, 32, and 7 aligned in columns. The first column contains 1, 5, 3, and 7. The second column contains 2, an empty space, 2, and an empty space. A plus sign is placed to the left of each number. A thick horizontal line is drawn below the numbers.

Grid 2 (Middle): Shows the same numbers as Grid 1. A blue bracket is drawn under the 5 in the first column and the 2 in the second column, indicating a carry-over of 1 from the second column to the first.

Grid 3 (Right): Shows the same numbers as Grid 1. A blue bracket is drawn under the 7 in the first column and the 2 in the second column, indicating a carry-over of 1 from the second column to the first.



Calculez $125-97$.

Les techniques

- **La technique par « démolition »**
- exemple 125-97

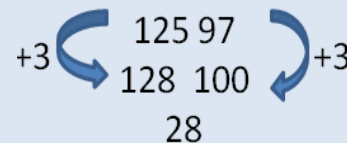
- **Avantage** : cette technique repose sur la compréhension de notre système d'écriture des nombres largement travaillé au cycle 2.
- **Inconvénients** :
- -Elle correspond à une manipulation à partir du matériel de numération...
- -Elle est très difficilement utilisable dans les cas où il y a un zéro intermédiaire sauf à automatiser de façon très coûteuse.
- -Cette technique devra donc être abandonnée en cycle 3 ou au collège.

La technique « par compensation ou translation » : exemple 125-97

Méthode « à la russe » : on cherche un nombre rond

100

128



100

110

120

130

140

- Méthode usuelle : on ne peut pas calculer 5-7 : on ajoute 1 dizaine à 125 et pour conserver l'écart on ajoute 1 dizaine à 97.

107

125

-97

135

100

110

120

130

140

avantages : cette technique est utilisable quels que soient les nombres choisis. Elle s'appuie sur des propriétés mathématiques qui seront utiles au cycle 3 et au collège. C'est la technique usuelle de la soustraction en France, elle sera enseignée au cycle 3. Les élèves qui l'auront apprise en CE1 n'auront pas besoin de changer de technique au cycle 3.

inconvénient : elle nécessite de prendre le temps de travailler la propriété de conservation des écarts, sur laquelle elle repose.

L'algorithme de la soustraction en CE1 se construit donc à partir d'une bonne connaissance de la droite graduée.



Technique définitive

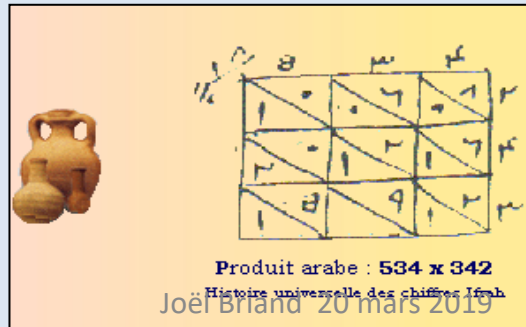
La multiplication : Méthode Per Gelosia

25		
20	5	
20x10 = 200	5x10 = 50	10
20x3 = 60	5x3 = 15	3

} 13

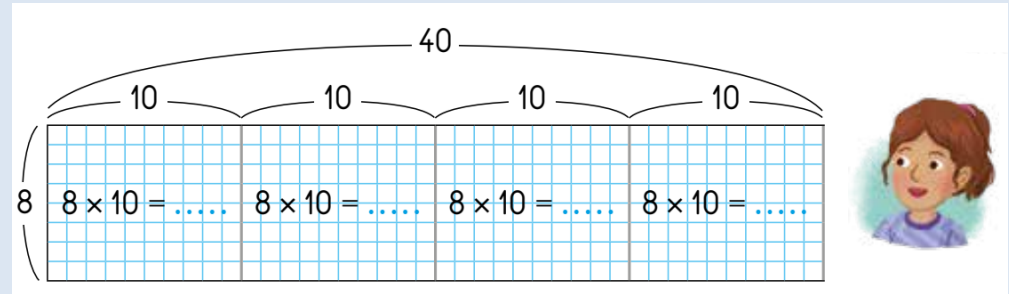
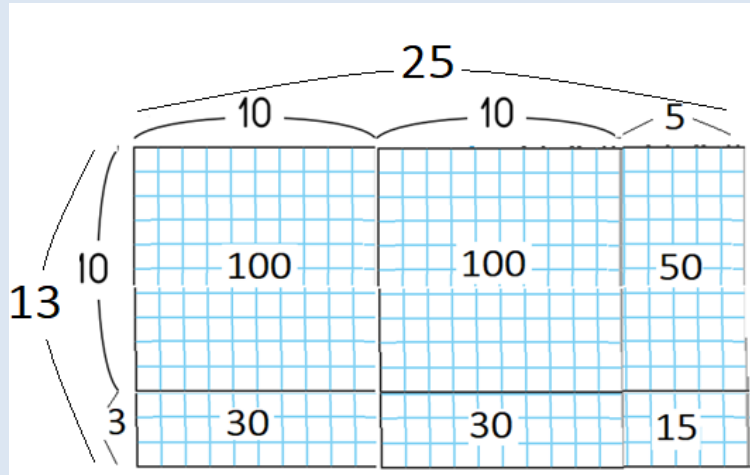
2	5	
0	2	0
0	6	1
	5	3

200
+ 50
+ 60
+ 15
325



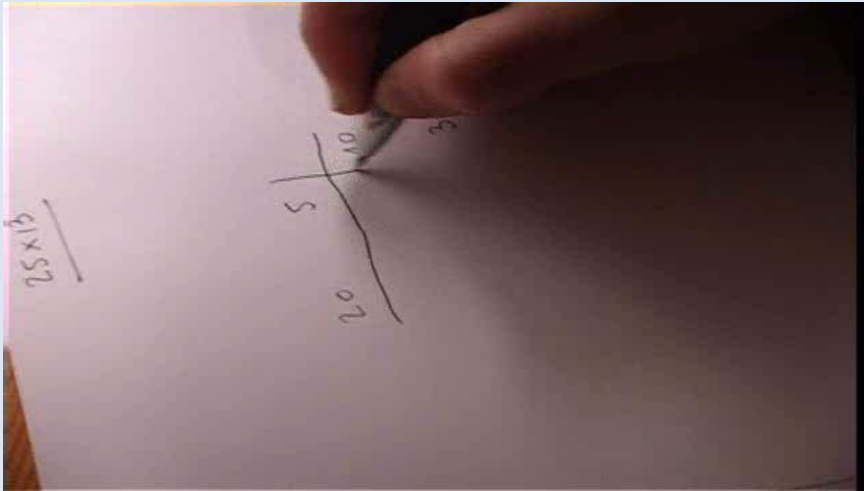
Résultat
325

La multiplication en partant d'un quadrillage



Le procédé

25x13



Au seuil de réussite acceptable de 70%, pour la taille 8, la méthode classique permet 12 réussites sur 25 élèves soit 48%. L'autre méthode permet la réussite de 22 élèves soit 88%. Le gain est de 40%. Il augmente avec la taille des multiplications.

L'amélioration est plus forte chez les élèves moyens.

Recherche réalisée à l'IREM de Bordeaux (1973) auprès de 150 enfants de CM.

	20	5	
	200	50	10
	60	15	3

$$\begin{array}{r}
 15 \\
 + 60 \\
 + 50 \\
 + 200 \\
 \hline
 325
 \end{array}$$

puls

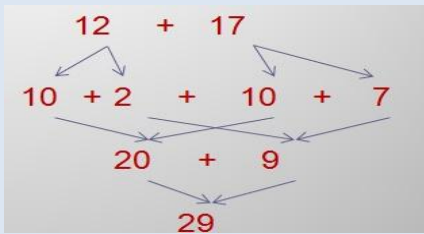
$$\begin{array}{r}
 \times 25 \\
 \times 13 \\
 \hline
 + 15 \\
 + 60 \\
 + 50 \\
 + 200 \\
 \hline
 325
 \end{array}$$

puls

$$\begin{array}{r}
 \times 25 \\
 \times 13 \\
 \hline
 75 \\
 25 \\
 \hline
 325
 \end{array}$$

Donc une nécessaire réflexion sur les contenus à enseigner pour rendre compatible « faire des maths » et « apprendre des maths ».

Addition



$$\begin{array}{r} 37 \\ + 25 \\ \hline 12 \\ + 50 \\ \hline 62 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 1 \\ + 37 \\ + 25 \\ \hline 62 \end{array}$$

Soustraction

47 c'est 48

$$\begin{array}{r} - \\ \underline{19} \end{array} \quad \begin{array}{r} - \\ \underline{20} \end{array}$$



2

On ajoute 10 unités à 86
 16 unités moins 7 unités égalent 9 unités

On ajoute 1 dizaine à 37 pour garder le même écart.

Multiplication

20	5	
200	50	10
60	15	3

$$\begin{array}{r} + 15 \\ + 60 \\ + 50 \\ + 200 \\ \hline 325 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 13 \\ \hline 15 \\ + 60 \\ + 50 \\ + 200 \\ \hline 325 \end{array}$$

puis

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 13 \\ \hline 75 \\ 25 \\ \hline 325 \end{array}$$

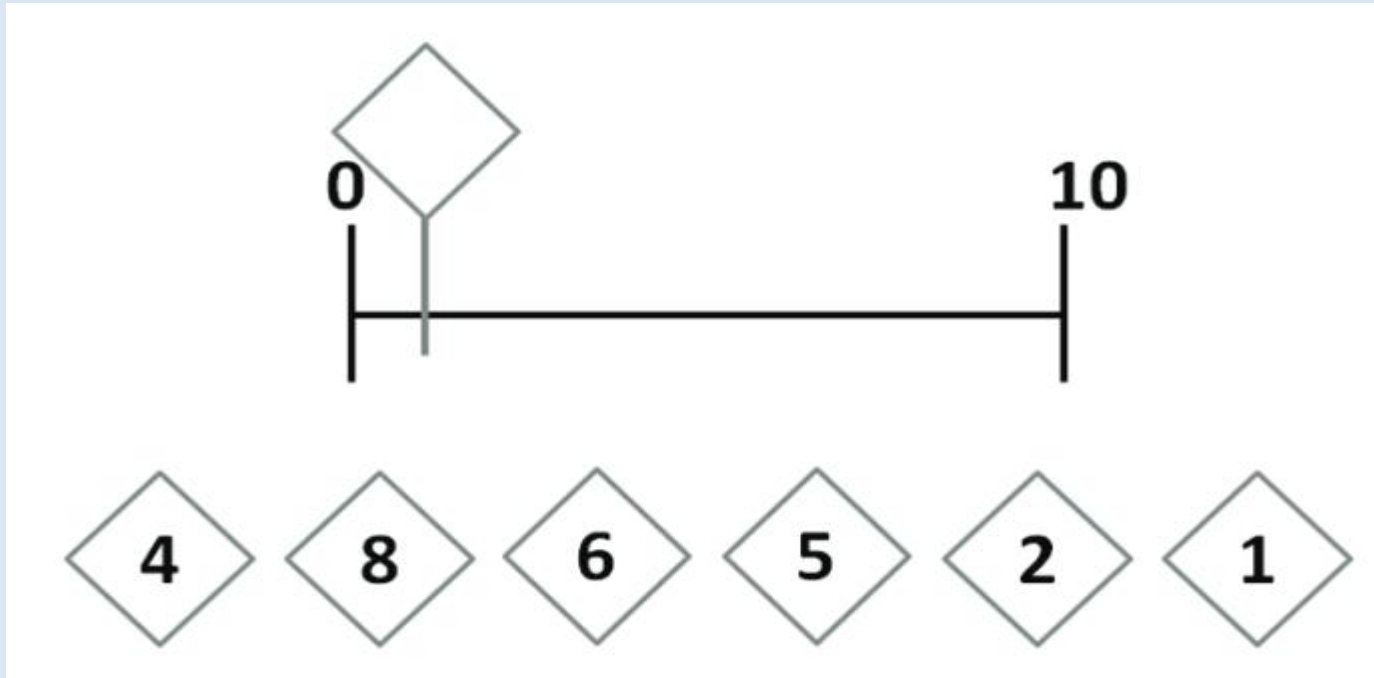
puis

Partie 5

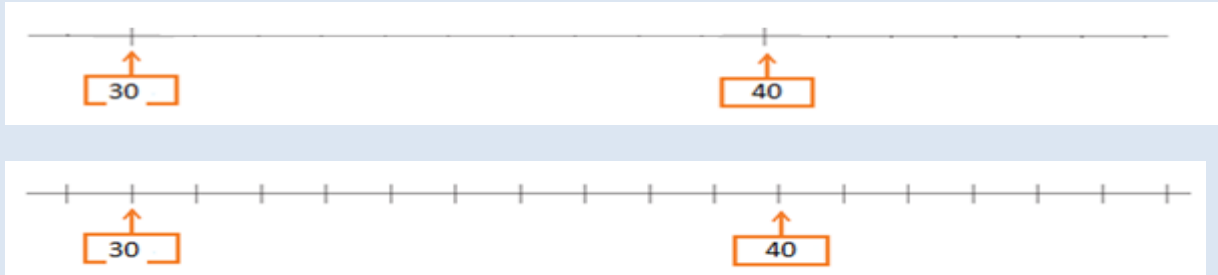
La droite numérique : outil/objet

- La droite graduée est un outil très performant pour comparer et ordonner les nombres ainsi que pour mettre en place certaines procédures de calcul, notamment les calculs additifs et soustractifs par sauts et le calcul de division par encadrement du dividende par deux multiples consécutifs du diviseur.
- Ce travail est peu abordé à l'école. Il est souvent confondu avec l'étude du double décimètre et des unités légales de longueur.

Exercice 6 des repères CP 2019...

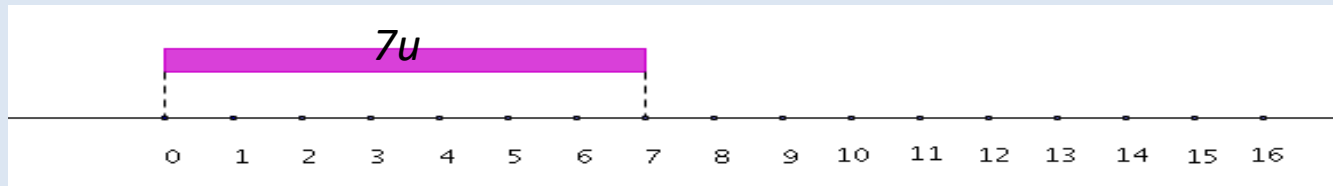
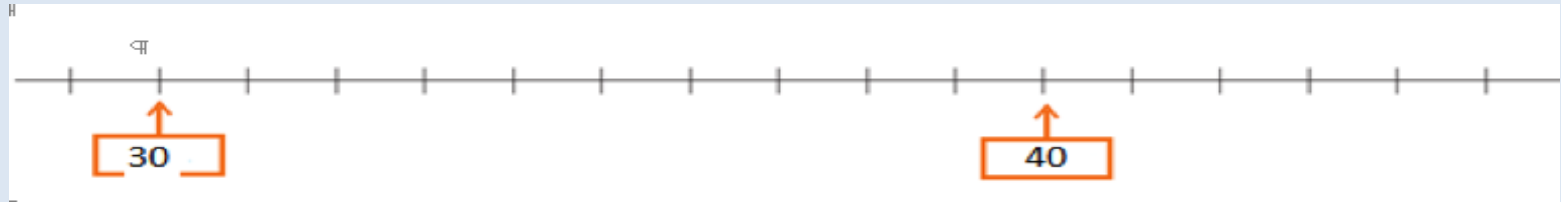
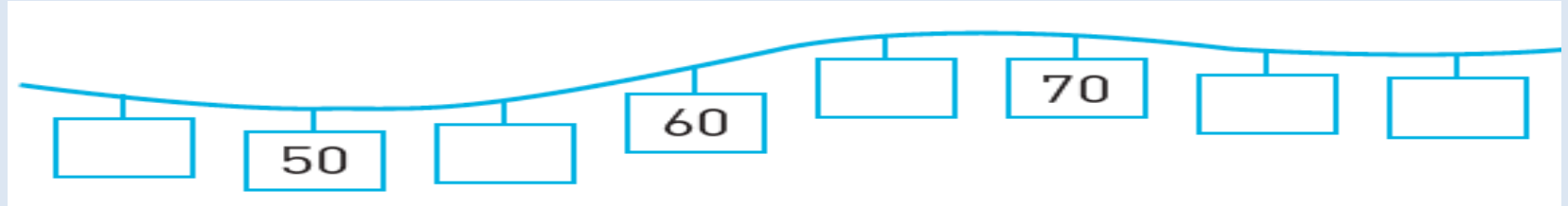


Nécessité de construire une image mentale de la droite numérique



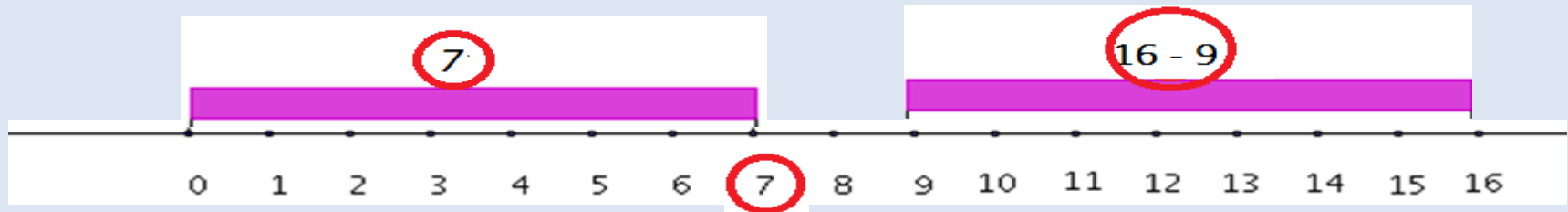
- Travailler le lien entre distance (notion géométrique : nombre de graduations) et écart (notion numérique : l'écart 37-15)
- Permet de donner du sens à
 - « 36 est entre 30 et 40 »
 - « 39 est proche de 40 »
 - « 35 est entre 30 et 40. Il est juste au milieu »
 - « 35 est à égale distance de 30 et 40 »

Piste, file, droite numérique, double décimètre : du discret au mesurable

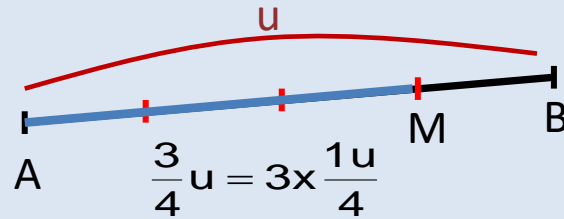


La droite graduée et la mesure (CE2- CM1 – CM2)

Un nombre désigne à la fois un point, la distance de ce point à l'origine, mais aussi la longueur d'une bande.



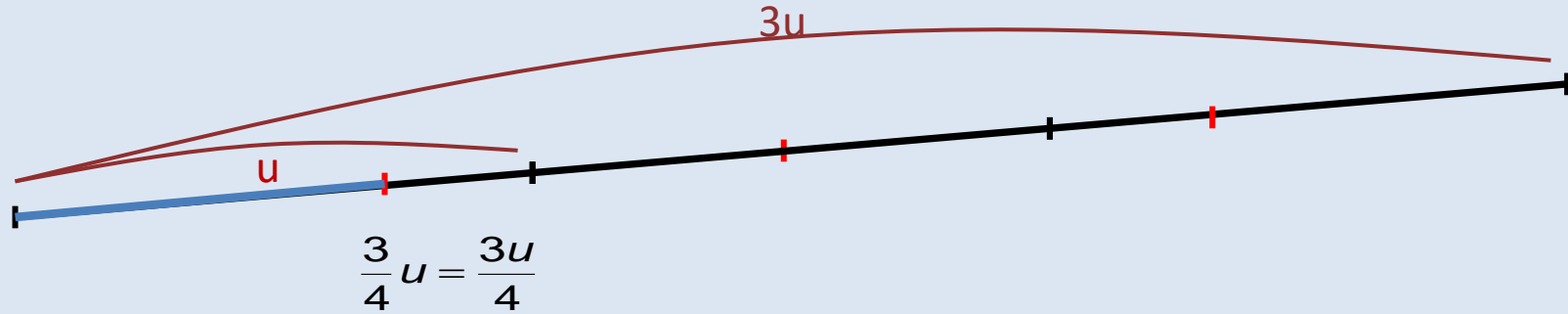
Une difficulté du côté des professeurs : deux conceptions des fractions



-« 3 quarts » renvoie au partage du segment unité (de mesure 1) qui est fractionné en 4 parts égales (par pliage) et l'on prend 3 de ces quarts. Dans ce cas, on parle de « **fractionnement de l'unité** ».

$\frac{3}{4}u$ est la mesure du segment [AM]

Autre conception



-« 3 divisé par 4 » renvoie au partage d'un segment de mesure $3u$ en 4 segments de mesures égales (cela peut être un segment de mesure $3u$, mais cela peut être aussi 3 pizzas, etc.). On parle alors de « **commensuration** ».

C'est cette seconde conception qui donne du sens à la « fraction quotient ».

« Pour faire 3 u il faut 4 u' » ; « $4x = 3$ »

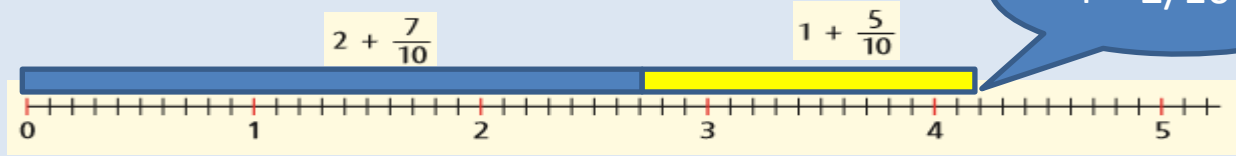
Les programmes 2016 renvoient à la 6^o cette conception des fractions.

Document d'accompagnement 6°

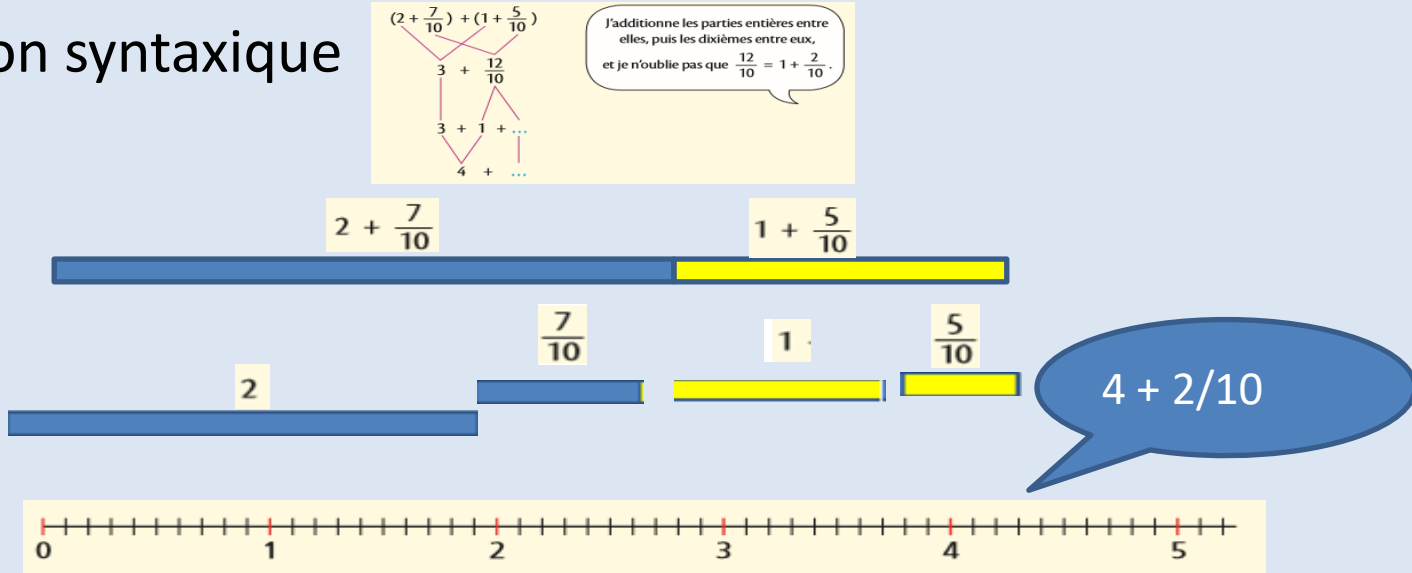
L'écriture $\frac{13}{5}$, dans la conception partage travaillée au cours moyen, représente « 13 cinquièmes de l'unité ». Or, un cinquième de l'unité, c'est l'unité partagée en 5 ; une unité est égale à dix dixièmes, un cinquième de l'unité est donc égal à 2 dixièmes de l'unité¹⁰ ; on montre ainsi que « 13 cinquièmes de l'unité » est égal à 13 fois 2 dixièmes de l'unité, soit 26 dixièmes, ou 2,6. Ce raisonnement permet de valider le fait que l'écriture $\frac{13}{5}$, sera aussi utilisée pour noter le quotient de 13 par 5 ; on parlera cette fois de la conception quotient de la fraction $\frac{13}{5}$.

Continuité rupture entre manipulation pour prouver

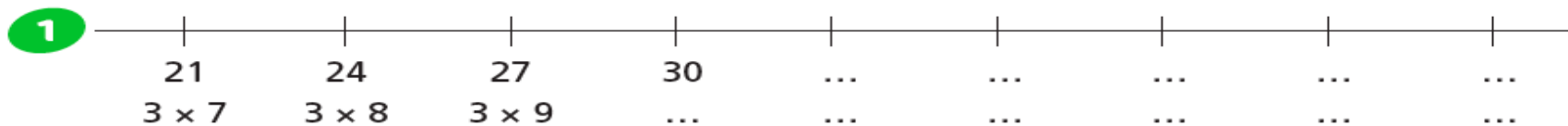
Validation pragmatique



Validation syntaxique



Droite graduée et multiplication



a. Reproduis cette droite graduée de 3 en 3.

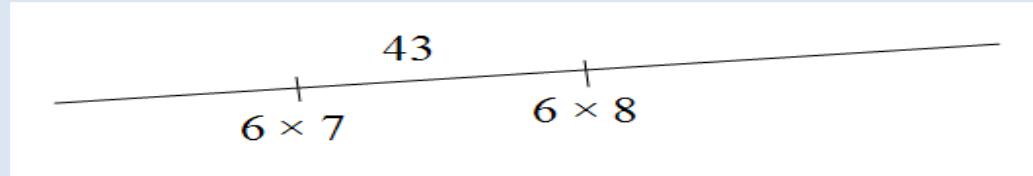
Sous chaque graduation, complète avec un nombre et un produit.

b. Place approximativement le nombre 41 sur cette droite.

c. Encadre 41 par deux multiples consécutifs de 3 : $3 \times \dots < 41 < 3 \times \dots$

Droite graduée et division

- Résoudre des problèmes en s'appuyant sur la droite numérique :



« Quand on encadre 43 par deux multiples consécutifs de 6 et que l'on écrit $43 = (6 \times 7) + 1$, on dit que l'on fait la division de 43 par 6. Dans cette division, le nombre 7 s'appelle le quotient. C'est le nombre de fois où 6 est contenu dans 43. 1 s'appelle le reste. »

Partie 6

Les problèmes à énoncé textuel

Les types de problèmes en milieu scolaire

- Problèmes dont la résolution vise la construction d'une nouvelle connaissance (SAA).
- Problèmes destinés à permettre le réinvestissement de connaissances déjà travaillées, à les exercer,
- Problèmes plus complexes que les précédents dont la résolution nécessite la mobilisation de plusieurs catégories de savoirs
- Problèmes centrés sur le développement des capacités à chercher : en général. Pour résoudre ces problèmes, les élèves ne connaissent pas encore de solution experte.

Comment faire 50 € avec des billets de 20 €, 10 €, 5 € ?
Trouve au moins quatre solutions.

L'énoncé textuel

- C'est un objet didactique
 - C'est un moyen
 - Ce n'est pas un objet mathématique
- « ...caractère stéréotypé des textes de problèmes, dont la fonction essentielle est d'exprimer les différentes applications d'une structure mathématique, plutôt que de présenter des situations réalistes de résolution de problèmes. » Seton Pearlman Neshet (1988)

Conseil : pour ce type de situations problèmes qui ne sont pas de l'ordre de l'évaluation

- Réfléchir à un dispositif matériel qui jouerait le rôle de « juge de paix » : certains élèves s'organisent effectivement avec du matériel
- Dès lors, on **prévoit par le calcul** ce que les autres vont **trouver**
- En fin de travail, on demande le résultat aux élèves qui ont manipulé
- Une fois le résultat connu, la mise en commun consiste à comprendre pourquoi, le cas échéant, la prévision était fausse, incomplète...
- Éventuellement, on relance une nouvelle rédaction.
- On s'accorde pour une stratégie, une entrée dans le problème, une rédaction collective.

Une piste de travail pour les problèmes à énoncés textuels : les centres de calculs.

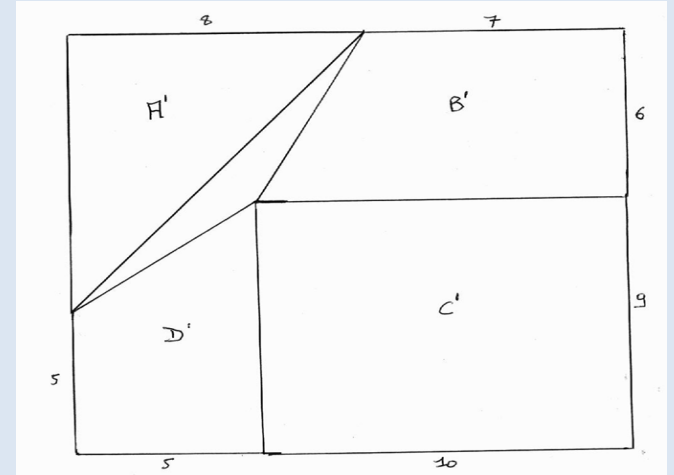
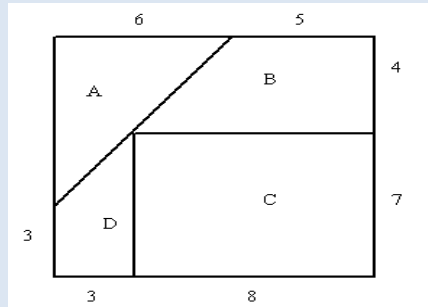
- **Groupe A** : dans une salle de cinéma, il y a 36 rangées de 24 fauteuils chacune. Pour la séance du soir, 18 places seulement restent vides. Combien y a-t-il de spectateurs dans la salle ?
- **Groupe B** : Dans une salle de cinéma il y a 12 rangées de 62 fauteuils. Pour la séance de ce soir, on a compté 592 spectateurs. Combien reste-t-il de places vides ?

36×24
Rendat - 18 =

Ce type d'activité permet de séparer la partie modélisation de la partie calcul.

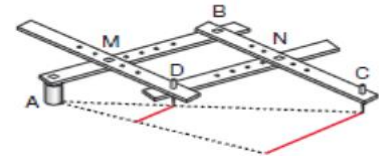
Dans le domaine du numérique, les mathématiques ne se confondent pas avec le calcul.

“Problème” de proportionnalité dans un cadre géométrique (SAA rebaptisée récemment : tâche complexe...)



Variables significatives : $4 \rightarrow 8$, $4 \rightarrow 6$, $4 \rightarrow 7$

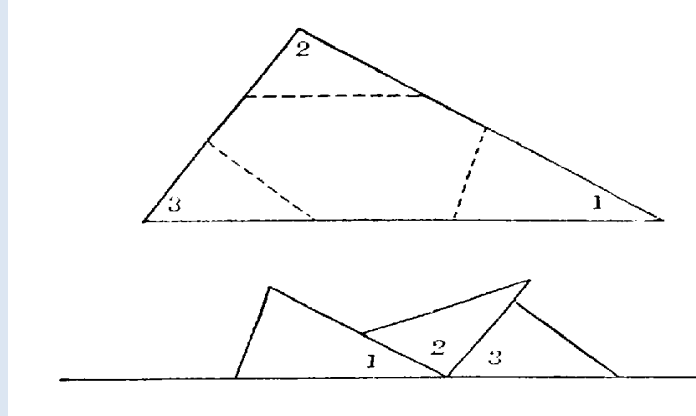
Pour faire un agrandissement, on place un crayon en C. On suit la figure à agrandir avec une pointe placée en D ; le crayon trace alors la figure agrandie.



Partie 7

L'inférence probable

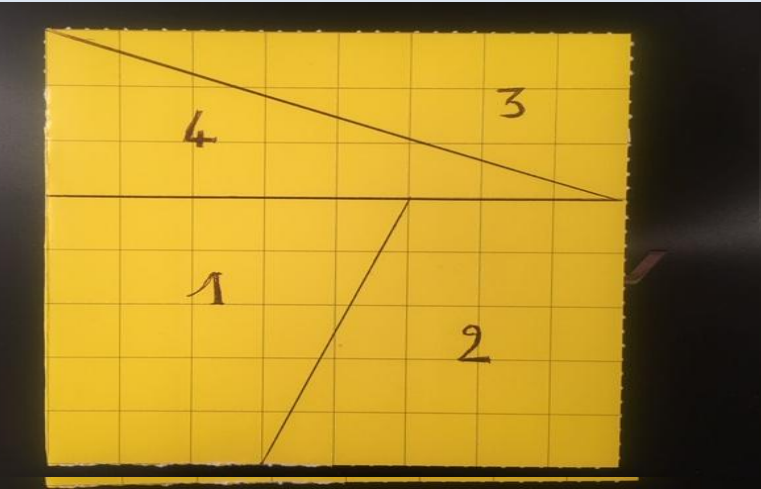
Elaboration collective d'une conviction



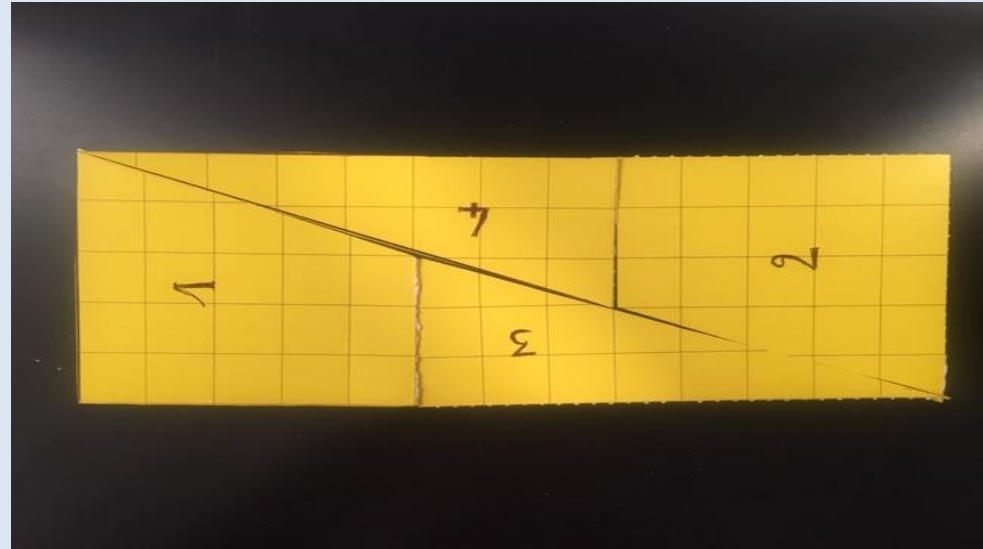
- Il faut s'interroger sur ce type d'activité qui est refusé par certains professeurs. Si 25 élèves qui dessinent 25 triangles différents aboutissent à 25 « angle plats », peut-on considérer cela comme une simple coïncidence ? (différent de la photocopie de 25 fois le même triangle).
Acquérir la forte conviction d'une vérité est un motif très fort pour vouloir en faire la démonstration.

Rester vigilant tout de même

64=65...!!



8x8



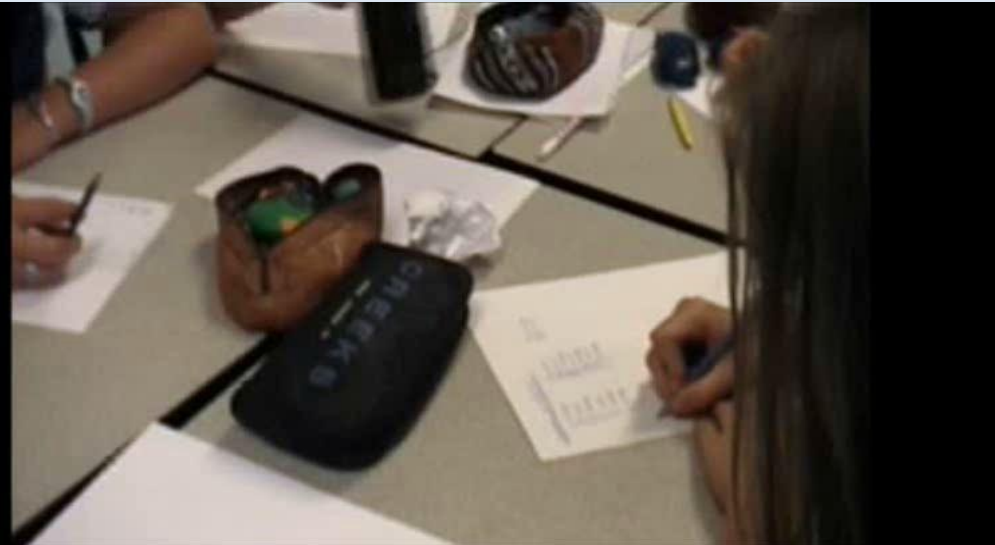
5x13

Mais alors il faudrait enseigner une approche des statistiques à l'école.

Une expérimentation initiale conduite en 1975 proposait de « *trouver un moyen sûr de connaître la composition d'une bouteille opaque contenant 5 billes : des noires et des blanches* ».



● Document RTS 1975 CM1



● Document IUFM 2008 classe de seconde

Variabilité d'une expérience

- Admettre la non reproductibilité systématique d'un événement lors d'une expérience pourtant répétée dans les mêmes conditions, constitue une rupture fondamentale dans cette part du contrat déterminée par le rapport entretenu avec le milieu d'apprentissage.
- La situation doit donc permettre d'ébaucher un modèle prenant comme objet d'étude cette nouvelle incertitude : celle de la variabilité.
- L'expérience change de statut : une expérience sera une classe d'expériences élémentaires.

Conclusion 1

S'il n' y avait qu'à retenir 5 points lors d'un échange avec un enseignant

- Pouvez vous statuer précisément sur le type de séance que vous proposez (apprentissage, consolidation, évaluation, ...) ?
- S'il s'agit d'une situation d'apprentissage, comment les élèves ont-ils eu à anticiper, comment se rendent-ils compte qu'ils ont réussi ou échoué ?
- Quelle consigne de travail a été préparée ? (plus qu'une préparation détaillée, l'écriture précise de la consigne qui sera donnée est un outil fondamental)
- S'il y a manipulation : sa place ? Se substitue-t-elle au raisonnement ?
- Quelle trace écrite ? (chantier en cours, résultats à retenir), place de cette trace, statut de cette trace. Son rôle dans la mémoire de la classe et son utilisation.

Conclusion 2

- La manipulation, si elle n'est pas intégrée dans un processus d'apprentissage, ne permet pas aux élèves de progresser, sauf pour ceux qui ont compris qu'au-delà de la manipulation, le seul enjeu était de retenir le savoir affiché par le professeur.
- Si le résultat peut être obtenu par l'action, les élèves n'ont pas à engager un travail cognitif. Ils se bornent à faire des constats qui restent attachés au contexte.
- Le passage d'une validation pragmatique à une validation syntaxique est constitué de continuités et de ruptures. Il est donc utile de lier les transformations dans le milieu des signes et les transformations dans le milieu matériel lorsque c'est possible.
- Cet enseignement qui consiste à demander de prévoir n'est pas destiné à une élite. La tendance à vouloir faire manipuler (de type 1) les élèves qui seraient en difficulté en mathématiques ne fait que creuser l'écart entre ceux qui sont déjà entrés dans les écrits mathématiques et ont compris leur usage et ceux qui tardent à comprendre l'intérêt de ces écrits.
- En conclusion, déclarer qu'il est nécessaire de passer «du monde concret. . . à une vision abstraite» est une vieille lune qui n'a jamais aidé à construire des séquences de classe.

Merci de m' avoir écouté.

ddm.joel.briand.free.fr